



**HAL**  
open science

## La démonstration : limites et fondements

Thomas François, Christophe Pointier, Cédric Vergnerie, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Thomas François, Christophe Pointier, Cédric Vergnerie, Thomas Hausberger. La démonstration : limites et fondements. 2014. hal-02318395

**HAL Id: hal-02318395**

**<https://hal.science/hal-02318395>**

Submitted on 17 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equipe IREM Mathématiques et Philosophie<sup>1</sup>

IREM de Montpellier

<http://www.irem.univ-montp2.fr/Mathematiques-et-Philosophie>



1. Fiche d'identification
2. Les objectifs et les prérequis
3. Scénario d'usage
4. Le document support : dossier élève
5. Fiches professeurs
6. Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives
7. Bibliographie
8. Evolution de la ressource

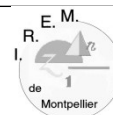
<sup>1</sup> Manuel Bächtold, Thomas François, Daniel Guin, Dominique Guin, Thomas Hausberger, Véronique Pinet, Christophe Pointier, Henri Reboul, Jean Sallantin. Responsables : Thomas Hausberger ([thomas.hausberger@umontpellier.fr](mailto:thomas.hausberger@umontpellier.fr)) et Manuel Bächtold

**IREM**  
**1- Fiche d'identification**



<b>Disciplines</b>	Mathématiques et Philosophie	
<b>Thème</b>	La démonstration	
<b>Niveau</b>	Terminales Scientifiques	
<b>Cadre</b>	Cours de philosophie	
<b>Objectifs et prérequis</b>	Interroger la nature des vérités obtenues par démonstration à partir des limites d'une telle procédure : tout n'est pas démontrable, une démonstration repose donc nécessairement sur des choses non démontrées. Voir ci-dessous pour plus de détails (2).	
<b>Modalités pratiques de déroulement</b>	<b>Durée</b>	2 heures
	<b>Equipement spécifique</b>	Vidéo projecteur
<b>Dispositifs pédagogiques</b>	Activité proposée aux élèves durant le cours de philosophie, en présence du professeur de mathématiques.	
<b>Description de l'activité</b>	En géométrie plane, un réseau déductif constitué de quelques propositions est le point de départ d'une discussion avec la classe pour interroger les limites, les conditions et la vérité des démonstrations. Le fait problématique qui sera mis en avant est l'impossibilité de tout démontrer. La discussion peut s'initier à partir d'une question ouverte ou des questions de guidage qui sont proposées.	
<b>Fichiers constitutifs de la ressource</b>	ressource_IREM-la_demonstration.pdf la_demonstration-fiche_eleves1.pdf la_demonstration-fiche_prof1.pdf	

<b>Mots-clés</b>	Démonstration Régression à l'infini Scepticisme/dogmatisme Intuitif/discursif Croire/savoir Origine/fondement Vérité/validité
<b>Auteurs</b>	Thomas François, Christophe Pointier, Cedric Vergnerie



Une opinion partagée par de nombreux élèves de terminale scientifique est celle, favorable, dont bénéficie la démonstration. Cette opinion fait écho à un point de vue défendu par certains philosophes : ainsi Descartes, relatant ses études au Collège de la Flèche, oppose-t-il l'enseignement des lettres, au terme duquel il se trouve « embarrassé de tant de doutes et d'erreurs », sans épargner la philosophie où il ne s'y trouve « aucune chose dont on ne dispute », et l'enseignement des mathématiques auquel il se plaisait « à cause de la certitude et l'évidence de leurs raisons<sup>2</sup> ». Si les propositions mathématiques peuvent être tenues pour vraies de manière « ferme et solide », au contraire des arguties philosophiques, c'est qu'elles procèdent de façon déductive. Elles fournissent ainsi les raisons d'une conclusion que l'on pourra justifier et mettre à l'épreuve d'une vérification rigoureuse.

La **finalité** de la séance est de problématiser cette opinion, en interrogeant les limites et les conditions d'une démonstration :

Le « fait problématique » sur lequel nous avons choisi de nous appuyer est l'impossibilité de tout démontrer. Toute démonstration repose sur des choses non démontrées. Nous devons nécessairement admettre certains énoncés qui servent de règle et de base, donc de points de départ, de principes, pour le raisonnement (définitions, axiomes ou postulats). Ce qui fait que la vérité des propositions démontrées est relative : elle est suspendue à celle, supposée, des premiers énoncés.

La question se porte alors sur les fondements : ce qui vient en premier et dont on peut tirer la suite par déduction. Fonder c'est, pour Descartes, s'assurer de la vérité des premiers énoncés de telle sorte que tout repose sur des choses indubitables<sup>3</sup>. Or cette entreprise pose problème : peut-on s'assurer de la vérité des fondements, ou bien ne sommes nous pas réduits à « tenir pour vrai » ce que nous croyons le plus, et davantage ne faut-il pas renoncer à chercher des vérités premières ?

Le but n'est pas de présenter cette analyse critique telle quelle. Il s'agit de la faire apparaître comme un problème, en étudiant avec les élèves un réseau déductif constitué de quelques propositions. On mesurera la force ou l'importance de ce problème en cherchant et en examinant des solutions possibles.

Pour cela, le moyen tout indiqué est la géométrie plane :

D'une part l'analyse critique sera ainsi menée de front : en abordant le système Euclidien qui, très longtemps, est passé pour le modèle d'une vérité incontestable (et il l'est encore dans l'esprit des élèves). C'est avec les *Eléments* que les mathématiques sont entrées dans « la voie sûre d'une science<sup>4</sup> ». L'attention se porte sur l'élucidation des principes et le caractère strictement démontrable

2 Descartes, *Discours de la méthode*, Partie I.

3 Le travail de fondation consiste alors à mettre à jour des vérités premières à partir d'un travail d'analyse qui précède la synthèse déductive. Ainsi les Méditations Métaphysiques commencent par mettre à jour le « cogito » duquel est tiré un critère de vérité et sur la base duquel est reconstruit l'ensemble des connaissances.

4 Kant, *Critique de la raison pure*, Préface à la deuxième édition.

(déductible) des propositions. Les principes apparaissent comme des vérités évidentes, saisies de manière intuitive, par une « lumière naturelle » : simples, clairs et distincts.

D'autre part l'attention sera portée sur le 5ème Postulat d'Euclide, ou Postulat des parallèles<sup>5</sup>. En effet, les travaux des mathématiciens nous apprennent à ne pas croire trop fermement ce qui se présente comme évident. Ils montrent l'utilité d'une analyse logique ou formelle, à la fois pour contrôler les propositions qui semblent évidentes et pour inventer de nouvelles propositions. Les tentatives pour démontrer le 5ème Postulat se révélèrent toutes infructueuses jusqu'à ce que l'échec des raisonnements par l'absurde, ne débouchant sur aucune contradiction apparente, conduise à admettre des propositions contraires à l'intuition, et à construire de nouvelles géométries.

Après un travail de recherche et de rédaction d'une démonstration, les **points essentiels**, mis en avant, seront les suivants :

- revenir sur la définition de la démonstration et montrer que toute démonstration requiert des hypothèses et donc s'inscrit dans un réseau déductif de propositions<sup>6</sup> ;

- faire apparaître l'impossibilité de tout démontrer, pour plusieurs raisons, en examinant les énoncés du réseau déductif proposé aux élèves : certains se présentent comme des définitions, d'autres comme des axiomes ou des postulats, d'autres pourraient faire l'objet d'une démonstration, mais il faudrait pour cela mobiliser de nouveaux outils et ainsi introduire de nouveaux énoncés sur lesquels s'appuyer, et ceci à l'infini (ce dernier argument, développé par les sceptiques, est celui d'une « régression à l'infini » : il est présenté plus en détail dans les fiches professeur 1 et 2) ;

- expliquer ainsi la nécessité de s'appuyer sur des propositions premières, appelées principes en philosophie, définitions, axiomes ou postulats en mathématiques ; propositions qui ne sont pas démontrées mais admises, et qui servent de bases ou fondements pour les déductions des théorèmes ;

- interroger la valeur et la signification de ces propositions premières (est-il possible de s'appuyer des vérités premières et *absolument* certaines, ou doit-on considérer les principes comme de simples hypothèses, utiles en tant qu'elles déterminent les règles et les bases du raisonnement, mais susceptibles d'être interrogées ou modifiées ?) ;

- attirer l'attention sur le 5ème Postulat d'Euclide, mais aussi préparer sa remise en question, et dans le même temps, la remise en question d'un fondement intuitif, ce qui conduira à abandonner l'idée de vérité pour celle de validité.

Il est nécessaire, **avant de commencer l'activité**, que la définition et l'importance de la démonstration aient été exposées en cours de philosophie :

- démontrer, ce n'est pas se contenter de constater les faits ou d'observer les choses, mais se donner les moyens d'établir la vérité et la nécessité d'une conclusion ;

- la coïncidence, dans l'antiquité grecque, entre le développement d'une mathématique proprement théorique et la naissance de la philosophie n'est pas fortuite : la philosophie soutient cet effort de

5 Celui-ci est connu sous sa formulation moderne : par un point extérieur à une droite il passe une et une seule parallèle à cette droite.

6 Au sens général d'énoncé (ce peut être un axiome ou un théorème)

théorisation, et trouve aussi dans les mathématiques le modèle d'une vérité qui s'établit par voie de raisonnement, et dont la rigueur permet d'échapper aux incertitudes de l'opinion.

Les **repères du programme de philosophie** ne sont pas prévus pour faire l'objet d'un questionnement à part entière, en se demandant, par exemple, qu'est-ce que l'intuition ou l'origine, et les définitions paraîtront de ce fait incomplètes. Ces documents ont un caractère opératoire. Ce sont des outils donnés aux élèves pour les aider à construire leur réflexion, en formulant de manière précise quelques problèmes que rencontrent les mathématiciens dans leurs tentatives de démonstrations.

### **Extraits du programme de philosophie de séries générales que cette activité aborde :**

« L'enseignement de la philosophie en classes terminales a pour objectif de favoriser l'accès de chaque élève à l'exercice réfléchi du jugement (...) l'exercice du jugement n'a de valeur que pour autant qu'il s'applique à des contenus déterminés et qu'il est éclairé par les acquis de la culture ».

« L'étude méthodique des notions est précisée et enrichie par des repères auxquels le professeur fait référence dans la conduite de son enseignement (...) La maîtrise de ces distinctions permettra au candidat de mieux comprendre le sens et la portée d'un problème et de construire sa réflexion pour le traiter ».

### Extraits du programme de mathématiques de terminale S que cette activité aborde :

« Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal ».

« Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts »

Etapes	Objectifs	Supports	Procédés
<p><b>1. Travail préparatoire</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- par les élèves</li> <li>- à la maison</li> <li>- moins d'1 heure</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Prise de connaissance du dossier élève et des questions qui seront posées</li> </ul>	<p>Dossier élève comprenant :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- l'organigramme des propositions (fiche élèves 1)</li> <li>- les distinctions conceptuelles (fiche élèves 2)</li> <li>- les questions posées (fiche élèves 3)</li> </ul> <p>- pour le <i>scénario alternatif (voir 3bis)</i> : le texte de Pascal et des questions (fiche élèves 4)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lecture active (souligner, prendre des notes dans la marge)</li> <li>- Eventuellement préparer les questions 1 et 2</li> </ul>
<p><b>2. Activité mathématique et travail de définition</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- par les élèves, le professeur de mathématique et le professeur de philosophie</li> <li>- en cours</li> <li>-1 heure</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définir ce qu'est une démonstration et montrer qu'elle s'inscrit dans un système de propositions</li> <li>- Montrer les limites et les conditions d'une démonstration : impossibilité de tout démontrer et nécessité de s'appuyer sur des choses non démontrées</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Organigramme des propositions (fiche élèves 1)</li> <li>- les questions posées (fiche élèves 3, questions 1 à 5)</li> <li>- Fiche professeur 1</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Exercice (démontrer une proposition)</li> <li>- Questions précises</li> </ul>
<p><b>3. Réflexion philosophique</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- par les élèves, le professeur de philosophie et éventuellement le professeur de mathématique</li> <li>- en cours</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Interroger l'idée que la démonstration nous assure de la vérité d'une proposition</li> <li>- Faire apparaître plusieurs positions philosophiques : le scepticisme, le rationalisme cartésien, le formalisme mathématique</li> <li>- Utiliser les distinctions</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Organigramme des propositions (fiche élèves 1)</li> <li>- Distinctions conceptuelles (fiche élèves 2)</li> <li>- les questions posées (fiche élèves 3, question 6)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problématiser une idée</li> <li>- Question ouverte et discussion</li> <li>- Les élèves peuvent être aiguillés par la relecture des distinctions</li> </ul>



- 1 heure	conceptuelles	- Fiche professeur 2	conceptuelles
<p><b>Scénario alternatif :</b></p> <p><b>3bis. Réflexion philosophique</b></p> <p>- par les élèves, le professeur de philosophie et éventuellement le professeur de mathématique</p> <p>- en cours</p> <p>- 1 heure</p>	<p>- Interroger l'idée que la démonstration nous assure de la vérité d'une proposition</p> <p>- Faire apparaître plusieurs positions philosophiques : le scepticisme, le rationalisme cartésien, le formalisme mathématique</p> <p>- Utiliser les distinctions conceptuelles</p>	<p>- Organigramme des propositions (fiche élèves 1)</p> <p>- Distinctions conceptuelles (fiche élèves 2)</p> <p>- le texte de Pascal et ses questions (fiche élèves 4)</p> <p>- Fiche professeur 2</p>	<p>- Problématiser une idée</p> <p>- Questions et discussion</p> <p>- Les élèves peuvent être aiguillés par la relecture des distinctions conceptuelles</p> <p>- la discussion s'appuie sur l'analyse en classe du texte de Pascal</p>

	<b>IREM</b> <b>4- Le document support :</b> <b>Dossier élève</b>	
--	--	---

Le dossier élève comprend :

- l'organigramme ou système de propositions qui seront étudiées (fiche élèves 1) ;
- les distinctions conceptuelles qui doivent servir d'outils pour la réflexion (fiche élèves 2) ;
- les questions qui seront posées aux élèves (fiche élèves 3) ;
- pour le *scénario alternatif* le texte de Pascal et des questions (fiche élèves 4)

Ce dossier sera distribué aux élèves avant le cours. Il leur sera demandé d'en faire une lecture attentive (souligner les points importants, prendre des notes dans la marge). Bref, ils devront en avoir pris connaissance. Les réponses aux questions 1 et 2 peuvent éventuellement leur être demandées.

Pour le *scénario alternatif* (Fiche élèves 4), les élèves répondront au moins aux questions 1 et 2

## **Fiche élèves 1 : Activité démonstration**

Voir fichier [la\\_demonstration-fiche\\_eleves1.pdf](#)

## Fiche élèves 2 : Repères philosophiques

### **Croire / Savoir**

Croire et savoir sont deux formes d'adhésion ou de conviction. Croire signifie tenir quelque chose pour vrai, mais de façon subjective : personnelle ou collective la croyance manque de preuves suffisantes. Savoir signifie tenir quelque chose pour vrai, mais de façon objective, en s'appuyant sur des preuves. La croyance se distingue donc du savoir par son manque de fondement.

Mais le rapport entre croire et savoir n'est pas aussi simple. La croyance est en quelque sorte un premier degré de savoir, non vérifié, mais qui peut s'avérer vrai. Et le savoir humain ne peut, peut être pas, se passer de certaines croyances ou présupposés. Faut-il donc opposer radicalement croire et savoir comme deux attitudes incompatibles ? Ou bien faut-il les penser dans un rapport de progression, voire de complémentarité ?

### **Intuitif / Discursif**

Ces termes indiquent deux modes de connaissance. Ce qui est intuitif est saisi directement, sans raisonnement. Les choses sont « senties » ou « vues d'un seul coup ». On peut faire preuve de « flair » ou avoir une « illumination ». Est discursif, au contraire, ce qui est saisi par le discours et le raisonnement. Il s'agit de procéder étape par étape, chaque idée étant déduite d'une idée précédente en respectant des règles logiques.

La science valorise la méthode discursive. Cependant les principes, puisqu'ils sont premiers, ne peuvent pas être connus par démonstration. Certains sont considérés comme directement évidents, car simples et clairs. Peut-on faire confiance à l'intuition aussi évidente soit-elle ?

### **Origine / Fondement**

Les deux termes sont proches dans la mesure où ils désignent ce qui est au commencement de quelque chose. Cependant l'origine est simplement factuelle : elle correspond à un moment historique, l'apparition de quelque chose dans le temps. Le fondement n'est pas simplement chronologique, il est logique : il implique une justification rationnelle ou une légitimité.

La science, et notamment les mathématiques, est parfois comparée à un édifice dont il faut assurer la solidité. Le fondement prend alors toute son importance : il doit être stable, fixe, tel qu'on ne puisse pas le remettre en question, de manière à asseoir l'édifice. Il faut donc trouver des vérités qui soient premières, indubitables, et à partir desquelles les autres idées puissent être déduites. Cela est-il possible ?

Définitions établies d'après *Bled Philosophie*, Hachette

### Fiche élèves 3 : Questions

1)

Complétez la démonstration de la proposition 2

2)

Démontrez la proposition 6.

3)

Qu'est-ce qu'une démonstration ?

4)

Dans l'organigramme qui vous est donné, toutes les propositions sont-elles démontrées ? Toutes sont-elles démontrables ?

5)

Quelle conclusion pouvez-vous en tirer quant aux limites et aux conditions d'une démonstration ?

6)

S'il est impossible de tout démontrer, alors toute proposition repose sur des choses non démontrées qui sont simplement admises. Qu'est-ce que cela implique selon vous ? Dans ces conditions est-il possible de s'assurer de la vérité d'une proposition, d'une idée, par des démonstrations ?

## Fiche élèves 4 : Texte de Pascal et questions

La véritable méthode, qui formerait les démonstrations de la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué le sens ; l'autre, de n'avancer jamais aucune position qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est à dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. (...)

Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible: car il est évident que les premiers termes que l'on voudrait définir en supposerait de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions qu'on voudrait prouver en supposeraient d'autres qui les précédassent; et ainsi il est clair qu'on arrive jamais aux premières.

Ainsi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve.

D'où il paraît que les hommes sont dans une impuissance naturelle à traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli.

Mais il ne s'ensuit pas qu'on doive abandonner toute sorte de méthode.

Car il y en a une, et c'est celle de la géométrie, qui est la vérité inférieure en ce qu'elle est moins convaincante, mais non pas en ce qu'elle est moins certaine. Elle ne définit pas tout et ne prouve pas tout, et c'est en cela qu'elle lui cède ; mais elle ne suppose que les choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi elle est parfaitement véritable. Contre cette méthode pêchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout démontrer et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes par d'elles-mêmes.

Pascal, *De l'esprit de géométrie*, dans *Œuvres Complètes*, Le Seuil, p. 349-350

**1) Préciser l'objet du texte : de quoi parle le texte**

**2) Préciser le plan du texte : comment l'argumentation est-elle construite ?**

**3) Quelle est la limite de la démonstration ?**

**4) Qui est visé lorsque Pascal écrit que « il ne s'ensuit pas qu'on doive abandonner toute sorte de méthode » ?**

**4) Toutes les propositions nécessitent-elles une démonstration pour être admises comme vraies.**

Pour vous faciliter l'appropriation de cette activité et vous permettre de construire votre cours, nous vous proposons ci-dessous des réponses aux questions posées, à titre d'exemple. Les réponses proposées ne peuvent pas être dictées en l'état aux élèves. Elles soulignent simplement des points importants qui doivent être expliqués.

Vous trouverez deux fiches : l'une pour la partie mathématique et l'analyse d'un système de propositions, soit les questions 1 à 5 (Fiche professeur – étape 2), l'autre pour la discussion philosophique à partir de l'impossibilité de tout démontrer, soit la question 6 (Fiche – professeur – étape 3).

## Fiche professeur 1 (Étape 2, Questions 1 à 5)

Voici les réponses souhaitées :

1.

Proposition 2 : dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux deux à deux.

2.

Voir la [\\_demonstration-fiche\\_prof1.pdf](#), page 1.

3.

*Pour répondre on pourra interroger le rôle de la figure dans une démonstration de géométrie et rappeler l'opposition entre démontrer et constater ou, et, entre déduction et induction (bien que cela fasse partie des prérequis de la séance). En effet le traitement des questions 1 et 2 fait apparaître à la fois le besoin et le danger des figures : elles permettent de se représenter les choses mais risquent de nous limiter à un cas particulier qui introduit de nouvelles hypothèses.*

La démonstration désigne une forme de raisonnement dont la conclusion s'impose comme nécessaire et universelle. Le propre de la démonstration est de **procéder de façon purement discursive ou déductive** (« montrer à partir de »). La conclusion est la conséquence nécessaire de prémisses ou propositions antérieures : c'est à dire que nier la conclusion reviendrait à nier les prémisses ou encore que, si les prémisses sont vraies, il est impossible que la conclusion soit fausse.

La conclusion s'inscrit ainsi dans un **système de propositions** à caractère universel qui sont reliées entre elles de manière nécessaire. Ainsi les mathématiques fournissent **les raisons d'une conclusion** que l'on pourra justifier et mettre à l'épreuve d'une vérification rigoureuse. La conclusion est établie sans avoir à « montrer » quoi que ce soit par l'expérience ou le constat. Elle échappe donc aux incertitudes de l'observation et de la généralisation.

Pour le rationalisme classique, l'enchaînement logique des propositions, assuré en mathématiques, est le **modèle que tout raisonnement doit s'efforcer d'imiter**. Descartes, par exemple, considère que les mathématiques montrent « le droit chemin de la vérité » et que celui qui souhaite s'assurer d'un savoir véritable doit procéder selon l'idéal d'une « mathématique universelle » conçue comme science générale de l'ordre et permettant une connaissance achevée et totale. De même Spinoza rédige une « éthique » démontrée « selon les règles de la géométrie » : partant de définition et d'axiomes et progressant par déduction.

4.

Dans l'organigramme donné aux élèves plusieurs propositions peuvent nourrir la discussion :

La **proposition 1**, au même titre que la définition 1, pourrait être qualifiée de définition : on se contente alors de faire l'hypothèse de tels objets mathématiques (triangles superposables, parallélogrammes).



La **proposition 5** ne semble pas nécessiter de démonstration, et il n'est d'ailleurs pas possible d'en produire une. Elle n'est pas connue de manière discursive. Elle est saisie de manière intuitive et le problème sera de déterminer la valeur de l'intuition aussi évidente soit-elle.

La proposition 6 s'appuie sur les propositions 5 et 4. Cette dernière s'appuie sur la proposition 3 et la définition 1. A son tour, la proposition 3 se démontre par la proposition 1, 2 et la définition 1. Mais pourquoi ne pas chercher alors à démontrer la **proposition 2** ? Cela nécessiterait de s'appuyer sur d'autres énoncés qui, à leur tour, devraient être démontrés en s'appuyant sur de nouveaux énoncés et ainsi de suite. L'organigramme augmenterait alors dans toutes les directions (comme un buisson) et à l'infini. Il est remarquable que les démonstrations les plus convaincantes se révèlent, à l'examen, inachevées. Elles s'appuient sur des « prémisses », ou sur des hypothèses auxiliaires, dont la vérité demande à son tour à être établie. On peut alors étendre l'effort démonstratif et chercher la preuve de ce qu'on avait postulé. Mais cette tentative est vouée à l'échec : elle mobilisera inmanquablement de nouvelles prémisses et hypothèses qu'il faudrait alors de nouveau démontrer, et cela à l'infini.

*C'est l'argument sceptique de la régression à l'infini repris ci-dessous, dans la fiche professeur 2.*

*Pour que les élèves visualisent cette idée, il peut être utile de leur présenter une démonstration de la proposition 2 et de leur faire compléter l'organigramme en écrivant les nouvelles propositions utilisées dans cette démonstration. Ici le professeur de mathématiques intervient : il pourra, par exemple, vidéoprojeter le diagramme élargi figurant en page 2 du fichier *la\_demonstration-fiche\_prof1.pdf*.*

## 5.

Il n'est donc pas possible de tout démontrer. Toute démonstration repose nécessairement sur des choses non démontrées. Le **problème**, ou paradoxe, est donc le suivant :

D'un côté les démonstrations mathématiques sont un modèle de vérité : par elles une proposition devient certaine et pour s'assurer d'un savoir il faudrait chercher en toute chose une certitude égale à celle qu'elles permettent d'obtenir.

D'un autre côté toutes les démonstrations reposent sur des choses non démontrées qui sont seulement admises et qui sont la base du raisonnement. Ces propositions admises sont tenues pour vraies, mais à défaut de preuve, elles sont des croyances et non des connaissances.

La métaphore de l'architecture, proposée par Descartes aux livres I et II du *Discours de la méthode* est utile pour problématiser. Un système de proposition peut être comparé à un édifice dont la solidité dépend des fondations. Si tout l'édifice du savoir repose sur des croyances qui peuvent être interrogées, contestées, et qui peuvent évoluer, alors c'est la stabilité et la solidité de cet édifice qui sont problématiques. Peut-on alors s'assurer qu'une proposition est *absolument* certaine ?

On pourra insister sur le fait que la vérité de la proposition 6, qui avait été établie, est pourtant suspendue à celle des propositions 1, 2, et 5, qu'il est impossible d'établir par des démonstrations achevées.

Le travail de fondation consisterait à trouver un sol « ferme et solide » sur lequel il serait possible de s'appuyer pour construire des démonstrations et établir des propositions tout aussi « fermes et solides ». Ce travail peut-il être mené à bien en mathématiques ?

## **Fiche professeur 2 (Etape 3, Question 6)**

*Le but n'est pas de présenter une analyse critique de la vérité établie par voie démonstrative et de l'importance que le rationalisme classique accorde aux mathématiques comme modèle de pensée (cf question 3) ; mais de faire apparaître cette critique comme une question, pour chercher, et examiner les réponses possibles. Il s'agit de s'essayer au problème pour le circonscrire et évaluer son importance.*

*Le point de départ, le fait problématique, est l'impossibilité de tout démontrer. Il s'agit d'amener les élèves à en tirer des conséquences. Il n'est pas possible de s'assurer, par une démonstration, de la vérité des prémisses. Toute démonstration est inachevée et s'appuie donc sur des choses non démontrées. Dans quelle mesure cela remet-il en question la possibilité d'établir une vérité par démonstration ? L'impossibilité de tout démontrer génère un scepticisme (a) auquel tentent de répondre le rationalisme cartésien (b) et le formalisme mathématique (c).*

### Scénario principal (3) :

*Le travail de discussion avec la classe a pour but de faire émerger ces différentes positions : (a) (b) et (c). Ce travail de discussion sera mené à partir de l'étude de l'organigramme donné aux élèves et, au besoin, à l'aide des questions de guidage suivantes :*

*Peut-on tenir une proposition pour vraie, et dire « je sais que... », simplement parce que cette proposition est démontrée, c'est à dire déduite d'autre chose ? Pourquoi ? Comment appelle t-on une personne qui affirme qu'il est impossible de savoir quoi que ce soit avec certitude ? A qui ou à quoi s'oppose t-elle ? Référez-vous à la distinction entre croire et savoir.*

*La possibilité d'une régression à l'infini implique t-elle de renoncer à toute idéal de vérité et de connaissance, ou bien pouvez-vous trouver une solution pour vous assurer de la vérité d'une proposition ? Réfléchissez à la proposition 5 : selon vous est-elle vraie ? Pourquoi ? Peut-on la démontrer ? Quels critères de vérité pouvez-vous formuler ? Référez-vous à la distinction entre intuitif et discursif.*

*Après avoir exposé les différents critères de vérité, interrogez-vous sur leurs valeurs respectives. Quelles garanties apportent-ils ? Quels sont leurs forces et faiblesses respectives ?*

*Les différentes positions (a) (b) et (c) peuvent être présentées et argumentées comme suit :*

a) Le scepticisme. L'impossibilité de tout démontrer pose problème. C'est l'assurance ou la certitude d'obtenir une vérité par la démonstration qui est remise en question.

*Pour aiguiller les élèves (si besoin) :*

*Revenir sur la définition d'une démonstration, ses limites et ses conditions.*

*Lire, expliquer, utiliser la distinction entre croire et savoir.*

*Utiliser les questions de guidage :*

*Peut-on tenir une proposition pour vraie, et dire « je sais que... », simplement parce que cette proposition est démontrée, c'est à dire déduite d'autre chose ? Pourquoi ? Comment appelle t-on une personne qui affirme qu'il est impossible de savoir quoique ce soit avec certitude ? A qui s'oppose t-elle ?*

Une démonstration est un ensemble de **déductions** : la proposition démontrée découle logiquement de propositions initiales. En un sens, la **vérité** qui en résulte est **hypothétique** : la proposition démontrée est vraie si et seulement si les propositions initiales sont vraies. Une déduction peut ainsi être valide, respecter les règles logiques, ne comporter aucune contradiction, sans être vraie. La déduction est un raisonnement rigoureux qui permet de tirer une conclusion, mais ne prouve pas la vérité de la conclusion : elle montre que l'on peut conclure, elle ne montre pas que la conclusion est vraie. Le problème est de s'assurer de la vérité des propositions initiales.

La meilleure méthode, pour parvenir à une certitude véritable, consisterait à ne rien supposer donc à tout définir et tout démontrer, mais cela est absolument impossible. Donc : nous ne pouvons pas **savoir** si ce que nous avançons est vrai ou faux, nous pouvons seulement le **croire** :

- nous cherchons à démontrer ce que nous croyons être vrai, mais cette progression vers un savoir assuré par une démonstration est infinie et toujours inachevée ;
- les démonstrations ne pouvant être achevées, elles s'appuient sur des idées non démontrées que nous ne faisons que supposer ou croire, faute de preuve.

A l'appui de cette thèse, la « régression à l'infini » est un argument **sceptique**, décrit entre autres par Sextus Empiricus dans ses *Esquisses pyrrhoniennes*, et résumé dans la célèbre formule « Prouve ta preuve ». En grec « skeptomai » signifie « j'examine ». Etre sceptique, c'est se garder de toute affirmation ou de toute négation, « suspendre son jugement », pour éviter d'être pris dans l'embarras d'une démonstration impossible à achever. Le sceptique s'oppose au **dogmatique** qui croit être en mesure de savoir, de discerner ce qui est vrai ou faux, en s'appuyant sur des preuves vérifiables par tous et non sur un sentiment subjectif. Le rationalisme classique, par exemple, témoigne d'une foi en la raison qui serait à même de produire des vérités en procédant seule : en suivant uniquement « l'ordre des pensées<sup>7</sup> ».

7 Descartes, *Regulae*, VI

b) Le rationalisme cartésien. L'impossibilité de tout démontrer est un faux problème. La volonté de tout démontrer, et le scepticisme qu'elle génère, sont abusifs. Toutes les propositions ne nécessitent pas une démonstration pour être admises comme vraies.

*Pour aiguiller les élèves (si besoin) :*

*Lire, expliquer, utiliser la distinction entre intuitif et discursif, origine et fondement.*

*Attirer l'attention sur la proposition 5.*

*Utiliser les questions de guidage :*

*La possibilité d'une régression à l'infini implique t-elle de renoncer à toute idéal de vérité et de connaissance, ou bien pouvez vous trouver une solution pour s'assurer de la vérité d'une proposition ? Réfléchissez à la proposition 5 : selon vous est-elle vraie ? Pourquoi ? Peut-on la démontrer ? Quels critères de vérité pouvez-vous formuler ?*

### **Il faut distinguer deux modes de connaissances : la déduction et l'intuition.**

L'intuition consiste à saisir quelque chose directement, sans passer par le raisonnement. L'intuition est souvent critiquée comme étant un sentiment subjectif et relatif. On lui oppose la démarche discursive qui consiste, par le raisonnement, à tout examiner et à procéder étape par étape. Pourtant certaines choses semblent évidentes par elles-mêmes, sans qu'il soit besoin de les détailler et de les démontrer.

Descartes soutient cette idée<sup>8</sup> et précise ce qu'est l'intuition comme « acte de l'entendement » (par opposition à l'intuition sensible). Ce qui est connu par intuition est une idée évidente dans la mesure où : elle semble « claire », elle saute aux yeux, et « distincte », car elle n'enferme aucune contradiction ou son contraire est impensable. L'évidence exerce ainsi une contrainte sur l'esprit. Descartes prend comme exemple l'idée qu'il n'y a « pas de montagnes sans vallée ».

### **L'attention des élèves sera attirée sur la proposition 5 :**

- Cette proposition fera aisément l'accord de tous. Elle semble impossible à contredire de bonne foi. Il serait donc possible d'admettre une proposition comme vraie sans recourir à sa démonstration.
- Cela permettra de souligner ce qu'est une évidence : à la fois en montrant que c'est une idée qui s'impose à tous, et en travaillant la définition du clair et distinct donné par Descartes (voir ci-dessus). L'idée que « par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule parallèle à cette droite » n'est-elle pas semblable à l'idée qu'il n'y a « pas de montagnes sans vallée » ? N'est-ce pas de même une idée impossible à contredire, car l'idée qu'il y aurait plusieurs parallèles serait contradictoire avec l'idée même de ligne droite et de parallèle ?
- Cela permettra également d'introduire les premiers éléments d'histoire de la géométrie. La proposition 5 est liée au 5ème Postulat (ou axiome) d'Euclide qui est l'un des fondements de la géométrie plane.

<sup>8</sup> Par exemple, dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, II : il existe deux « actes de l'entendement par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur : l'intuition et la déduction. »

## **Donc une solution est envisageable au problème de la régression à l'infini :**

Plutôt que d'étendre l'effort démonstratif à l'infini, il faut chercher s'il existe des propositions évidentes sur lesquelles les démonstrations pourraient venir se fonder. En philosophie, une distinction est faite entre **principe** et **conséquence**. On appelle « principes » des propositions d'ordre très général, considérées comme premières (dans le temps mais aussi dans un ordre idéal ou logique) et fondamentales. Les conséquences sont les propositions qui en découlent de façon nécessaire et logique. En mathématiques, une distinction est faite entre **théorèmes** (propositions déduites de propositions antérieures) et **axiomes** (propositions premières).

L'important est de ne pas supposer n'importe quoi. Ce qui est supposé, posé en dessous, soutient tout l'édifice des démonstrations. Ces propositions initiales doivent être suffisamment assurées pour ne pas être régulièrement remises en question : faute de quoi l'édifice menacerait de s'écrouler, tel un château de cartes. Il faut donc s'assurer des **fondements**, c'est à dire des principes ou axiomes sur lesquelles reposent les autres propositions. Descartes travaille cette métaphore de l'architecture dans le Discours de la Méthode<sup>9</sup>. Il affirme l'importance de construire sur un fond qui soit « ferme » et « tout à lui » c'est à dire sur des idées qui ne soient pas reçues et admises sans examen. Il cherche ainsi à construire sur un « roc » et non sur du « sable ».

Dans cette recherche d'un fondement véritable, **le système Euclidien tient lieu de modèle**. C'est avec les *Eléments*<sup>10</sup> d'Euclide que les mathématiques sont entrées dans « la voie sûre d'une science<sup>11</sup> ». L'attention se porte sur l'élucidation des principes et le caractère strictement déductible des propositions. Les principes apparaissent comme des vérités évidentes, saisies de manière intuitive, par une « lumière naturelle » : simples, clairs et distincts. La vérité de la géométrie semble donc tenir aux critères suivants : la géométrie constitue 1) un enchaînement de **déductions valides** 2) construit sur des **principes évidents** et 3) un système de **propositions adéquates au réel**<sup>12</sup>.

9 Descartes, *Discours de la méthode*, partie I et II

10 Vitrac, Euclide, *Les Éléments*, volume 1. Puf, Paris, 1990

11 Kant, *Critique de la raison pure*, Préface à la deuxième édition

12 L'évidence ne signifie pas exactement l'adéquation à la réalité. L'évidence est un critère de vérité intrinsèque à l'idée : le clair et distinct. Au contraire, l'adéquation à la réalité est un critère de vérité extérieur à l'idée : il faudrait rapporter l'idée et la comparer à quelque chose qui lui est extérieure. Toutefois ce qui est évident n'est pas sans lien avec la réalité. Nous pouvons avoir, explique Descartes dans les *Principes de la Philosophie*, une « certitude morale » que ce qui est évident est vraie, c'est à dire une certitude suffisante pour l'action. Nous pouvons également en avoir une « certitude métaphysique », dans la mesure où il ne pourrait pas se faire que Dieu soit malin (entendons rusé et mauvais), au point de nous faire prendre pour évident ce qui n'existe pas. Dieu joue ici, à ce moment de la philosophie de Descartes, le rôle de garant d'une adéquation entre l'évidence et la réalité.

c) Le formalisme mathématique. L'impossibilité de tout démontrer ne pose pas nécessairement un problème à condition d'admettre une « déflation » de la vérité assurée par démonstration. On ne peut se fier à l'intuition. Il faut se contenter de poser des principes et de veiller à la validité du raisonnement déductif et à la cohérence logique du système de propositions.

*Pour aiguiller le élèves (si besoin) (mais ce dernier point représente davantage une ouverture ou un apport du professeur de mathématique à la discussion que le résultat d'une réflexion des élèves qui serait permise par l'organigramme étudié : ce point c sera donc très certainement présenté de manière plus magistrale) :*

*Développer des éléments d'histoire de la géométrie.*

*Utiliser les questions de guidage :*

*Après avoir exposé les différents critères de vérité, interrogez-vous sur leurs valeurs respectives. Quelles garanties apportent-ils ? Quels sont leurs forces et faiblesses respectives ?*

**Les travaux des mathématiciens**<sup>13</sup> montrent l'utilité d'une analyse logique ou formelle, à la fois pour contrôler les propositions qui semblent évidentes et pour inventer de nouvelles propositions. Les tentatives pour démontrer le 5ème Postulat se révélèrent toutes infructueuses jusqu'à ce que l'échec des raisonnements par l'absurde, ne débouchant sur aucune contradiction apparente, conduise à admettre des propositions contraires à l'intuition, et à construire de nouvelles géométries.

Ces constructions de nouveaux systèmes ont **fait perdre la confiance en un fondement intuitif** et ont contribué à **faire évoluer la pensée des mathématiques**, conçue désormais comme une science formelle<sup>14</sup>. Aujourd'hui les mathématiciens se limitent en général à discuter la consistance d'un système axiomatique (le fait que les axiomes n'entraîneront jamais de contradiction). Il n'est plus question de « fonder » le discours en s'assurant de la vérité des principes (laquelle serait établie par une saisie intuitive ou le recours à l'expérience). Seules comptent l'ampleur et la cohérence des propositions qui sont déduites.

La conséquence en est une « **déflation** » **de la vérité** qui se réduit en mathématiques (ou par le biais des démonstrations) à l'accord d'une proposition avec les principes dont elle est déduite. Une proposition n'a de vérité qu'à l'intérieur d'un système d'axiomes donné. L'idée de **validité**, ou cohérence logique, remplace ainsi l'idée de **vérité**, ou d'adéquation avec le réel.

13 Nous renvoyons sur ce point aux documents IREM sur L'Histoire et Les Enjeux des géométries non euclidiennes (préciser le lien avec le document).

14 Depuis Hilbert (vers 1900), la géométrie est une théorie déductive abstraite (A COMPLETE).

### Scénario alternatif (3bis) :

*Le travail de discussion avec la classe aura pour but de faire émerger prioritairement les deux premières idées (a et b qui correspondent respectivement aux questions 4 et 5) ce qui suffit déjà pour le temps imparti. Le formalisme mathématique (c qui correspond à la question 6) pourra être exposé de manière plus « magistrale », soit en prolongement, de manière à préciser ce que disent les mathématiciens sur cette question, soit en continuant à problématiser, de manière à interroger le rationalisme cartésien et son recours à l'intuition.*

*Le travail de discussion sera mené conjointement à partir du texte de Pascal et de l'étude de l'organigramme donné aux élèves.*

#### 1) Préciser l'objet du texte : de quoi parle le texte

**Le texte traite de la méthode pour accéder à la vérité et notamment de la démonstration et de la géométrie. Pascal distingue entre une « méthode véritable qui formerait les démonstrations de la plus haute excellence » et une « autre sorte de méthode » qui est « celle de la géométrie. » Pourquoi ?**

La recherche d'une méthode est celle d'une voie sûre pour discerner le vrai du faux. La méthode désigne le chemin (du grec *odos*). L'absence de méthode conduit à l'errance et à l'erreur (du latin *errare*). Il ne suffit pas d'être doté de raison, il faut encore en faire un bon usage, et pour cela suivre certaines règles.

Les démonstrations des mathématiciens montrent la voie sûre de la science (donc la méthode). Elles permettent d'établir qu'une proposition est vraie de manière universelle et nécessaire. On rappellera ici l'importance des mathématiques pour les philosophes (Platon ou Descartes). On expliquera cette importance des mathématiques en rappelant l'opposition, quant à la certitude, entre démonstration et constat, déduction et induction (Cf. les pré requis).

Le texte s'intéresse donc à la preuve : la méthode (chemin) qui permet de s'assurer de la vérité de ce qu'on avance et s'élever ainsi d'une simple croyance (présomption, supposition) à un savoir. Mais le texte distingue entre deux méthodes, et de manière apparemment complexe entre « les démonstrations de la plus haute excellence » et « la géométrie » : quel est le sens de cette distinction ?

#### 2) Préciser le plan du texte : comment l'argumentation est-elle construite ?

**Le texte est construit de manière très simple. Chaque paragraphe correspond à une idée. Pascal expose d'abord ce que serait la véritable méthode, pour s'assurer de la vérité d'une idée, avant de montrer qu'elle est impossible, puis de proposer une autre méthode. Il y a donc un problème et sa solution.**

##### **Argumentation**

*Pascal expose une thèse : la véritable méthode pour accéder à la vérité consiste à tout définir et à tout démontrer. Puis il critique cette thèse en montrant les limites : définir chaque terme et démontrer chaque proposition est une tâche impossible. Il tire la conséquence de cette critique : on est condamné à poser des termes et des propositions premiers c'est-à-dire non définis/non démontrées. Il tire alors la conséquence de cette critique et pose implicitement un problème : La*

véritable méthode est inaccessible aux hommes. Faut-il alors renoncer à la vérité ? *Il propose une solution au problème soulevé* : il convient d'adopter une méthode moins rigoureuse mais garante de vérité quand même puisqu'elle pose des termes et des propositions premiers évidents pour la raison. *Remarque* : il initie une critique contre le scepticisme et le dogmatisme qui nient cette méthode imparfaite mais nécessaire pour accéder à la vérité.

### **3) Quelle est la limite de la démonstration ?**

**Il est impossible de tout démontrer. C'est donc l'assurance ou la certitude d'obtenir une vérité par la démonstration qui est remise en question.**

*Pour aiguiller les élèves (si besoin) :*

*Revenir sur la définition d'une démonstration, ses limites et ses conditions*

*Lire, expliquer, utiliser la distinction entre croire et savoir.*

Une démonstration est un ensemble de **déductions** : la proposition démontrée découle logiquement de propositions initiales. En un sens, la **vérité** qui en résulte est **hypothétique** : la proposition démontrée est vraie si et seulement si les propositions initiales sont vraies. Une déduction peut ainsi être valide, respecter les règles logiques, ne comporter aucune contradiction, sans être vraie. La déduction est un raisonnement rigoureux qui permet de tirer une conclusion, mais ne prouve pas la vérité de la conclusion : elle montre que l'on peut conclure, elle ne montre pas que la conclusion est vraie. Le problème est de s'assurer de la vérité des propositions initiales.

La meilleure méthode, pour parvenir à une certitude véritable, consisterait à ne rien supposer donc à tout définir et tout démontrer, mais cela est absolument impossible, car c'est un processus infini. Donc : nous ne pouvons pas **savoir** si ce que nous avançons est vrai ou faux, nous pouvons seulement le **croire** :

- nous cherchons à démontrer ce que nous croyons être vrai, mais cette progression vers un savoir assuré par une démonstration est infinie et toujours inachevée ;
- les démonstrations ne pouvant être achevées, elles s'appuient sur des idées non démontrées que nous ne faisons que supposer ou croire, faute de preuve.

### **4) Qui est visé lorsque Pascal écrit que « il ne s'ensuit pas qu'on doive abandonner toute sorte de méthode » ?**

**Pascal s'oppose ici au scepticisme.** La « régression à l'infini » est un argument **sceptique**, décrit entre autres par Sextus Empiricus dans ses *Esquisses pyrrhoniennes*, et résumé dans la célèbre formule « Prouve ta preuve ». En grec « skeptomai » signifie « j'examine ». Etre sceptique, c'est se garder de toute affirmation ou de toute négation, « suspendre son jugement », pour éviter d'être pris dans l'embarras d'une démonstration impossible à achever. Le sceptique s'oppose au **dogmatique** qui croit être en mesure de savoir, de discerner ce qui est vrai ou faux, en s'appuyant sur des preuves vérifiables par tous et non sur un sentiment subjectif. Le rationalisme classique, par exemple, témoigne d'une foi en la raison qui serait à même de produire des vérités en procédant seule : en suivant uniquement « l'ordre des pensées<sup>15</sup> ».

15 Descartes, *Regulae*, VI



## **5) Toutes les propositions nécessitent-elles une démonstration pour être admises comme vraies.**

*Pour aiguiller les élèves (si besoin) :*

*Lire, expliquer, utiliser la distinction entre intuitif et discursif, origine et fondement.*

*Attirer l'attention sur les propositions 1 et 5.*

*Utiliser les questions de guidage ci-dessous.*

*La possibilité d'une régression à l'infini implique t-elle de renoncer à toute idéal de vérité et de connaissance, ou bien pouvez vous trouver une solution pour s'assurer de la vérité d'une proposition ? Réfléchissez à la proposition 5 : selon vous est-elle vraie ? Pourquoi ? Peut-on la démontrer ? Quels critères de vérité pouvez-vous formuler ?*

### **Il faut distinguer deux modes de connaissances : la déduction et l'intuition.**

L'intuition consiste à saisir quelque chose directement, sans passer par le raisonnement. L'intuition est souvent critiquée comme étant un sentiment subjectif et relatif. On lui oppose la démarche discursive qui consiste, par le raisonnement, à tout examiner et à procéder étape par étape. Pourtant certaines choses semblent évidentes par elles-mêmes, sans qu'il soit besoin de les détailler et de les démontrer.

Descartes soutient cette idée<sup>16</sup> et précise ce qu'est l'intuition comme « acte de l'entendement » (par opposition à l'intuition sensible). Ce qui est connu par intuition est une idée évidente dans la mesure où : elle semble « claire », elle saute aux yeux, et « distincte », car elle n'enferme aucune contradiction ou son contraire est impensable. L'évidence exerce ainsi une contrainte sur l'esprit. Descartes prend comme exemple l'idée qu'il n'y a « pas de montagnes sans vallée ».

### **L'attention des élèves sera attirée sur la proposition 5 :**

- Cette proposition fera aisément l'accord de tous. Elle semble impossible à contredire de bonne foi. Il serait donc possible d'admettre une proposition comme vraie sans recourir à sa démonstration.
- Cela permettra de souligner ce qu'est une évidence : à la fois en montrant que c'est une idée qui s'impose à tous, et en travaillant la définition du clair et distinct donné par Descartes (voir ci-dessus). L'idée que « par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule parallèle à cette droite » n'est-elle pas semblable à l'idée qu'il n'y a « pas de montagnes sans vallée » ? N'est-ce pas de même une idée impossible à contredire, car l'idée qu'il y aurait plusieurs parallèles serait contradictoire avec l'idée même de ligne droite et de parallèle ?
- Cela permettra également d'introduire les premiers éléments d'histoire de la géométrie. La proposition 5 est une version moderne du 5ème Postulat (ou axiome) d'Euclide qui est l'un des fondements de la géométrie plane.

16 Par exemple, dans les *Règles pour la direction de l'esprit*, II : il existe deux « actes de l'entendement par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur : l'intuition et la déduction. »

## **Donc une solution est envisageable au problème de la régression à l'infini :**

Plutôt que d'étendre l'effort démonstratif à l'infini, il faut chercher s'il existe des propositions évidentes sur lesquelles les démonstrations pourraient venir se fonder. En philosophie, une distinction est faite entre **principe** et **conséquence**. On appelle « principes » des propositions d'ordre très général, considérées comme premières (dans le temps mais aussi dans un ordre idéal ou logique) et fondamentales. Les conséquences sont les propositions qui en découlent de façon nécessaire et logique. En mathématiques, une distinction est faite entre **théorèmes** (propositions déduites de propositions antérieures) et **axiomes** (propositions premières).

L'important est de ne pas supposer n'importe quoi. Ce qui est supposé, posé en dessous, soutient tout l'édifice des démonstrations. Ces propositions initiales doivent être suffisamment assurées pour ne pas être régulièrement remises en question : faute de quoi l'édifice menacerait de s'écrouler, tel un château de cartes. Il faut donc s'assurer des **fondements**, c'est à dire des principes ou axiomes sur lesquelles reposent les autres propositions. Descartes travaille cette métaphore de l'architecture dans le Discours de la Méthode<sup>17</sup>. Il affirme l'importance de construire sur un fond qui soit « ferme » et « tout à lui » c'est à dire sur des idées qui ne soient pas reçues et admises sans examen. Il cherche ainsi à construire sur un « roc » et non sur du « sable ».

Dans cette recherche d'un fondement véritable, **le système Euclidien tient lieu de modèle**. C'est avec les *Eléments*<sup>18</sup> que les mathématiques sont entrées dans « la voie sûre d'une science<sup>19</sup> ». L'attention se porte sur l'élucidation des principes et le caractère strictement déductible des propositions. Les principes apparaissent comme des vérités évidentes, saisies de manière intuitive, par une « lumière naturelle » : simples, clairs et distincts. La vérité de la géométrie semble donc tenir aux critères suivants : la géométrie constitue 1) un enchaînement de **déductions valides** 2) construit sur des **principes évidents** et 3) un système de **propositions adéquates au réel**<sup>20</sup>.

**6) La régression à l'infini ne pose pas nécessairement un problème à condition d'admettre une « déflation » de la vérité assurée par démonstration. On ne peut se fier à l'intuition. Il faut se contenter de poser des principes et de veiller à la validité du raisonnement déductif et à la cohérence logique du système de propositions.**

*Pour aiguiller le élèves (si besoin) (mais ce dernier point représente davantage une ouverture ou un apport du professeur de mathématique à la discussion que le résultat d'une réflexion des élèves qui serait permise par l'organigramme étudié : ce point c sera donc très certainement présenté de manière plus magistrale) :*

*Développer des éléments d'histoire de la géométrie.  
Utiliser les questions de guidage ci dessous.*

17 Descartes, *Discours de la méthode*, partie I et II

18 Euclide, *Les Éléments*, traduction François Peyrard, éd. Blanchard Paris, 1993 (1<sup>re</sup> éd. 1804)

19 Kant, *Critique de la raison pure*, Préface à la deuxième édition

20 L'évidence ne signifie pas exactement l'adéquation à la réalité. L'évidence est un critère de vérité intrinsèque à l'idée : le clair et distinct. Au contraire, l'adéquation à la réalité est un critère de vérité extérieur à l'idée : il faudrait rapporter l'idée et la comparer à quelque chose qui lui est extérieure. Toutefois ce qui est évident n'est pas sans lien avec la réalité. Nous pouvons avoir, explique Descartes dans les *Principes de la Philosophie*, une « certitude morale » que ce qui est évident est vrai, c'est à dire une certitude suffisante pour l'action. Nous pouvons également en avoir une « certitude métaphysique », dans la mesure où il ne pourrait pas se faire que Dieu soit malin (entendons rusé et mauvais), au point de nous faire prendre pour évident ce qui n'existe pas. Dieu joue ici, à ce moment de la philosophie de Descartes, le rôle de garant d'une adéquation entre l'évidence et la réalité.

*Après avoir exposé les différents critères de vérité, interrogez-vous sur leurs valeurs respectives. Quelles garanties apportent-ils ? Quels sont leurs forces et faiblesses respectives ?*

**Les travaux des mathématiciens**<sup>21</sup> montrent l'utilité d'une analyse logique ou formelle, à la fois pour contrôler les propositions qui semblent évidentes et pour inventer de nouvelles propositions. Les tentatives pour démontrer le 5ème Postulat se révélèrent toutes infructueuses jusqu'à ce que l'échec des raisonnements par l'absurde, ne débouchant sur aucune contradiction apparente, conduise à admettre des propositions contraires à l'intuition, et à construire de nouvelles géométries.

Ces constructions de nouveaux systèmes ont **fait perdre la confiance en un fondement intuitif** et ont contribué à **faire évoluer la pensée des mathématiciens**, conçue désormais comme une science formelle<sup>22</sup>. Aujourd'hui les mathématiciens se limitent en général à discuter la consistance d'un système axiomatique (le fait que les axiomes n'entraîneront jamais de contradiction). Il n'est plus question de « fonder » le discours en s'assurant de la vérité des principes (laquelle serait établie par une saisie intuitive ou le recours à l'expérience). Seules comptent l'ampleur et la cohérence des propositions qui sont déduites.

La conséquence en est une « **déflation** » **de la vérité** qui se réduit en mathématiques (ou par le biais des démonstrations) à l'accord d'une proposition avec les principes dont elle est déduite. Une proposition n'a de vérité qu'à l'intérieur d'un système d'axiomes donné. L'idée de **validité**, ou cohérence logique, remplace ainsi l'idée de **vérité**, ou d'adéquation avec le réel.

21 Nous renvoyons sur ce point aux documents satellites IREM « Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes » (voir <http://www.irem.univ-montp2.fr/Satellite-Reperes-historiques-et> ) et « Enjeux des géométries non euclidiennes » (voir <http://www.irem.univ-montp2.fr/Satellite-Enjeux-des-geometries>)

22 Depuis Hilbert (vers 1900), la géométrie est une théorie déductive abstraite, voir « Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes » 1. d) p. 6 :

- Dès le départ, les objets sont regardés comme des objets de la pensée (« nous pensons trois systèmes de choses ») vidés de leur contenu ontologique (conception dite nominaliste). Selon une boutade célèbre de Hilbert, « On doit toujours pouvoir dire, à la place de points, droites et plans, tables, chaises et chopes de bière ». Cela permet en effet de nous prévenir contre un appel à l'intuition spatiale demeuré implicite. Les objets sont ainsi désignés par des symboles.
- Ce n'est pas sur les objets eux-mêmes, mais sur les relations entre objets que Hilbert porte son attention : avec Hilbert, les mathématiques deviennent une science relationnelle. Hilbert définit ainsi les relations d'appartenance, d'ordre, de congruence, de parallélisme et de continuité par des axiomes qui posent les propriétés caractérisant ces relations. Ce procédé permet de faire abstraction de la nature particulière des objets.

	<b>IREM</b> <b>6- Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives</b>	 <p>R. E. M. I. R. Z. de 1 Montpellier</p>
--	--	---

IREM Math-Philo, Document satellite « Repères historiques et épistémologiques sur les Géométries non euclidiennes » (voir <http://www.irem.univ-montp2.fr/Satellite-Reperes-historiques-et> )

IREM Math-Philo, Document satellite « Enjeux des géométries non euclidiennes » (voir <http://www.irem.univ-montp2.fr/Satellite-Enjeux-des-geometries>)

<b>IREM</b> <b>8- Evolution de la ressource (CV)</b>	
---	--

<b>Etape</b>	<b>Date</b>	<b>Réalisations</b>	<b>Contributeurs</b>
1	Avril 2013	Création d'un germe	Cédric Vergnerie et Thomas François
2	Mai 2013-mai 2014	Développement de la ressource	Equipe IREM
3	Mai 2014	Première expérimentation	Thomas François et Eric Noyer (lycée Joseph Vallot de Lodève)
4	Juin 2014	Finalisation	Equipe IREM