



**HAL**  
open science

## L'équation du troisième degré: une histoire complexe

Sandra Bella, René Rispoli, Olivier Roizès, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Sandra Bella, René Rispoli, Olivier Roizès, Thomas Hausberger. L'équation du troisième degré: une histoire complexe. 2011. hal-02319858


**HAL Id: hal-02319858**

**<https://hal.science/hal-02319858>**

Submitted on 18 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

	<b>L'équation du troisième degré: une histoire complexe Sommaire</b>	
--	--	---

1. Fiche d'identification
2. Fiche Professeur
3. Scénario d'usage
4. Fiche technique
5. Fiches élève
6. Traces de travaux d'élèves
7. Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives
8. Bibliographie
9. Evolution de la ressource (CV)

---

<sup>1</sup>Manuel Bächtold, Sandra Bella, Viviane Durand-Guerrier, Daniel Guin, Dominique Guin, Thomas Hausberger, Véronique Pinet, Henri Reboul, Olivier Roizes, Jean Sallantin. Responsable : Thomas Hausberger ([thomas.hausberger@umontpellier.fr](mailto:thomas.hausberger@umontpellier.fr))  
IREM de Montpellier

	<b>IREM</b> <b>1- Fiche d'identification</b>	
--	---	---

<b>Discipline scientifique</b>	Mathématiques/ Histoire des Mathématiques	
<b>Thème</b>	Nombres complexes, Analyse (fonctions)	
<b>Niveau</b>	Terminale Scientifique	
<b>Cadre</b>	<b>Notions scientifiques travaillées</b>	Fonctions polynômes du troisième degré (cadre analytique et algébrique) Fonctions continues et dérivables Nombres complexes
<b>Objectifs</b>	A travers la résolution d'équations du troisième degré, éclairer sur le processus de construction, dans l'histoire, des nombres complexes et par là-même problématiser leur apprentissage.	
<b>Modalités pratiques de déroulement</b>	<b>Durée</b>	Une heure + le travail à la maison
	<b>Equipement spécifique</b>	Vidéoprojecteur
<b>Dispositifs pédagogiques</b>	Vidéo puis discussion orale. Devoir maison et son compte rendu Travail en petits groupes sur des textes historiques ayant comme sujet les premières écritures des nombres complexes.	
<b>Description de l'activité</b>	En deux parties : <ul style="list-style-type: none"> <li>- L'enseignant montre dans un premier temps en classe une vidéo dégageant quelques propriétés d'un polynôme du troisième degré (nombre de racines, obtention d'une formule exacte de celles-ci) ; dans un deuxième temps, les élèves doivent traiter un devoir maison ; le corrigé sera l'occasion de revenir sur la difficulté de bien définir les nombres complexes.</li> <li>- Travail sur les textes historiques de Bombelli pour introduire la notion d'opérateur <i>racine carrée</i>, dans le cas novateur d'un nombre négatif, permettant ainsi la résolution du problème de la simplification d'une racine cubique et l'obtention de la valeur d'une racine d'un polynôme du troisième degré. La comparaison des textes de Bombelli et Euler permet d'interroger l'im-</li> </ul>	

	portance de l'écriture symbolique choisie.
<b>Fichiers constitutifs de la ressource</b>	<a href="http://vimeo.com/channels/irem">http://vimeo.com/channels/irem</a> mot clé éventuel: IREM
<b>Mots-clés</b>	Nombres complexes, polynômes du troisième degré, formule de Cardan, racine carrée, histoire des mathématiques, Bombelli.
<b>Auteurs</b>	Sandra BELLA, René RISPOLI, Olivier ROIZES

<b>Programme officiel</b>	<b>Contenus</b>	Fonctions dérivables, lien entre le signe de la dérivée et la fonction Fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires Structure algébrique des nombres complexes
	<b>Commentaires</b>	Cette étude du polynôme du troisième degré est l'occasion: <ul style="list-style-type: none"> <li>- D'utiliser le discriminant <math>\Delta</math> d'un trinôme pour déterminer le signe de la dérivée</li> <li>- D'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires une ou trois fois, selon les coefficients du polynôme;</li> <li>- De mettre en garde contre des extrapolations abusives de propriétés algébriques telles <math>\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}</math>, qui feraient impasse sur une définition rigoureuse du signe <math>\sqrt{\quad}</math>.</li> </ul>
<b>Prérequis</b>	Etude générale d'une fonction dérivable (calcul et signe de la dérivée, variations de la fonction)	
<b>Intérêts</b>	Les manuels scolaires proposent parfois une introduction historique des nombres complexes, mais celle-ci se présente souvent sous la forme d'un petit encart à vocation essentiellement culturelle. D'autre part, l'appropriation par l'élève du nouveau domaine de nombres que constitue les complexes, avec ses règles de manipulations algébriques, est rendu difficile par le fait que l'introduction des imaginaires apparaît comme une démarche peu naturelle (la terminologie y contribue d'ailleurs). Face à ces deux constats, nous avons élaboré une activité qui s'appuie sur la démarche historique de Bombelli afin de présenter les nombres complexes comme un outil destiné à répondre à une problématique précise : résoudre les équations polynomiales de degré 3 en exploitant les formules de Cardan, qui pour certaines valeurs des coefficients n'ont plus de sens alors que l'on sait que l'équation possède des solutions réelles. Introduits comme des outils, les complexes deviennent objets d'études avant de servir de nouveau comme	

	<p>outils pour résoudre des problèmes. Des études montrent qu'une telle dialectique outil/objet favorise les apprentissages. Cette activité insiste également sur le fait que le mathématicien construit ses objets, et ceci en fonction des problèmes qu'il se donne à résoudre. Cette vision des mathématiques transparaît peu dans les contextes d'enseignement.</p>
<p><b>Etapes importantes dans le déroulement de la séquence</b></p>	<p>Lors de la correction du devoir maison, l'enseignant reprend quelques points mathématiques à partir aussi de la correction des copies.</p> <p>Il fait ensuite un bilan de l'intérêt mathématique (et éventuellement épistémologique) de l'activité 1 et du devoir.</p> <p>Lors de l'activité 3, l'élève a préparé les premières questions à la maison. A la lecture du texte de Bombelli, il doit reconnaître les difficultés qu'il a rencontré dans l'utilisation de la formule de Cardan puis comprendre l'intérêt de la solution que propose Bombelli.</p> <p>En groupe, ils cherchent à répondre aux questions 2)a)b) (un quart d'heure).</p> <p>Suit une correction dont l'objectif est de décider d'un commun accord sur la nécessité d'un symbole adapté.</p> <p>Pour finir, on revient sur l'équation de départ et on simplifie la valeur de la racine.</p>

### Détail des activités :

#### Activité 1 : *Devoir maison Du troisième degré aux complexes*

<p><b>Objectifs</b></p>	<p><b>Objectifs épistémologiques</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Lecture et interprétation d'un texte historique</li> <li>2) Sensibiliser à difficulté de bien définir une notion mathématique.</li> </ol>
	<p><b>Objectifs scientifiques</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Réinvestir les connaissances concernant l'étude d'une fonction au cas particulier d'un polynôme du troisième degré.</li> <li>2) Simplifier l'étude d'un objet mathématique en reconnaissant quels sont les paramètres essentiels. La recherche des caractéristiques des racines d'un polynôme du troisième degré se ramène à l'étude d'un polynôme de forme <math>x^3+cx+d</math> (où <math>c</math> et <math>d</math> sont des réels).</li> <li>3) Interrogation sur le choix de la méthode la plus adaptée pour obtenir un résultat (lorsque l'on cherche à donner une valeur à la</li> </ol>

		racine d'un polynôme, on dispose d'une formule « exacte », de la lecture graphique,...)
--	--	---

### Description de l'activité :

L'élève visionne une vidéo dont les scènes sont des manipulations à travers des logiciels de géométrie dynamique (Geogebra <http://www.geogebra.org/en/upload/files/french/rey-thomas/geogebra.pdf> et Geospace <http://reims.univ-irem.fr/docgeoplan/docgeoplan.pdf> ).

L'interprétation des graphes visionnés devrait conduire aux résultats suivants:

- Un polynôme du troisième degré a au moins une racine réelle et au plus trois ;
- Pour obtenir une éventuelle formule d'une racine d'un polynôme du troisième degré, on peut étudier les polynômes qui sont unitaires et dont le terme de degré 2 est nul ;
- Obtention de la formule de Cardan dans un cas particulier :  $P(x) = x^3 - cx - d$  où  $c$  et  $d$  sont des réels positifs. Reconstitution historique de la méthode de Cardan (reprise par Bombelli) ;
- Limites de la formule de Cardan : Son application se limite au cas où  $(d/2)^2 - (c/3)^3 > 0$ . Exemples.

### Activité 2

#### Correction du devoir maison : *Du troisième degré aux complexes*

<b>Objectifs</b>	Faire un bilan d'un devoir maison, décrire les enjeux épistémologiques sous-jacents
------------------	---

### Description de l'activité :

L'enseignant pourra répartir le temps selon ses choix pédagogiques, mais il est essentiel que la séance comporte deux temps :

- La mise en évidence des points mathématiques importants du devoir en s'appuyant sur les copies d'élèves.
- L'autre de compte rendu des notions épistémologiques sous-jacentes (validité d'une formule, possibilité d'extension d'un opérateur). Tout cela devrait se faire dans un langage très libre et spontané, en dialogue avec les élèves.

### Activité 3

#### Les trouvailles de Bombelli

<b>Objectifs</b>	<b>Epistémologiques</b>	1) Questionnement sur la possibilité de généraliser la définition de la racine carrée. 2) Questionnement sur la pertinence du choix d'un signe/
------------------	-------------------------	--

		symbole signe ( $\sqrt{-1}$ ou $i$ ) 3) Etant donné un opérateur, possibilité d'étendre son domaine (de nombres).
	<b>Scientifiques</b>	Algèbre basique

**Description de l'activité :**

La fiche a été distribuée aux élèves quelques jours avant pour qu'ils puissent la préparer.

L'activité comporte trois temps :

- Le point de départ est le texte de Bombelli. La situation que décrit Bombelli est celle qu'expérimentent les élèves lorsqu'ils essaient d'appliquer le formule de Cardan. La rencontre avec les quantités « sophistiquées » oblige Bombelli à inventer de nouvelles règles de calcul qui tiennent compte de la définition originale de la racine carrée.
- Le deuxième temps questionne la pertinence du signe racine ( $\sqrt{-1}$ ) en confrontant Bombelli à Euler.
- Le troisième temps applique les nouvelles règles à la simplification de la formule de Cardan trouvée pour le polynôme  $x^3 - 15x - 4$ . On fera remarquer qu'il existe trois racines cubiques pour tout nombre.



**IREM**  
**3- Scénario d'usage**



**Scénario de l'activité 1 :**

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée <sup>2</sup>
1	Professeur et élèves	Regarder la vidéo Prendre des notes en vue d'éventuelles questions		Vidéoprojecteur	30'
2	Elèves	Questions sur ce qui a été vu			20'
3	Enseignant	Distribution des feuilles du devoir maison			

**Scénario de l'activité 2**

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	Professeur et élèves	Correction du devoir maison			60'

**Scénario de l'activité 3**

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée
1	Elève	Préparation des questions 1) et 2)a)	A la maison ou en petits groupes		45'
2	Enseignant Elèves	Correction interactive des premières questions			30'
3	Enseignant Elèves	Recherche et correction des questions suivantes			60'
4	Enseignant	Remarques diverses sur les enjeux épistémologiques de l'activité			15'

<sup>2</sup>Cette durée est donnée à titre indicatif et prévisionnel  
IREM de Montpellier

**Fiche technique activité 1 :**

<b>Matériel requis</b>	Vidéoprojecteur Connexion à internet
<b>Description et mode d'emploi</b>	<p>Les trois vidéos en ligne sont dans un format standard, lisible de tout ordinateur, sans préparation particulière.</p> <p><a href="http://vimeo.com/channels/irem">http://vimeo.com/channels/irem</a></p> <p>mot clé éventuel: IREM</p> <p>Pour plus de sécurité, (débit internet trop lent, ...) l'enseignant aura la possibilité de télécharger au préalable cette vidéo sur son disque dur, par exemple avec le navigateur Firefox et l'extension <i>Fast Video Download</i>, ou <i>DownloadHelper</i>.</p>

### Activité 1

#### I. Etude du nombre de racines d'un polynôme réel du troisième degré

Soit  $P$  un polynôme du troisième degré et soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels,  $a$  non nul, tels que  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  où  $x$  est un réel.

On étudie l'équation  $P(x) = 0$ . Plus précisément, on cherche à connaître son nombre de solutions, les valeurs exactes de celles-ci ou à défaut des valeurs approchées.

- 1) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrez que  $P$  possède **au moins** une racine.  $P$  peut-il avoir plus de trois racines ? Justifier.
- 2) Soit  $\alpha$  **une** racine de  $P$  et  $k$  est un réel non nul. Montrez que :  $\alpha$  est racine de  $P$  si et seulement si  $\alpha$  est racine de  $kP$  (où  $k$  est un réel non nul).

En déduire que, pour notre étude, on pourra considérer que  $a = 1$  et que  $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ .

- 3) On considère le polynôme  $Q$  défini par  $Q(x) = P(x - \frac{b}{3})$ . Montrez que le coefficient de degré 2 de  $Q$  est nul.

- 4) Montrez que si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors  $\alpha = \alpha + \frac{b}{3}$  est racine de  $Q$ . Déduisez-en que le polynôme  $Q$  a le même nombre de racines que  $P$ , et que chaque racine de  $P$  se déduit d'une racine du polynôme  $Q$  par l'addition d'un même nombre que l'on précisera.

Par la suite, on pourra supposer que  **$a = 1$  et  $b = 0$** . Notre étude peut alors se réduire aux polynômes qui s'écrivent sous la forme:  $P(x) = x^3 - cx - d$  où  $c$  et  $d$  sont des réels quelconques. (Nous verrons que cette écriture de  $P$  facilite l'expression des formules que l'on va obtenir dans les questions suivantes).

- 5) Montrez que si  **$c$  est négatif ou nul** alors  $P(x) = 0$  possède une unique solution.

*Indication : vous pourrez étudier les variations de  $P$  en déterminant le signe de  $P'(x)$*

- 6) On suppose que  **$c$  est strictement positif** et  $d$  positif (le résultat que nous allons obtenir se démontre pareillement lorsque  $d$  est négatif et sera admis)

- a) Etudiez les variations de  $P$  et montrez que  $P$  possède deux extremum atteints en

$$-\sqrt{\frac{c}{3}} \text{ et en } \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Montrez que  $P(\sqrt{\frac{c}{3}}) < 0$ . En déduire qu'il existe une solution strictement positive supérieure à  $\sqrt{\frac{c}{3}}$ .

- b) En déduire que :  $P(x) = 0$  a trois racines distinctes si et seulement si  $P(-\sqrt{\frac{c}{3}}) > 0$  c'est-

à-dire si et seulement si  $\frac{4c^3}{27} > d^2$  ou encore si et seulement si  $(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3 < 0$ .

## II. De la géométrie pour résoudre l'équation $x^3 = cx + d$ (où $c$ et $d$ sont des réels positifs)

A l'époque de Cardan, le symbolisme algébrique commence à peine à émerger. Par exemple, pour écrire  $2x^2 - 5x = 23$ , celui-ci écrit : « Duo quad,  $\overline{m}$  quinque reb. aequalis 23 ». Souvent les énoncés sont longs et parfois ambigus. Cette écriture symbolique\_ constitue un obstacle supplémentaire à la résolution d'équations.

Par contre, à son époque, on utilise beaucoup de figures géométriques pour la résolution de problèmes où l'inconnue est souvent la longueur d'un segment. Comme vous l'avez vu, le raisonnement de Cardan est fondé sur des considérations géométriques qui nous ont été décrites et que nous allons essayer de préciser plus rigoureusement.

1) Vérifier que ces trois parallélépipèdes ont un même volume égal à  $xyz$ . En déduire l'égalité :  $x^3 = 3xyz + y^3 + z^3$

2) Montrez que si  $y$  et  $z$  vérifient le système

$$(S) \begin{cases} yz = \frac{c}{3} \\ y^3 + z^3 = d \end{cases} \quad \begin{cases} yz = \frac{c}{3} \\ y^3 + z^3 = d \end{cases} \quad \text{alors } x = y + z \text{ est une solution de l'équation } x^3 = cx + d.$$

3) Trouvez un couple solution du système précédent.

*Indication* : vous pourrez procéder par substitution pour arriver à l'équation  $y^6 - dy^3 + \frac{c^3}{27} = 0$  et vous poserez  $Y = y^3$ .

4) En déduire qu'une solution de l'équation s'écrit :

$$\sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3}}.$$

Cette formule sera appelée par la postérité: « formule de Cardan ».

## III. Limites d'utilisation de la formule de Cardan

Dans le film, vous avez vu une famille de polynômes dont 5 est racine.

Nous avons essayé de voir si la formule de Cardan permet de calculer la valeur de la racine. Essayons de retrouver à quelle condition elle peut être utilisée.

1) Ecrivez la formule de Cardan pour trouver la valeur d'une racine de l'équation  $x^3 = 9x + 28$  (les calculs peuvent se faire à la main).

Faites de même pour l'équation :  $x^3 = 10x + 24$  (utilisez si besoin la calculatrice).

2) Essayez maintenant pour l'équation  $x^3 = 15x + 20$ .

3) Expliquez pourquoi, de façon générale, lorsque l'équation  $x^3 = cx + d$  (avec  $c$  et  $d$  positifs) admet trois solutions distinctes alors la formule de Cardan n'est pas applicable (vous pourrez utiliser le I.6).

En fait, Cardan nous avait mis en garde ... on ne peut pas toujours utiliser sa formule pour résoudre ce type d'équation mais uniquement lorsque « le cube de la troisième partie du nombre des choses [les inconnues] n'est pas plus grand que le carré de la moitié du nombre [la constante] de l'équation. »

- 4) Traduire cette condition en utilisant c et d et vérifier que pour les deux premières équations cette condition est vérifiée alors qu'elle ne l'est pas pour la troisième. Ce dernier cas correspond à ce que Cardan appelle le « cas irréductible ».

*On notera par  $\Delta$  la différence entre le cube de la troisième partie du nombre des choses [les inconnues] et le carré de la moitié du nombre [la constante] de l'équation..*

Même si la formule de Cardan n'est pas a priori utilisable pour  $x^3 = 15x + 4$ , nous pouvons, par lecture graphique, conjecturer qu'une des solutions est 4.

- 5) Vérifier que 4 est solution de l'équation  $x^3 = 15x + 4$ .  
 6) Montrer ensuite que:  $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$ , puis résoudre l'équation.  
 7) Peut-on trouver une méthode similaire pour résoudre  $x^3 = \frac{15}{49}x + \frac{4}{343}$  ?

### Activité 3

#### IV. Les trouvailles de Bombelli

Quelques années plus tard, le mathématicien Bombelli (1526-1572) écrit un ouvrage appelé *Algebra* qui reprend et approfondit les résultats de Cardan.

##### 1) La rencontre

Comme nous, tout à l'heure, il a « appliqué automatiquement » la formule de Cardan. Il nous raconte sa rencontre avec de nouvelles « quantités ». Lisez le attentivement:

*« j'ai trouvé une autre sorte de racine cubique d'expressions (...) très différente des autres. Celle-ci est issue du Cas sur le Cube du Tant<sup>3</sup>[l'inconnue] égal au Tant et à une Constante [c'est-à-dire  $x^3 = cx + d$ ], quand le cube du tiers du nombre de Tants est plus grand que le carré de la moitié de la Constante, comme cela va être démontré pour ce Cas. Cette sorte de racine carrée contient dans son algorithme de calcul, des opérations différentes des autres et a un nom différent, parce que, quand le cube du tiers du nombre de Tants est supérieur au carré de la moitié de la Constante, la racine carrée de leur différence ne peut s'appeler ni plus ni moins c'est pourquoi je l'appellerai plus que moins<sup>4</sup> [pdm] quand celle-ci devra être ajoutée et, quand elle devra être ôtée, je l'appellerai moins que moins<sup>5</sup> [mdm](...) Les situations où apparaissent cette sorte de racines sont bien plus nombreuses que celles où naît l'autre, cela apparaîtra à nombre d'entre vous plus **sophistiqué que réel**<sup>6</sup>. Moi aussi, j'ai eu une telle opinion jusqu'à ce que je trouve la rédaction de sa démonstration.*

- a) Dans le cas décrit par Bombelli, de quel signe est  $(\frac{d}{2})^2 - (\frac{c}{3})^3$  ?

<sup>3</sup> Bombelli appelle par « tant » ce que Cardan appelait « chose », c'est-à-dire l'inconnue de l'équation.

<sup>4</sup> Più di meno.

<sup>5</sup> Meno di meno.

<sup>6</sup> Surligné par nous.

A votre avis, pourquoi est-il impératif pour Bombelli d'appeler « la racine carrée de cette différence » par un autre nom ?

- b) Ce que Bombelli nomme « pdm Rq » , les mathématiciens du XVII<sup>ème</sup> et XVIII<sup>ème</sup> siècles le noteront par le **signe**  $\sqrt{-}$  ... (où les pointillés peuvent être remplacés par un nombre positif). Par exemple, lorsque Bombelli écrit « pdm Rq121 », les mathématiciens postérieurs l'écriront  $\sqrt{-121}$  et lorsqu'il écrit « mdm Rq121 » , ils l'écriront  $-\sqrt{-121}$  . Comment s'écrit la solution obtenue en utilisant la formule de Cardan ?

## 2) De comment traiter ces quantités sophistiquées

Bombelli donne ensuite sous forme de comptines les règles de multiplication concernant ce nouveau signe. En particulier, il donne trois règles qui vont être incontournables pour traiter avec ces nouvelles quantités. :

- a) Utilisez ces règles pour simplifier au maximum les calculs de la deuxième colonne.

Règles	Exemple
1) pdm <b>par</b> pdm donne moins	$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = \dots\dots\dots$
2) pdm <b>par</b> mdm donne plus	$\sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1}) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
3) mdm <b>par</b> mdm donne moins	$-\sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1}) = \dots\dots\dots$

La règle 1 semble être le prolongement d'une définition connue de tous. Pouvez-vous préciser laquelle ?

Vous connaissez depuis longtemps une propriété qui dit que la racine carrée d'un produit de deux nombres réels **positifs** s'obtient en multipliant les racines carrées de ces deux nombres. Elle est déjà connue par Bombelli qui dès le début de son *Algebra* nous la décrit rhétoriquement « Rq 2 via Rq 6 fa Rq 12 ».

De plus, il paraît naturel à Bombelli d'écrire que « pdm Rq 4 est 2 pdmRq1 », autrement dit :  $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$  .

Bien plus tard, le mathématicien Euler (1707-1783) reprend cette dernière affirmation concernant ces nouvelles quantités et dit:

*« Maintenant comme  $-a$  signifie autant  $+a$  multiplié par  $-1$ , et que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de  $a$  multipliée par  $-1$ , ou  $\sqrt{-a}$  est autant que  $\sqrt{a}$  multiplié par  $\sqrt{-1}$ . Or  $\sqrt{a}$  est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à  $\sqrt{-1}$ . Par cette raison donc,  $\sqrt{-4}$  est autant que  $\sqrt{4}$  multiplié par  $\sqrt{-1}$ , et autant que 2, à cause que  $\sqrt{4}$  égal à 2. Par la même raison  $\sqrt{-9}$  se réduit à  $\sqrt{9} \sqrt{-1}$ , ou à  $3\sqrt{-1}$  et  $\sqrt{-16}$  signifie  $4\sqrt{-1}$ . De plus comme  $\sqrt{a}$  multiplié par  $\sqrt{b}$  fait  $\sqrt{ab}$ , l'on aura  $\sqrt{6}$  pour la valeur de  $\sqrt{-2}$  multipliée par  $\sqrt{-3}$ . »*

- c1) Que se passe-t-il si l'on utilise les règles de Bombelli et les remarques d'Euler pour simplifier les écritures suivantes ? :

Avec Bombelli	Avec Euler
$(\sqrt{-1})^2 =$	$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{\dots \times \dots} =$
$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$ $= \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{3} = \dots$ $= (\sqrt{-1})^2 \sqrt{2 \times 3} = \dots$	$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \dots$

c2) Le signe  $\sqrt{-\dots}$  est-il adapté ?, Quelles règles sont valables ?

Euler, lui-même, se rend compte de cette insuffisance et proposera la notation  $i$  pour remplacer  $\sqrt{-1}$ . On utilisera dorénavant exclusivement la notation  $i$  (au lieu de  $\sqrt{-1}$  que l'on abandonnera totalement) : on a donc  $i^2 = -1$ .

Récapitulons : Le nombre noté pdm Rq 121 par Bombelli est noté plus tard par les algébristes du XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup>  $\sqrt{-121}$ , puis  $i\sqrt{121}$  par Euler. Ce nombre est encore noté  $11i$ . Il a pour carré  $-121$

b3) Compléter le tableau suivant en utilisant le tableau précédent avec cette nouvelle notation :

$\times$	1	-1	$i$	$-i$
1				
-1				
$i$				
$-i$				

b4) Simplifier les calculs ci-dessous :

$$i\sqrt{2} \times i\sqrt{3} \quad \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i$$

$$(2+i)(6+2i)$$

$$(3-i)(7-i)$$

$$(\sqrt{5}-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{5}i)$$

3) Retour sur notre équation :

Bombelli sait que l'équation  $x^3 = 15x + 4$  possède une solution évidente positive qui est 4. A l'aide des règles de multiplication qu'il a postulées, il va montrer que l'expression  $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$  est égale à 4.

Pour cela, il doit commencer par extraire **une** racine cubique de  $2 + \sqrt{-121}$ , c'est-à-dire, avec la nouvelle notation, de  $2 + i\sqrt{121}$   ~~$12= 2 + 11i$~~  $12i$ . Il va montrer qu'une racine cubique est  $2 + i$  en montrant que son cube est  $2 + 11i$ .

Avec la nouvelle notation, il va montrer que :  $2 + i\sqrt{121} = (2 + i)^3$

- Compléter ses calculs :

$$(\sqrt[3]{2+i\sqrt{121}})^3 = 2 + i\sqrt{121} = \dots \pm \dots i$$

$$(2+i)^3 = [(2+i)(2+i)](2+i) = [\dots](2+i)$$

$$= (\dots + \dots i)(2+i)$$

$$= \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$= \dots + \dots i$$

- Montrer de façon analogue que  $\sqrt[3]{2-i\sqrt{121}} = 2 - i$  et concluez.

- **Une seule racine cubique?**

Nous venons de voir que Bombelli a montré que  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ . Mais, si vous êtes coura-


geux, vous pouvez aussi montrer que :  $(\frac{-2 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3} - 1}{2})^3 = 2 + 11i$ .

En fait, avec les nouvelles quantités que nous venons de découvrir, tout nombre possède trois racines cubiques.

Par exemple,  $(-1)^3 = -1$  mais vous pouvez aussi vérifier que  $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = -1$ .





	<p style="text-align: center;"><b>IREM</b> <b>7- Compte-rendu(s) d'expérimentation au</b> <b>cours des mises en œuvre successives</b></p>	 The logo of IREM de Montpellier is circular. It features a stylized sun or gear-like symbol in the center. The letters 'I.', 'R.', 'E.', and 'M.' are arranged around the top of the circle, and 'de Montpellier' is written at the bottom. A small number '1' is positioned below the central symbol.
--	---	--

Bombelli, Rafael, *L'Algebra, Parte maggiore dell'Aritmetica divisa in tre libri*, Ex Libris Caroli Vigano, Bologna, 1622.

Cardan, Jérôme, *Le Grand art soit des Règles algébriques*, traduit pour la première fois du latin en français par Jean Peyroux, Librairie A. Blanchard, Paris, 2006.

Flament Dominique, *Histoire des nombres complexes*, CNRS Editions, Paris, 2009.

Hamon Gérard, *De la torture mentale aux images fractales*, APMEP, BV, Octobre 2003.

IREM, *Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris, 1998.

Etape	Date	Réalizations	Contributeurs