

Quelques repères historiques et épistémologiques sur les nombres complexes

Thomas Hausberger

8 octobre 2010

Nous suivons l'analyse de Artigue et Deledicq [A-D] et distinguerons quatre étapes charnières :

1. L'apparition des quantités imaginaires dans un algorithme opératoire de résolution des équations au XVI^e s. (Bombelli et les formules dites de Cardan)
2. Les quantités imaginaires comme outils de l'activité mathématique au XVIII^e s. (Leibniz, Bernoulli, de Moivre, Euler,...)
3. Les représentations géométriques au début du XIX^e s. (on retiendra la construction d'Argand)
4. Les constructions algébriques au XIX^e s. (Cauchy, Hamilton)

Etape 1 : Jérôme Cardan (1501-1576) publie en 1545 son « Ars Magna » dans lequel il donne des règles de résolution pour les équations qu'il classe. Parmi ces dernières figure « Du cube égal à des choses et à un nombre » : $x^3 = px + q$ en notation moderne.

En cherchant une solution sous la forme $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, on est amené à résoudre une équation du second degré en u , à savoir :

$$\left(u - \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

(Où l'on reste dans le domaine réel)

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \underline{28} + \underline{9x} \\
 x &= \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \\
 x^3 &= \underbrace{u + v}_{\downarrow} + 3 \underbrace{\sqrt[3]{uv}}_{\downarrow} (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) \\
 u^2 - \underline{28u} + \underline{3^3} &= 0 \\
 14^2 - 3^3 &= 196 - 27 = 169 = 13^2 \\
 (u - \underline{14})^2 &= \underline{13^2} \\
 u - \underline{14} &= \text{p.} \underline{13} && \text{p pour piu (+)} \\
 v - \underline{14} &= \text{m.} \underline{13} && \text{m pour meno (-)} \\
 \text{or } \underline{14 \text{ p } 13} &\text{ est le cube de } \underline{2 \text{ p. } 1} \\
 \text{et } \underline{14 \text{ m } 13} &\text{ est le cube de } \underline{2 \text{ m. } 1} \\
 x &= \underline{2 \text{ p. } 1} + \underline{2 \text{ m. } 1} = \underline{4}
 \end{aligned}$$

Ce document mélange les notations anciennes et modernes. Cette méthode est basée sur l'égalité $(y + z)^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z)$ qui était obtenue géométriquement en découpant le volume d'un cube. (Le calcul de la racine cubique est présenté de la sorte pour mettre en évidence l'extension des opérations opérée par Bombelli, voir plus loin).

Lorsque $(\frac{p}{3})^3 > (\frac{q}{2})^2$, le carré de $u - \frac{q}{2}$ devrait être un nombre négatif. C'est le cas pour $q = 104$ et $p = 51$ où l'on devrait alors prendre la racine carrée de -47^2 . Voici ce qu'en écrit Raphaël Bombelli (1526-1572) :

Cette sorte de racine carrée a pour algorithme des opérations fort différentes des autres et a un nom différent ; car, lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé plus de moins (piu di meno) quand il a été ajouté, et quand il a été retranché il sera appelé moins de moins (meno di meno).

Avec ces *pdm* et *mdm*, Bombelli effectue les calculs comme si on restait dans le domaine des nombres habituels et aboutit au résultat $x = 8$, qui est effectivement racine de l'équation.

(où l'on transite dans le domaine complexe)

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \underline{104} + \underline{51} x \\
 x &= \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \\
 x^3 &= \underline{u} + \underline{v} + 3 \sqrt[3]{uv} (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) \\
 u^2 - \underline{104} u + \underline{17^3} &= 0 \\
 52^2 - 17^3 &= 2704 - 4913 = -2209 = -47^2 \\
 (u - \underline{52})^2 &= \underline{-47^2} \\
 u - \underline{52} &= \text{p.d.m.47} && \text{piu di meno} \\
 v - \underline{52} &= \text{m.d.m.47} && \text{meno di meno} \\
 \text{or } \underline{52 \text{ p.d.m.47}} &\text{ est le cube de } \underline{4 \text{ p.d.m.1}} \\
 \text{et } \underline{52 \text{ m.d.m.47}} &\text{ est le cube de } \underline{4 \text{ m.d.m.1}} \\
 x &= \underline{4 \text{ p.d.m.1}} + \underline{4 \text{ m.d.m.1}} = \underline{8}
 \end{aligned}$$

La méthode de résolution fonctionne donc encore malgré le carré négatif, à condition d'introduire les règles de calculs suivantes sur les *pdm* et *mdm* :

piu di meno via piu di meno fa meno
meno via piu di meno fa piu di meno
 ...

Commentaires épistémologiques :

- La formule de Cardan soulèvent un *problème cognitif* : elle donne la racine réelle lorsqu'elle est unique (cas $\Delta > 0$ où $\Delta = 4p^3 + 27q^2$) mais perd son sens dans le cas $\Delta < 0$ alors que l'on sait qu'il y a 3 racines réelles. (Hölder montrera plus tard, en 1892, qu'il n'y a pas de formule générale permettant d'exprimer ces racines réelles en fonction de p et q par des formules utilisant uniquement les opérations usuelles de l'arithmétique et l'extraction de racines réelles). L'équation de degré 2 ne posait pas de problème cognitif.
- Ce ne sont pas des nouveaux nombres qui apparaissent, mais des *opérateurs*, de façon analogue à ce qui s'est passé pour les nombres négatifs : les signes + et - ont d'abord désigné des opérations. Lorsque l'on tombe sur $(4 + 6) + (4 - 6)$, on affirme la *permanence des opérations arithmétiques* (de « l'algorithme des opérations » pour parler comme Bombelli) et donne encore 8 pour résultat, comme $(4 + 1) + (4 - 1) = 8$. Cette volonté de ne pas introduire l'objet -6 isolé va perdurer longtemps : dans « La géométrie de position » de Carnot, en 1803 :

De là je conclus , 1° que toute quantité négative isolée est un être de raison, et que celles qu'on rencontre dans le calcul ne sont que de simples formes algébriques, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective. 2°. Que chacune de ces formes algébriques étant

prises, abstraction faite de son signe, n'est autre chose que la différence de deux quantités absolues, dont celle qui était la plus grande dans le cas sur lequel on a établi le raisonnement, se trouve la plus petite dans le cas auquel on veut appliquer les résultats du calcul.¹

Chez Bombelli, on tombe de façon analogue sur $(4pdm1) + (4mdm1)$, cependant il a fallu étendre les opérations aux imaginaires, ce qui nécessite davantage de hardiesse et d'habileté que pour \mathbb{Z} . Un peu plus tard, on pourra lire chez Arguand :

La règle des "lignes", selon Argand (1806)

Or on n'écrit pas $+1.a$, $--1.a$, mais simplement $+a$, $-a$, et le signe qui précède a indique lui-même quelle espèce d'unité exprime ce nombre. On peut donc employer un moyen semblable relativement aux quantités imaginaires, en écrivant, par exemple, $\sim a$ et $\vdash a$, au lieu de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, les signes \sim et \vdash étant positifs et négatifs réciproques.

Pour la multiplication de ces signes, on observera que, multipliés par eux-mêmes, ils donnent $-$, et que, par conséquent, multipliés l'un par l'autre, ils donnent $+$. On peut, d'ailleurs, établir une règle unique pour tous les signes, qui s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Qu'on affecte la valeur 2 à chacun des traits droits, soit perpendiculaires, soit horizontaux, qui entrent dans les signes à multiplier, et la valeur 1 à chacun des traits courbes : on aura, pour les quatre signes, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \sim &= 1, \\ - &= 2, \\ \vdash &= 3, \\ \div &= 4. \end{aligned}$$

Cela posé, on prendra la somme de la valeur de tous les facteurs, et l'on en retranchera autant de fois 4 qu'il sera nécessaire pour que le reste soit un des nombres 1, 2, 3, 4; ce reste sera la valeur du signe du produit; et pareillement, pour la division, on retranchera la somme des traits du diviseur de celle des traits du dividende, à laquelle on aura ajouté, s'il le faut, un multiple de 4, et le reste indiquera le signe du quotient. Il est à remarquer que ces opérations sont des multiplications et divisions par logarithmes; cette analogie se mettra dans un plus grand jour.

En termes modernes, il s'agit de l'isomorphisme $(\{\pm 1, \pm i\}, \times) \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

- Un moteur de cette apparition des complexes est ce que Hilbert appellera plus tard *l'axiome de résolubilité* : la conviction de la résolubilité de chaque problème mathématique est une invitation forte pour le mathématicien au travail. Péano présentera en 1910 dans son article « fondations de l'analyse » l'extension successive des nombres à \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} comme née de la nécessité de résoudre des équations du type $x + 1 = 0$, $2x = 1$, $x^2 = 2$, $x^2 = -1$.

Le théorème fondamental de l'algèbre a été énoncé pour la première fois par Girard en 1629 dans son « Invention nouvelle en algèbre » :

"Toutes les équations d'Algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, excepté les incomplètes."

(Mais il ne dit pas où vivent les racines et pense que l'absence de certains coefficients peut provoquer la disparition corrélative de racines).

- Les complexes apparaissent d'abord dans l'histoire en tant qu'outils : ce sont des symboles support du calcul, aucun objet nouveau n'apparaît (l'équation à résoudre a ses coefficients réels et la solution est réels, les complexes ne sont que des intermédiaires de calcul). La logique de l'enseignement est différente : ils sont d'abord définis comme objets, en s'appuyant sur la géométrie (l'histoire montrera que leur interprétation géométrique a grandement contribué à leur conférer le statut d'objet, voir phase 3). On met ensuite l'accent sur leur rôle d'outil performant pour la trigonométrie et la géométrie dans le plan.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Géométrie plane : nombres complexes		
<p>Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes.</p> <p>Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient.</p> <p>Écriture $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.</p>	<p>Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques.</p> <p>On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous-jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z = z_0 + re^{i\theta}$ ou $x = x_0 + r \cos \theta$, $y = y_0 + r \sin \theta$).</p> <p>La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i \sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.</p>	<p>La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe.</p> <p>L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie.</p> <p>On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique.</p> <p>Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.</p>
<p>Résolution dans \mathbb{C} des équations du second degré à coefficients réels.</p>		
<p>Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$.</p>	<p>On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.</p>	<p>On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transformations du plan.</p>

Etape 2 : Progressivement, la confiance s'installe dans l'utilisation des quantités imaginaires, dans la mesure où leur manipulation ne conduit pas à des contradictions. Cette manipulation continue d'être gérée par le *principe de permanence*, énoncé par Leibniz, qui consiste à appliquer simplement à ces quantités les règles du calcul ordinaire.

Mais le principe de permanence conduit également à des paradoxes et controverses, comme celle entre Leibniz et Bernoulli qui désirent tous les deux étendre le logarithme, en relation avec le calcul de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\int \frac{dx}{x - \sqrt{-1}} - \int \frac{dx}{x + \sqrt{-1}} \right).$$

Le raisonnement de Bernoulli : on a $(-a)^2 = a^2$ pour tout nombre positif, donc

$\ln(-a)^2 = \ln(a^2)$, ou encore $2 \ln(-a) = 2 \ln(a)$, d'où $\ln(-a) = \ln(a)$ et en particulier $\ln(-1) = \ln(1) = 0$.

Leibniz objecte que si on avait $\ln(-1) = \ln(1)$ alors on aurait en passant à l'exponentielle (puisque $e^{\ln(x)} = x$) $-1 = 1$ ce qui est absurde.

[Aujourd'hui, on mettrait en cause la règle $\ln(x^2) = 2 \ln x$]. Ce genre de crises aboutit à une rupture épistémologique : avant la rupture, on étend le champ d'application des règles à de nouveaux objets. Après la rupture, on a des objets et on précise les règles auxquels ils sont soumis.

Euler conclura en 1749 :

Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes semblait embarrassée, ne subsistent qu'en tant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparaître toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes...

Il identifie donc un problème de non-fonctionnalité qui aboutira à la notion de logarithme comme fonction multiforme ($e^z = a$ possède une infinité de solutions z).

En revanche, l'extension aux complexes de l'exponentielle et des fonctions trigonométriques n'ont pas posé problème. Euler fait le lien entre la trigonométrie sphérique et hyperbolique, par un argument d'analyse infinitésimale :

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc ζ infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i , afin d'obtenir pour $i\zeta$ une valeur finie v ; nous aurons donc $n\zeta = v$, & $\zeta = \frac{v}{i}$, & par conséquent $\sin. \zeta = \frac{v}{i}$, & $\cos. \zeta = 1$; ces substitutions faites donne-

$$\text{ront } \cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \text{ \& } \sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Or dans le Chapitre précé-

dent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{\zeta}{i}\right)^i = e^\zeta$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour ζ , d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura $\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$.

A cette époque, les nombres complexes commencent donc à se constituer comme objets dans l'univers mathématique :

- ils sont désignés dans les traités par une appellation spécifique (quantités imaginaires) et associés à l'écriture $a + b\sqrt{-1}$;
- on énonce certaines de leurs propriétés et des résultats mathématiques qui les mettent en jeu de manière incontournable;
- on se pose le problème de l'extension à ces quantités imaginaires de certaines fonctions usuelles.

Etape 3 : Euler écrit dans ses « Eléments d'alèbre » parus en 1768 :

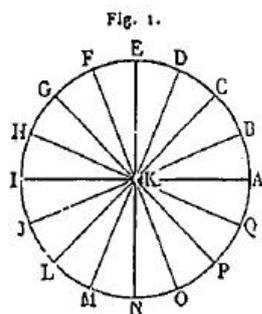
Or, puisque tous les nombres qu'il est possible d'imaginer, sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou font 0 même, il est clair qu'on ne peut pas compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, & il faut donc dire que c'est une quantité impossible.

De même, Cauchy adopte a ce stade une conception totalement nominaliste des nombres complexes : ce sont des symboles vides de sens.

"En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. [...] En général, on appelle quantité imaginaire toute expression symbolique de la forme : $a + b\sqrt{-1}$, a , b désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires : $a + b\sqrt{-1}$ et $a' + b'\sqrt{-1}$ sont égales entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1° entre les parties réelles a et a' , 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir, b et b' . [...] Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles."

La « prise de sens » des nombres complexes va s'effectuer dans le cadre géométrique, à travers notamment les travaux de Jean-Robert Argand (1768-1822). Ce dernier part du concept de lignes dirigées, qui donnera nos vecteurs modernes. Il dit que les lignes dirigées \overline{KA} et \overline{KB} sont dans les mêmes rapports que les lignes dirigées \overline{KC} et \overline{KD} (il note $\overline{KA} : \overline{KB} :: \overline{KC} : \overline{KD}$) si $\frac{KA}{KB} = \frac{KC}{KD}$ et si les angles (orientés) \overline{AKB} et \overline{CKD} ont même mesure. Lorsque c'est vérifié et que la ligne \overline{KA} correspond au nombre $+1$, alors la relation de proportionnalité peut s'écrire $\overline{KB} \cdot \overline{KC} = \overline{KD}$, ce qui permet de définir le produit de lignes dirigées. Rechercher la ligne dirigée x satisfaisant $+1 : x :: x : -1$ s'écrit $x^2 = -1$. Il trouve ainsi la ligne orientée qui correspond au nombre $+\sqrt{-1}$:

4. Or, si l'on prend un point fixe K (fig. 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A , ce qu'on pourra désigner par \overline{KA} , pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, ...



6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{KP} , ..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

... En effet, la direction de \overline{KA} est, à l'égard de la direction de \overline{KE} , ce que cette dernière est à l'égard de la direction de \overline{KI} . De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par \overline{KN} que par \overline{KE} , ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1 , ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

...

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des lignes *absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction (*).

L'addition des lignes dirigées se définit par la règle du parallélogramme (addition de deux vecteurs). On peut donc définir tout nombre complexe à partir de $+1$ et $+\sqrt{-1}$. On vérifie enfin que la multiplication des lignes reflète bien l'opération sur les nombres. Une ligne dirigée est caractérisée par sa longueur et sa direction, qui correspondront au module et à l'argument du nombre complexe.

Commentaires épistémologiques :

- L'apport d'Arguand est donc un changement de cadre, ou plutôt la création d'un nouveau cadre : le cadre vectoriel
- Arguand propose une nouvelle représentation mentale, mais celle-ci a du mal à être acceptée. D'une part, le concept nouveau n'apporte rien dans la mesure où il ne permet pas d'en faire plus qu'avant, même s'il permet de le faire autrement (c'est un obstacle récurrent dans l'histoire des mathématiques, on le retrouve de nos jours concernant l'analyse non standard). D'autre part, on se méfie des représentations : Lagrange, dont la « Mécanique Analytique » de comporte aucune figure, écrit que : *Les figures ne sont pas nécessaires à l'entendement que d'ailleurs, elles contribuent souvent à troubler*. Arguand souligne le confort apporté par cette représentation dans la preuve qu'il donne du théorème fondamental de l'algèbre en 1813 :

J'inviterai le lecteur à tracer une figure, pour suivre cette démonstration. En y appliquant les principes fondamentaux très simples rappelés ci-dessus, on verra que, à l'exception du développement (A), qui suppose un calcul algébrique, tous les autres raisonnements se font, pour ainsi dire, à vue, sans avoir besoin d'aucun effort d'attention.

Il s'appuie sur un dessin pour donner à voir que $P(z)$ ne peut atteindre un minimum si celui-ci n'est pas nul.

Etape 4 : la prise de sens permise par la représentation géométrique s'élargit au cadre algébrique, qui est le cadre d'origine des complexes.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) publie en 1847 son « Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques substituées à la théorie des imaginaires ». Il expose ses motivations dans la préface :

"J'avais considéré les équations imaginaires comme des formules symboliques, c'est à dire comme des formules qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces formules, ou les symboles qu'elles renferment.

Cela posé, il n'y avait plus nulle nécessité de se mettre l'esprit à la torture pour chercher à découvrir ce que pouvait représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, auquel les géomètres allemands substituent la lettre i . Ce signe ou cette lettre était, si je puis ainsi m'exprimer, un outil, un instrument de calcul dont l'introduction dans les formules permettait d'arriver plus rapidement à la solution très réelle de questions que l'on avait posées. Mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires et la lettre i elle-même, à n'être plus que des quantités réelles."

Sa construction est celle exposée en L3 : il s'agit de considérer $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ (dans notre formalisme moderne) dont les éléments sont des classes d'équivalences pour la relation de congruence modulo $x^2 + 1$. Le lien avec la notation $a + ib$ se fait en substituant i à la variable x dans le reste de la division euclidienne par $x^2 + 1$.

William Rowan Hamilton (1805-1865) propose une autre construction, à partir de sa « Theory of conjugate functions, or algebraic couples » (1833) :

"I was led [...] to regard every single number (a) as being a degenerate form of such a couple, namely of $(a,0)$."

"The spirit of the whole theory of couples led me to conceive that, for such a product, we ought to have an expression of the form,

$$(0, a_1)(0, a_2) = (\gamma_1 a_1 a_2, \gamma_2 a_1 a_2) ;$$

The coefficients γ_1 et γ_2 being some two constants numbers, independant of the number a_1 et of the step a_2 ; which two coefficients I proposed to call the constants of multiplication. These constants might be variously assumed ; but reasons were given for adopting the following selection of values, as the basis of all subsequent operations :

$$\gamma_1 = -1 ; \gamma_2 = 0."$$

Et Hamilton conclut :

Dans la théorie des nombres simples, le symbole $\sqrt{-1}$ est absurde, mais dans la théorie des couples le même symbole a du sens, et indique une extraction possible, ou un couple réel, à savoir la racine carrée principale du couple $(-1, 0)$. Dans cete dernière théorie, on peut donc employer le signe $\sqrt{-1}$, bien qu'on ne le puisse pas dans la première ; et nous pouvons écrire si nous le voulons, pour un couple (a_1, a_2) quelconque, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$

Commentaires épistémologiques :

- Les efforts de Cauchy et de Hamilton vont dans le sens d'une mise en forme symbolique. Ce ne sont plus des quantités imaginaires liées à la résolution d'équations numériques mais des objets algébriques (cf les constructions précédentes : des restes de division euclidienne de polynôme ou des couples) qui ne sont qualifiés de « nombres » que parce qu'ils sont susceptibles de calculs.
- Mais les traités de Cauchy et Hamilton montrent que l'objet qui accède ainsi au stade formel (cela préfigure la naissances des mathématiques contemporaines) conserve l'ensemble de ses signifiants. Cette multiplicité de sens contribue à donner du sens au formalisme.

Références

- [A-D] MICHÈLE ARTIGUE ET ANDRÉ DELEDICQ, « *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques.* », Cahier de Didirem n°15, IREM de Paris VII, 1992.
- [C2I-2] COMMISSION INTER-IREM EPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, « *Images, Imaginaires, Imagination, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes* », Ellipses, 1998.