


Equipe IREM Sciences¹

IREM de Montpellier

<http://irem.edu.umontpellier.fr>

	Le vote et la démocratie	
	Sommaire	

1. Fiche d'identification
2. Les objectifs
3. Scénario d'usage
4. Fiches élèves
5. Fiches professeurs
6. Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives
7. Bibliographie
8. Evolution de la ressource (CV)

1 Manuel Bächtold, Thomas François, Dominique Guin, Thomas Hausberger, Séverine Maingaud, Patrice Marie-jeanne, Henri Reboul. Responsables : Manue Bächtold (manuel.bachtild@umontpellier.fr) et Thomas Hausberger (thomas.hausberger@umontpellier.fr)

IREM
1. Fiche d'identification



Disciplines	Mathématiques - Philosophie
Thème	Les systèmes de vote et la démocratie
Niveau	Terminale Scientifique
Cadre	Cours de mathématiques et cours de philosophie
Objectifs	<p>Dans le cadre du thème de philosophie politique au programme du cours de philosophie de Terminale, le but des séquences présentées ici est d'aborder la question de la volonté générale en croisant les approches mathématiques et philosophique, pour un enrichissement mutuel.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Du côté de la philosophie : questionnement sur la démocratie, discussion des présupposés philosophiques, de la pertinence et des limites de la méthode de détermination de la volonté générale par l'agrégation des préférences individuelles (systèmes de vote) - Du côté des mathématiques : problématisation du choix d'un système de vote parmi d'autres, travail autour de la notion d'ordre, laquelle est au coeur des processus d'agrégation des préférences. Ce travail du formalisme mathématique vise également à faciliter la transition secondaire-supérieur, le formalisme et l'abstraction étant deux obstacles importants pour les étudiants lors de l'entrée à l'université.
Modalités pratiques de déroulement	<p>Durée</p> <p>7h (2h en co-animation maths-philo, 2h en cours de mathématiques et 3h en cours de philosophie)</p> <p>+ un devoir à la maison (maths)</p>
Dispositifs pédagogiques	<ul style="list-style-type: none"> - partie en co-animation : activité mathématique sous forme de travaux dirigés, éventuellement en petits groupes, suivie d'une discussion philosophique conduite par le professeur de philosophie - partie philosophie (3h) : discussion philosophique conduite par le professeur de philosophie, étude de textes - partie mathématiques (2h) : travaux dirigés en classe entière, éventuellement en petits groupes
Description de l'activité	Après une introduction en cours de philosophie portant sur les modalités de prise de décision en démocratie, une

	<p>séquence interdisciplinaire mathématiques-philosophie pose le problème du choix d'un système de vote parmi une pluralité de choix possibles susceptibles de faire émerger différentes préférences collectives. La séquence se termine par une discussion philosophique des limites et de la fonction du scrutin uninominal. Elle se poursuit en cours de philosophie par une mise en perspective des présupposés philosophiques, de la pertinence et des limites de la méthode de détermination de la volonté générale par l'agrégation des préférences individuelles, autour de la lecture de différents textes. En cours de mathématiques, un travail est mené autour de la notion d'ordre : sa formalisation mathématique (notamment l'axiome de transitivité qui fait défaut dans les systèmes de votes) et ses représentations (« graphe des duels », dans l'esprit de Condorcet). L'activité aborde ensuite la méthode de Schultze, une stratégie pour remédier au paradoxe de Condorcet, et se termine par une brève discussion du théorème d'Arrow. Enfin, un devoir de mathématiques est proposé à la maison sur la méthode de Borda.</p>
Fichiers constitutifs de la ressource	ressource_IREM-vote_democratie.pdf
Mots-clés	philosophie politique ; démocratie ; volonté générale ; systèmes de vote ; relation d'ordre ; transitivité ; théorie des graphes
Programme officiel	<p>En philosophie :</p> <p><i>Thème</i> : Champ de problème : La politique <i>Notions</i> : La politique, L'Etat, La liberté, La raison, La vérité</p> <p>En mathématiques :</p> <p>Quantificateurs logiques, raisonnement par disjonction de cas, négation d'une proposition;</p> <p>Démonstration par récurrence (Terminale S);</p> <p>Graphes (Terminale ES/L, spécialité)</p>
Auteurs	Thomas François, Patrice Marie-Jeanne, Thomas Hausberger, Dominique Guin

PRESENTATION DE LA RESSOURCE :

La philosophie politique est l'un des thèmes au programme du cours de philosophie de Terminale. L'un des objets d'étude de ce thème est la question de la volonté générale. La ressource que nous avons développée présente une séquence composée de plusieurs activités pour la classe. Celles-ci permettent d'aborder cette question de la volonté générale en croisant les approches mathématiques et philosophique, pour un enrichissement mutuel. Du côté de la philosophie, une première activité (phase 1 du scénario) vise à mener un questionnement sur la démocratie, en comparant deux manières de prendre des décisions collectives et deux manières, pour les citoyens, de participer à ces décisions : élections de représentants et délibération publique. Il s'agit, dans une seconde activité (phase 2, étape 2), de discuter les présupposés philosophiques, la pertinence et les limites de la méthode de détermination de la volonté générale par l'agrégation des préférences individuelles. Enfin, une troisième activité (phase 3) vise à développer avec les élèves un questionnement sur la délibération publique et ses apports.

Ces réflexions philosophiques s'articulent étroitement avec des activités mathématiques. Soulignons que les mathématiciens ont formalisé le problème du choix d'un système de vote pour exprimer la volonté générale (paradoxe de Condorcet, méthode de Borda, de Schultze, théorème d'Arrow). Ces résultats sont à la portée des étudiants de Terminale scientifique. Leur étude en cours de mathématiques est l'occasion de travailler la notion d'ordre, qui est au cœur des processus de vote lorsqu'il s'agit de comprendre la technique mathématique, ses formalisations mathématiques (notamment l'axiome de transitivité qui fait défaut dans les systèmes de votes) et ses représentations (par exemple, autour du « graphe des duels », dans l'esprit de Condorcet et de Schultze). Différents changements de cadre et conversions entre registres de représentations sémiotiques sont en jeu. Les activités proposées dans la ressource permettent de développer la flexibilité cognitive des élèves et offrent un premier contact avec la structure d'ordre (enseignée en première année de licence), dans l'optique de favoriser la transition lycée-université.

Dans ses rapports à la philosophie, le travail mathématique sur différents systèmes de vote permet ainsi d'enrichir la discussion philosophique, laquelle en retour permet de mettre en perspective les objets mathématiques et leurs usages.

PROBLÉMATISATION - LA VOLONTÉ DU PEUPLE : QUESTIONS GÉNÉRALES SUR LES FONDEMENTS DU POUVOIR EN DÉMOCRATIE

Comment prendre une décision, dans une société, au sujet du bien-être de tous ou de l'intérêt commun ? Et comment prendre une décision qui soit la meilleure possible ou qui soit incontestable ?

La philosophie antique (cad les traditions platoniciennes, aristotéliennes et stoïciennes) accordait au sage ou au philosophe le droit légitime de gouverner du fait de sa compétence. La philosophie moderne a substitué, à cette règle de la compétence, le principe du consentement : consentement du

peuple, par pacte ou contrat, à être gouverné. D'une manière ou d'une autre l'autorité politique doit se fonder sur la volonté du peuple pour être légitime.

Ce principe de la « souveraineté du peuple », qui nous est familier, pose cependant plusieurs problèmes :

- Problème de la rectitude de la volonté du peuple qui peut s'écarter de l'intérêt général et être « parasitée » par des intérêts particuliers : le peuple peut se tromper ou être trompé.
- Problème de la connaissance de la volonté du peuple. On peut interroger des individus séparément mais comment, en tenant compte des « préférences individuelles », déterminer ce que veut la collectivité ?
- Problème de l'existence de la volonté du peuple, cad d'un accord ou d'un consensus sur quelque chose, soit une « préférence collective » (ce qui n'est pas évident compte tenu de la diversité des intérêts qui composent une société).

Les démocraties occultent généralement ces deux derniers problèmes en instituant un fonctionnement qui a valeur de réponse et qui semble aller de soi. La volonté du peuple existe et elle est connue au moyen du vote et du décompte des suffrages : c'est la volonté majoritaire. L'idée est que parmi plusieurs choix soumis au vote il sera possible d'établir un classement d'où se dégagera, de manière incontestable, un plus grand élément : un choix obtenant plus de suffrages que tous les autres.

En mathématiques, « les paradoxes de Condorcet » démentent cette idée simple. Selon la méthode de Condorcet, le vainqueur d'une élection est le candidat qui gagne tous ses duels avec les autres candidats. Or il n'y a pas nécessairement de « plus grand élément » au sens du classement de Condorcet, qui l'emporterait sur tous les autres. D'une façon générale, part le « plus grand élément » change selon le système de classement ou de décompte des suffrages qui est utilisé. Y aurait-il alors un système de classement meilleur que les autres ? D'autre part il n'y a pas nécessairement de « plus grand élément » qui l'emporte sur tous les autres. Ce qui est en question, c'est la possibilité de déterminer la volonté du peuple, ce que veut le peuple, de manière incontestable. Les différents systèmes de votes ne dévoilent pas une préférence collective, qui existerait en soi, ils construisent une préférence, et cette construction peut être remise en cause. Elle pose également de nombreux problèmes de nature mathématique, qui continuent d'occuper de nombreux mathématiciens, à la frontière entre mathématiques, sciences politiques et économiques.

En philosophie, le problème est celui du nombre et de l'unité ou de la multitude et du peuple. Une objection de type sceptique consisterait à douter de l'existence même d'une préférence collective. Si le vote suggère l'idée qu'il existe « une » « opinion publique », comme somme des opinions individuelles, ou comme la moyenne des opinions ou l'opinion moyenne, il peut aussi dissimuler de profonds désaccords ainsi que de réelles tensions dans la société.

La volonté du peuple, notion si familière en démocratie, pourrait donc être une notion vide ou du moins vague. Et faute d'avoir un contenu précis, elle aurait essentiellement une fonction idéologique : elle serait un imaginaire qui légitime les institutions et les gouvernements (de même que la monarchie se référait à la volonté de dieu).

Deux questions pourront ainsi être dégagées et mises en avant :

- Existe-t-il réellement une volonté du peuple ou seulement des volontés particulières ?
- Le vote permet-il de connaître la volonté du peuple, si elle existe, et savoir ce qu'elle veut ?

Le scénario est exposé ici de manière sommaire, pour indiquer une mise en œuvre possible. Chacune de ces phases sera détaillée ci-dessous, dans les fiches destinées aux enseignants. Seront présentés : les objectifs ou idées directrices, le déroulé du cours, ainsi que quelques réactions des élèves.

Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Outils et supports	Durée ²
1	Professeur de philosophie	Questionnement sur la démocratie. Comparer deux manières de prendre des décisions collectives et deux manières, pour les citoyens, de participer à ces décisions : élections de représentants et délibération publique.	En classe de philosophie	Deux images à vidéo-projecter (assemblée et débat public) Fiche professeur 1	50 mn
2	Élèves. Professeur de mathématiques Professeur de philosophie.	Questionnement sur le vote pour élire des représentants. Existence de différents modes de scrutin. Analyse critique du scrutin uninominal. Deux étapes : 1) Activité mathématique : déterminer le vainqueur selon différents modes de scrutin 2) Discussion collective : limites et fonction du scrutin uninominal	En classe de mathématiques ou de philosophie	Tableau à vidéo-projecter (ordres de préférences) et fiche élève 1 Fiche professeur 2 pour l'étape 1 Fiche professeur 3 pour l'étape 2	Étape 1 : 50 mn Étape 2 : 50 mn
3	Élèves. Professeur de philosophie	Questionnement sur la délibération publique et ses apports. Deux textes sur la volonté générale et les controverses en démocratie. Exercice fait par les élèves. Correction du professeur.	En classe de philosophie	Fiche élève 2 Fiche professeur 4	1h50 mn
4	Élèves. Professeur de Mathématiques	Travail mathématique autour de la notion d'ordre en lien avec les systèmes de votes : formalisation mathématique (notamment l'axiome de transitivité qui fait défaut dans les systèmes de votes) et ses	En classe de mathématiques	Fiche élève 3 Fiche professeur 5	1h50 mn

2 Cette durée est donnée à titre indicatif et prévisionnel

		représentations (« graphe des duels », dans l'esprit de Condorcet) ; stratégie pour remédier au paradoxe de Condorcet (méthode de Schultze) ; brève discussion du théorème d'Arrow.			
5.	Élèves	Devoir à la maison sur le système de votes de Borda	A la maison	Fiche élève 4 Fiche professeur 6	

Description des fiches élèves :

1. Le vote et la démocratie, à la recherche de la volonté du peuple
2. Controverses et choix politiques dans une démocratie
3. Le vote et la démocratie, aspects mathématiques
4. Devoir à la maison

FICHE ELEVE N°1: LE VOTE ET LA DEMOCRATIE, A LA RECHERCHE DE LA VOLONTE DU PEUPLE

Lors d'une élection visant à sélectionner une personne parmi une liste de cinq candidats A,B,C, D et E, il est demandé aux électeurs de préciser dans leur bulletin de vote leurs préférences sous la forme d'un classement des candidats. Lors du dépouillement, on constate les résultats suivants :

% des électeurs	33%	16%	3%	8%	18%	22%
	A	B	C	C	D	E
Ordre	B	D	D	E	E	C
des	C	C	B	B	C	B
préférences	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

La deuxième colonne du tableau signifie que 33 % des électeurs placent A en première position, B en deuxième position etc.

9. A votre avis, quel candidat représente le mieux la volonté du peuple ? Donnez vos arguments en quelques lignes. Vous avez 5 min pour répondre à cette question, avant une discussion collective d'environ 10 min.

Candidat élu, à votre avis :

Vos arguments :

Vos notes de la discussion collective :

Ne pas tourner la page avant d'y être invité par le professeur

Nous avons déterminé les gagnants selon les deux modes de scrutins classiques suivants :

Définition : Dans le **scrutin majoritaire à un tour**, aussi appelé **vote de la pluralité**, le candidat qui a obtenu le plus de bulletins le plaçant en première position gagne l'élection.

Définition : Dans le **scrutin majoritaire à deux tours**, si un candidat obtient plus de 50 % de bulletins le plaçant en première position, il est élu. Sinon on retient les deux candidats ayant obtenu le plus de bulletins les plaçant en première position. Entre ces deux candidats, le vainqueur est celui qui devance son concurrent dans la majorité des bulletins.

Notre système de classements permet de prédire ce qui se passerait dans le cas du scrutin majoritaire à deux tours, si les préférences des électeurs restent identiques entre les deux tours (ce qui est loin de refléter la réalité, les électeurs pouvant changer d'avis ou bien décider de « voter utile », par exemple). Le système des classements suffit en effet à déterminer le report automatique des voix au second tour.

Nous allons maintenant présenter trois autres systèmes de votes, moins connus.

Définition : On dit qu'un candidat X **gagne son duel** face à un autre candidat Y si X est placé devant Y dans plus de 50 % des bulletins. Selon la **méthode de vote de Condorcet** (1743-1794, mathématicien et homme politique français), est déclaré vainqueur un candidat qui gagne ses duels face à tous les autres candidats.

10. Vérifier que C gagne l'élection selon la méthode de Condorcet.

Définition : La méthode de **vote préférentiel** (ou vote simple transférable) fonctionne de la manière suivante : si un candidat est classé en première position dans plus de 50 % des bulletins, il est élu. Si aucun des candidats n'atteint cette majorité absolue, le candidat qui a obtenu le moins de bulletins le classant en première position est éliminé. Un vote plaçant le candidat éliminé en première position est alors automatiquement transféré au candidat situé en deuxième position dans l'ordre de préférences. On compte alors de nouveau le nombre de voix et si une personne obtient plus de 50 % de bulletins la plaçant en tête, elle est élue. Si ce n'est toujours pas le cas, on reprend la procédure aussi longtemps qu'il le faut pour qu'un des candidats obtienne la majorité absolue.

11. Quel est le vainqueur selon le vote préférentiel ? On prendra soin de barrer successivement les lettres correspondant aux candidats éliminés dans le tableau des préférences.

Définition : Selon la **méthode de Borda**, on attribue, pour chaque bulletin classant les k candidats, $k - 1$ points au candidat en première position, $k - 2$ points au deuxième, etc., et 0 point au dernier. On additionne ensuite, pour chaque candidat, le nombre de points obtenus. Le vainqueur est le candidat qui obtient le plus de points.

12. Quel est le vainqueur selon la méthode de Borda ? Pour y répondre, on pourra compléter le tableau suivant :

candidat	1er	2ème	3ème	4ème	5ème	score
A	33	0	0	3	48	$33*4+3=135$
B						
C						
D						
E						

N.B. la seconde colonne du tableau donne le pourcentage de bulletin dans lesquels le candidat concerné arrive en première position, etc.

FICHE ELEVE N°2: CONTROVERSES ET CHOIX POLITIQUES DANS UNE DEMOCRATIE

TEXTE 1 : HENRI LEPAGE, *POURQUOI LA PROPRIETE ?* (1984)

La « volonté générale » devant laquelle tout le monde devrait s'incliner bien bas n'est qu'une fiction, tout simplement parce que la notion d'intérêt général ne peut avoir d'existence objective, indépendante de l'idée qu'on s'en fait. Par définition, j'ai *ma* propre conception de l'intérêt général. Mais vous avez aussi la *vôtre*. Aucun critère objectif ne permet de déterminer laquelle, de toutes ces conceptions individuelles, incarne le mieux ce qu'est ou devrait être véritablement cet intérêt général.

La règle du vote politique n'est elle même qu'un pis-aller qui ne permet pas davantage que toute autre procédure d'objectiviser cette notion idéale. Par définition l'élu, lorsqu'il dit parler au nom de l'intérêt général, n'exprime le plus sincèrement du monde (lorsqu'il est réellement sincère) que *sa* conception, même si celle-ci s'est forgée au terme de débats et de discussion prolongées, et si les disciples de l'élection le contraignent à tenir compte des opinions des autres. Il n'exprime *au mieux* que ce qu'il croit être la conception de la majorité de ses concitoyens.

TEXTE 2 : JURGEN HABERMAS, « IL FAUT SAUVER LA PRESSE DE QUALITE », Entretien publié dans le journal *Le Monde* du 21 mai 2007

Nous vivons dans des sociétés pluralistes. Le processus de décision démocratique ne peut, sans crainte de l'opposition parfois profonde des visions du monde, déployer une force de légitimation capable de convaincre la totalité des citoyens que s'il combine deux exigences : il doit associer une capacité d'intégration, et donc la participation de tous les citoyens à égalité de droit, avec une bataille d'opinion menée de manière plus ou moins discursive.

Sans controverses qui ouvrent sur la délibération, il devient en effet impossible de fonder en raison l'hypothèse selon laquelle le processus démocratique peut déboucher sur des résultats à long terme plus ou moins raisonnables. La formation démocratique de l'opinion a une dimension épistémique, car il s'agit à travers elle de critiquer des affirmations et des appréciations fausses.

TRAVAIL SUR LES TEXTES :

Expliquez la thèse que soutient Lepage, son argument, et à quelle critique conduit cette thèse :

Quel problème se pose Habermas ? Quelle solution propose t-il ? Avec quels arguments ?

Quelles sont les idées qui se rejoignent dans ces deux textes ?

Quelles sont les idées qui s'opposent dans ces deux textes ?

Montrez que Lepage et Habermas ont deux visions différentes du rôle d'une élection :

FICHE ELEVE N°3: LE VOTE ET LA DEMOCRATIE, ASPECTS MATHEMATIQUES

Nous avons vu dans la partie 1 que le choix du mode de scrutin, généralement inscrit dans une constitution ou un règlement, influence profondément le résultat d'une élection.

Il existe plusieurs approches du vote individuel. Nous resterons ici dans le cadre des *listes de préférences*. Les procédés de Condorcet ou de Schulze (voir plus loin) ne sont alors que des méthodes parmi d'autres pour agréger ces préférences, c'est-à-dire passer des listes de préférences (individuelles) à une liste collective de préférences. Ces procédures d'agrégation peuvent être étudiées dans le cadre mathématique des relations « binaires » (entre deux éléments). Voici quelques notions mathématiques utiles pour présenter ces méthodes.

I – Relations d'ordre et graphes orientés

1) Définitions

Soit G un ensemble. Une *relation binaire* R sur G est une propriété portant sur les couples d'éléments de G (d'où le nom de « binaire »). Si la propriété est vérifiée pour le couple (x, y) , on écrit alors $x R y$ et l'on dit que x est lié à y par R . Par exemple, la relation de divisibilité $R=|$ est une relation binaire sur les entiers naturels : $2 R 4$, $2 R 0$, mais 2 n'est pas lié à 3 par R .

Une *relation d'ordre* sur G , notée \geq , est une relation binaire ayant trois propriétés remarquables : la *réflexivité*, la *transitivité* et l'*antisymétrie* :

$$\begin{aligned} \forall x \in G, x \geq x & \quad \text{(réflexivité)} \\ \forall (x, y, z) \in G^3, (x \geq y \text{ et } y \geq z) \Rightarrow x \geq z & \quad \text{(transitivité)} \\ \forall (x, y) \in G^2, (x \geq y \text{ et } y \geq x) \Rightarrow x = y & \quad \text{(antisymétrie)} \end{aligned}$$

On lit $x \geq y$ comme suit : « x est plus grand ou égal à y pour \geq ». Par exemple, l'ordre habituel \geq définit une relation d'ordre sur les nombres entiers ou encore les nombres réels. La divisibilité est une autre relation d'ordre sur les entiers naturels, mais pas sur les entiers relatifs (2 et -2 se divisent mutuellement mais ne sont pas égaux).

Lorsque $x \geq y$ et $x \neq y$, on dit que x est *strictement* plus grand que y et l'on note $x > y$. La relation binaire $>$ est transitive et antisymétrique (l'implication logique n'est jamais contredite), mais elle n'est pas réflexive.

La notion de relation d'ordre est très générale et s'applique à une grande diversité de situations, dont les systèmes de vote, comme nous allons le voir.

Un ensemble fini est *totalelement ordonné* lorsque tout élément peut être comparé à un autre.

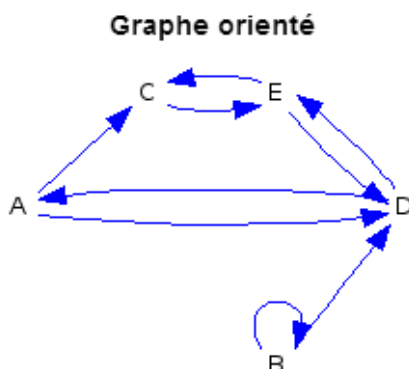
1. Prouver que tout ensemble fini totalelement ordonné admet un élément plus grand ou égal à tous les autres pour la relation \geq et qu'il est unique. On l'appelle le *plus grand élément*.

2) Représenter une relation binaire par un graphe orienté

On peut représenter une relation binaire R sur un ensemble G par un graphe orienté. Considérons,

par exemple, un ensemble à 5 éléments $G = \{A, B, C, D, E\}$ muni d'une relation R . Le graphe représentant la relation R est défini comme suit : chaque sommet correspond à un élément de G , chaque flèche entre deux sommets indique que les éléments correspondants sont liés par la relation.

Exemple : le graphe ci-dessous indique les relations $A R C$ (flèche de A vers C), $B R B$ (boucle en B), etc.



Graphe réalisé à l'aide de l'outil de tracé de graphe <http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi>

2. Ecrire toutes les relations entre deux éléments représentées par ce graphe.

3) Application aux listes de préférences

Revenons au contexte des votes sous forme de listes de préférences : dans ce qui suit, les éléments de G pourront représenter aussi bien des candidats que des propositions ou des décisions collectives d'un groupe, et chaque bulletin de vote est un ordre total strict sur G .

Il existe différents procédés pour *agréger* ces préférences, c'est-à-dire passer des listes de préférences individuelles, les bulletins de vote, à une liste collective de préférences. Une famille de tels procédés consiste à considérer les « duels » entre les candidats.

Définition : on dit que A est préféré *collectivement* à B et on note $A P_C B$ si et seulement si A est préféré à B dans au moins (\geq) la moitié des bulletins.

La relation binaire P_C est réflexive et définie pour chaque couple de G mais n'est pas nécessairement transitive ou antisymétrique.

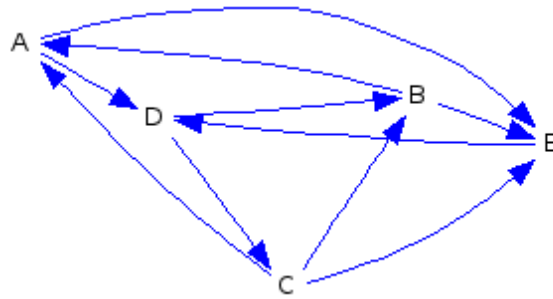
On supposera cependant dans ce qui suit qu'on peut toujours séparer deux candidatures à égalité. En conséquence, on travaillera avec la relation définie ci-dessous :

Définition : on dit que A gagne son duel face à B et on note $B \rightarrow A$ si et seulement si A est préféré à B dans plus (**strictement**) de la moitié des bulletins.

Cette relation binaire \rightarrow , définie pour chaque couple d'éléments de G , est bien entendu non réflexive et l'on ne peut avoir $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ simultanément, comme pour la relation $>$ issue d'une relation d'ordre \geq . Cependant, elle n'est pas toujours transitive.

Le graphe représentant la relation \rightarrow , qu'on nommera **graphe des duels**, sera donc un graphe *complet* qui ne comportera ni boucle (non réflexivité), ni couple de sommets reliés par des flèches dans les deux sens.

Exemple : ci-dessous, on a $B \rightarrow A$ (A gagne son duel face à B); $A \rightarrow D$ etc.



3. Existe-t-il un vainqueur de Condorcet dans le graphe ci-dessus ? Avant de répondre à cette question :
 - définir le vainqueur de Condorcet au moyen de la relation \rightarrow (rappelons qu'un vainqueur de Condorcet est celui qui gagne tous les duels) ;
 - dessiner un graphe orienté avec 3 éléments dans lequel il existe un vainqueur de Condorcet.
4. Montrer que la relation binaire \rightarrow est non transitive si et seulement s'il existe un « circuit » $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow X$ entre trois sommets du graphe orienté.

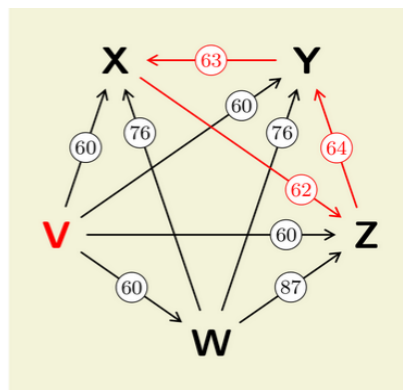
Nous venons de voir que le vainqueur de Condorcet n'existe pas toujours : on parle du « paradoxe de Condorcet ». En effet, il semble contre-intuitif à première vue qu'il puisse ne pas exister de plus grand élément. La représentation sous forme de graphe permet de comprendre ce phénomène : l'ordre sous-jacent est très différent de celui que l'on a sur les entiers par exemple, qui peuvent être classés sur une droite. Les méthodes de Condorcet sont des procédures d'agrégation qui proposent des transformations du graphe des duels pour rendre la relation \rightarrow transitive lorsque celle-ci ne l'est pas, ce qui suffit à garantir l'existence d'un plus grand élément.

II – Essayons de faire mieux : la méthode de Schulze

Nous allons aborder un système de vote inventé récemment (1997), appartenant à la famille des « méthodes de Condorcet »³.

L'idée de Schulze est la suivante : « au fond, une élection, ce n'est jamais qu'une astuce pour éviter les désagréments des révolutions : on consulte les électeurs afin de savoir qui finirait par gagner la révolution sans avoir à se battre ! »⁴.

Voyons sur un exemple d'élection présidentielle en quoi consiste cette méthode :



³ Ce système est utilisé par plusieurs communautés du logiciel libre (Wikipédia, « hackers », partis pirates etc.) pour prendre des décisions, notamment lorsqu'il n'y a pas de candidat de Condorcet.

⁴ Rémi Peyre — «Et le vainqueur du second tour est...» — Images des Mathématiques, CNRS, 2012.

Dans le graphe orienté et pondéré ci-dessus, chaque sommet représente un candidat et chaque flèche pondérée représente le résultat des duels entre les candidats : la flèche allant de Y à X, accompagnée du nombre 63, signifie que 63% des électeurs préfèrent X à Y.

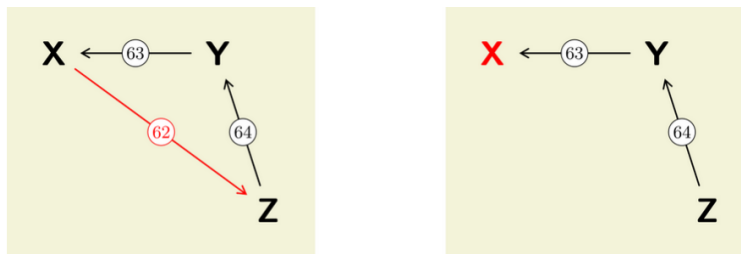
L'interprétation, pour Schulze, du sens de la flèche est : « si Y était président, 63 % des électeurs pourraient se liguer contre lui pour le destituer en faveur de X ».

Considérons que ces révolutions se produisent et que le pouvoir change donc de mains à chaque fois qu'il subsiste une flèche partant du détenteur du pouvoir, la flèche retenue étant celle qui mobilise le plus grand nombre d'électeurs ou l'une d'elles, sans préférence, en cas d'égalité.

Dans notre exemple, imaginons que V ait le pouvoir. Dans un premier temps, V perd le pouvoir au profit de l'un des autres candidats. Supposons qu'il s'agisse de W : ce dernier perd ensuite le pouvoir au profit de Z, qui doit le céder à Y, qui le cède à X, qui le cède à Z, etc. On tombe sur un circuit XYZ, dont les flèches sont dessinées en rouge.

Schulze appelle l'ensemble $\{X,Y,Z\}$ le « groupe de tête ». Par définition, un candidat C appartient au groupe de tête si, pour tout autre candidat D, il existe un chemin (succession de flèches) de D à C.

Schulze propose de mettre fin à cette litanie de révolutions en réduisant le groupe de tête par la suppression des flèches les plus faiblement pondérées, dans l'ordre de pondération (on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas deux flèches ayant exactement la même force), jusqu'à ce que le groupe de tête soit réduit à une seule personne. Sur notre exemple, on supprime la flèche de X vers Z : l'idée de Schultz est qu'il est plus difficile de faire une révolution avec 62 % qu'avec 63 % ou 64 % des personnes impliquées.



C'est donc le candidat X qui est déclaré vainqueur. En effet, dans le nouveau diagramme (à droite), le groupe de tête ne contient que le candidat X.

4. Voici les résultats (en nombre de bulletins) obtenus lors d'un vote d'un groupe de 37 personnes sur une proposition avec les mentions suivantes : éliminée (E), à rediscuter (R) ou adoptée (A).

A R E : 4 ; A E R : 14 ; R A E : 0 ; R E A : 16 ; E A R : 3 ; E R A : 0

Rappel : la liste de préférence A R E correspond au classement A premier, R deuxième et E troisième.

Représentez ces résultats par un graphe orienté et déterminez le vainqueur selon la méthode de Schulze.

5. Prouvez que cette méthode respecte le critère de Condorcet (le vainqueur de Condorcet, s'il existe, sera le vainqueur selon la méthode de Schulze).

On peut démontrer que la méthode de Schulze donne un vainqueur unique sous l'hypothèse qu'il n'y a pas deux flèches ayant exactement la même force dans le diagramme des préférences binaires, ce qui est toujours le cas en pratique quand il y a beaucoup d'électeurs. Par contre, la méthode de Schulze est sensible à la manipulation, par exemple lors de votes non sincères, comme dans le cas de la méthode de Borda (voir DM). Pour autant, elle est partiellement robuste à la manipulation : on

peut démontrer un théorème de robustesse à la manipulation par des votes non sincères, sous certaines hypothèses (dont le fait que la majorité absolue des électeurs vote sincèrement).

III – Comparaison

Système de vote	Caractéristiques
Uninominal majoritaire à deux tours	<ul style="list-style-type: none"> - Organisation facile. Mais : - Favorise le vote stratégique, c'est-à-dire non sincère. - Ne respecte pas le critère de Condorcet
Méthode de Condorcet	<ul style="list-style-type: none"> - Si un candidat gagne tous ses duels contre les autres candidats, il est déclaré vainqueur (critère de Condorcet). Mais : - Ne garantit pas l'existence d'un vainqueur.
Méthode de Borda (voir DM)	<ul style="list-style-type: none"> - Introduit des niveaux d'appréciation des candidats. - En dehors des rares cas d'égalités, elle garantit un vainqueur (plus grand élément). Mais : - Ne respecte pas le critère de Condorcet. - La pondération est arbitraire et influe sur le résultat. - Le scrutin est manipulable et favorise le vote non sincère.
Méthode de Schulze	<ul style="list-style-type: none"> - Respecte le critère de Condorcet. - Ne souffre pas du paradoxe de Condorcet. Mais : - Est vulnérable à certaines manipulations.

Pour ce qui est des méthodes reposant sur les listes de préférences que nous avons étudiées, l'économiste Arrow (1952) a montré qu'il est impossible d'avoir une procédure de vote remplissant simultanément certaines conditions qui paraissent raisonnables⁵, dès que l'on vote sur un ensemble de choix comprenant au moins 3 options (par exemple 3 candidats). Faut-il conclure de ce résultat négatif qu'il est vain de se tourner vers les systèmes de vote pour prendre une décision collective ? Cette problématique de construction de bonnes procédures d'agrégation des préférences individuelles fait l'objet d'intenses recherches à la croisée entre mathématiques, sciences économiques et politiques. Une solution au problème d'Arrow est d'affaiblir les conditions, en particulier le critère d'indépendance qui, pour certains chercheurs, ne refléterait pas bien le comportement humain. Ainsi le système de Schulze vérifie-t-il le « critère d'indépendance locale » pour lequel X gagne encore l'élection si l'on rajoute un candidat Y qui n'est pas dans le groupe de tête. Une autre solution est de construire des systèmes de vote où les voix sont exprimées par d'autres moyens que les listes de préférences. Pour conclure, nous pouvons constater qu'il existe de nombreux systèmes de vote possibles, qui vérifient ou non des critères et possèdent ou non des propriétés de robustesse à la manipulation. S'il existe des systèmes qui présentent des avantages par rapport au scrutin uninominal (par exemple, qui vérifient le critère de Condorcet et sont davantage robustes), une difficulté majeure est de se mettre d'accord sur quel système adopter : ceci nécessite un débat politique qui est d'autant plus difficile à mener que le système actuel favorise les grands partis en place.

5 *Non-dictature* : les préférences d'un seul individu ne doivent pas déterminer le résultat collectif ; *Totalité* : toutes les propositions possibles doivent avoir une chance d'être adoptées ; *Universalité* : on doit toujours pouvoir déduire une volonté collective à partir des volontés individuelles ; *Unanimité* : si un candidat est préféré par la totalité des votants, il doit être le gagnant ; *Indépendance* : si un candidat X gagne l'élection, et si une nouvelle possibilité Y est ajoutée, seuls X ou Y peuvent gagner l'élection.

Pourquoi pas des points ? La méthode de Borda

I. La méthode de Borda

Pour tenter d'éviter le paradoxe de Condorcet (cf partie 2), on peut essayer d'utiliser un système de vote par points. L'avantage des points est qu'il ne peut y avoir des cycles orientés (ou circuits). Voici la méthode proposée par Borda (1733 – 1799) contemporain de Condorcet.

Chaque électeur classe les k candidats selon sa préférence : on obtient une liste ordonnée de k éléments. On attribue alors $k - 1$ points au premier élément, $k - 2$ points au deuxième, etc., et 0 point au dernier élément de la liste. On additionne alors le nombre de points obtenus par les candidats dans les classements des électeurs. Le classement collectif est effectué à partir de la taille des scores obtenus par les candidats, le premier étant l'élément qui a obtenu le plus de points, etc.

On ne traitera pas les cas d'égalités, peu fréquents lors de scrutins rassemblant un grand nombre de votants.

Pour 3 candidats, l'élément classé premier par un votant a 2 points, le second 1 point et le dernier 0 point, ce qu'on résume par le vecteur score (2 ; 1 ; 0).

Voici les résultats d'un scrutin d'une élection de délégués à laquelle se présentent trois élèves Assia, Bertrand et Carole, représentés respectivement par les lettres A, B et C :

A B C : 2 ; A C B : 9 ; B A C : 0 ; B C A : 10 ; C A B : 2 ; C B A : 0

Rappel : A B C est la liste des préférences où A est classé premier, B second et C troisième.

- Déterminer le score obtenu par chaque candidat par la méthode de Borda. Quel est le résultat de l'élection ?
- Expliquer pourquoi la méthode de Borda aboutit à un ordre strict entre les candidats (lorsqu'on exclut les cas d'égalités).
- Après un sondage, les élèves de la classe pressentent la victoire de A. Deux électeurs ayant pour « réelle » liste de préférences B C A décident de voter, par choix stratégique, C B A. Quel est l'impact de cette modification sur le scrutin ?
- Quelle conclusion pouvez-vous tirer de l'exemple précédent concernant la sincérité du scrutin ?

Pour éviter les votes stratégiques, on interdit les sondages quelques semaines avant le scrutin. Cependant, un élève fait remarquer que les scores donnés selon le classement lui paraissent arbitraires. Pourquoi ne pas modifier la pondération ? Voici, à partir du même exemple, le résultat de l'élection pour différentes pondérations :

Pondération	(1; 0; 0)	(2; 1; 0)	(1,5 ; 1 ; 0)	(1; 1; 0)
Score de A	11	24	18,5	13
Score de B	10	22	16	12
Score de C	2	23	23	21
Résultat de l'agrégation des préférences.	$A >_1 B >_1 C$	$A >_2 C >_2 B$	$C >_3 A >_3 B$	$C >_4 A >_4 B$

N.B. : Les relations d'ordre associées à la première, la deuxième etc. procédure d'agrégation sont notées respectivement $>_1$, $>_2$ etc.

- Commentez ces résultats.

Remarque : la pondération (1; 0; 0) correspond à la procédure de pluralité (appelée majorité simple en France) ; la pondération (1; 1; 0) à la règle d'anti-pluralité.

- Soit f une fonction affine croissante. Montrer que la méthode de Borda avec la pondération $(f(2); f(1); f(0))$ ne modifie pas le résultat obtenu avec la pondération (2; 1; 0). Peut-on généraliser ce résultat à une élection avec p candidats ? Justifier votre réponse.

II. La méthode de Borda et le critère de Condorcet

Voici les résultats obtenus lors d'une élection de 4 délégués Aristide (A), Bruno (B), Charlotte (C) et Daniel (D). Seules sont notées les listes de préférences ayant obtenu des voix.

A B C D : 5 ; A C B D : 4 ; D B A C : 2 ; D B C A : 6 ; C B A D : 8 ; D C B A : 2

- Existe-t-il un candidat de Condorcet (vainqueur de tous les duels) ?
- Quel est le vainqueur selon la méthode de Borda (c'est-à-dire avec le vecteur score (3;2;1;0)) ?

Condorcet, dans son *Discours Préliminaire à l'Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*, a critiqué la méthode de Borda qui peut avoir comme résultat la victoire d'un vainqueur différent du vainqueur de Condorcet même lorsque celui-ci existe. Or selon Condorcet, ce candidat devrait être choisi par le mode de scrutin. Ce critère est appelé « critère de Condorcet ».

Dans ce dernier exemple, la méthode de Borda a permis de désigner un vainqueur mais le critère de Condorcet n'est pas vérifié.

Description des fiches professeurs :

1. Comment organiser la démocratie ?
2. Le vote et la démocratie, à la recherche de la volonté du peuple
3. Analyse critique du scrutin uninominal
4. Controverses et choix politiques dans une démocratie : les apports de la délibération
5. Le vote et la démocratie, aspects mathématiques
6. Pourquoi pas de points ? La méthode de Borda

FICHE PROFESSEUR N°1 : COMMENT ORGANISER LA DEMOCRATIE ?

Objectifs :

Présenter les questions directrices du cours :

- Deux questions qui sont liées l'une à l'autre : 1) la légitimité des choix collectifs ou des décisions politiques et 2) la participation des citoyens et la prise en compte de leurs opinions pour faire ces choix collectifs, donc le pouvoir ou la liberté politique dont ils disposent dans les États modernes.
- Distinguer deux manières de répondre. D'un côté une démocratie représentative ou indirecte. Les citoyens délèguent le pouvoir à des représentants. La légitimité politique repose sur la volonté du peuple telle qu'elle s'exprime au moment des élections. Le vote est l'acte essentiel de la citoyenneté. De l'autre une démocratie délibérative fondée sur des espaces publics de discussion. La légitimité provient d'une délibération publique où se construit une volonté collective. La participation aux délibérations est l'acte essentiel de la citoyenneté.
- Interroger les avantages et les risques que comportent ces deux manières d'organiser la démocratie, de manière à introduire leur étude respective dans la suite du cours.

Difficultés prévisibles :

La représentation et l'objet de la politique :

La politique « politicienne » donne souvent le spectacle d'une lutte pour le pouvoir qui se réduit à des calculs d'intérêts, des renversements d'alliance, des rivalités et des querelles entre individus. Cependant la politique est aussi l'activité qui organise la vie en société. Il s'agit de prendre des décisions dans l'intérêt de tous. Ces décisions, parce qu'elles sont complexes, parce qu'elles impliquent des acteurs très différents et des enjeux multiples (économiques, sociaux, environnementaux, de justice sociale, ou encore des conflits de valeurs) nécessitent un débat argumenté. D'après nos observations en classe, les élèves ont tendance à réduire la politique à une querelle de personne et sont peu réceptifs à l'importance du débat d'idées.

De ce fait : 1) Les élèves s'en tiennent parfois à une conception « désabusée » de la politique qui considère qu'une « classe » se l'est appropriée et qu'il n'existe pas de réelle liberté ou pouvoir des citoyens. Une telle conception oppose souvent le « peuple » aux « élites », mais sans réfléchir aux moyens et aux enjeux d'une appropriation démocratique de l'État 2) Les élections ne sont pas perçues comme le moment d'un choix collectif portant sur l'organisation de la société, où les citoyens auraient la possibilité d'exprimer leur opinion sur des programmes 3) L'idée d'une démocratie délibérative, qui permettrait aux citoyens de se former une opinion plus cohérente et plus éclairée, ne va pas de soi pour les élèves et apparaît difficile à faire émerger dans un cours dialogué.

La notion de volonté du peuple ou de volonté générale :

En démocratie la légitimité d'une décision politique repose sur la volonté du peuple, qui est souveraine. Pour tenter de clarifier cette notion on pourra distinguer deux interprétations, qui correspondraient aux deux manières d'organiser la démocratie et de penser la légitimité politique. D'un côté, la volonté générale se définit par sa conformité avec l'intérêt général, par opposition aux volontés particulières qui visent des intérêts particuliers. Elle devrait émerger d'une délibération collective : dans l'idéal différents points de vue sur le bien commun s'affrontent, et un point de vue rationnel et consensuel se construit sur la base des meilleurs arguments. D'un autre côté, si on met en doute la possibilité d'un consensus autour d'une conception du bien commun, la volonté générale se réduit à la volonté la plus généralement partagée ou la volonté majoritaire. Elle se définit donc lors d'un vote en comptabilisant les suffrages exprimés.

Outil pédagogique :

Deux images. D'un côté le parlement français : soit une image de représentants, élus, chargés de prendre les décisions pour l'ensemble des citoyens. De l'autre une image de débat public entre citoyens.

D'expérience un cours dialogué sur la démocratie, s'il ne comporte aucun apport du professeur, permet seulement de recueillir les critiques des élèves à l'encontre du personnel politique (considéré comme une « élite » ou une « classe à part » qui gouverne dans son propre intérêt). L'exemple d'un débat public, ici sur l'extension du port de Dunkerque, doit permettre deux choses :

- Attirer l'attention sur l'objet de la politique. Celle-ci ne peut pas se réduire à une question et une querelle de personnes. Elle consiste à prendre des décisions sur des sujets complexes qui touchent l'ensemble des citoyens. Comment prendre ces décisions ?
- Introduire une alternative aux élections. S'interroger sur la meilleure manière de prendre en compte l'avis des citoyens et de faire des choix dans l'intérêt de tous. Réfléchir ainsi aux moyens d'une appropriation démocratique de l'État (au lieu de rester dans le rejet de la politique).

Déroulé du cours :

1) Première description des images : définition de la politique :

- Parlement français, des députés.
- Débat public sur l'agrandissement du port de Dunkerque, des citoyens.
- Exemple de ce débat public. Septembre – Décembre 2017. Extension du port de Dunkerque. Permettre d'accueillir et de décharger 2 ou 3 gros navires en même temps (au lieu d'un seul actuellement). Coût très important (640 millions d'euros). Répercussions sur la vie quotidienne, l'urbanisme, l'environnement (liées notamment à la place des infrastructures).

Point commun entre les images : députés et citoyens font de la politique, parlent politique.

Définir la politique :

- ne se réduit pas à une lutte pour le pouvoir entre des personnes ou des partis
- prendre des décisions pour organiser la vie en société : donc traiter des problèmes complexes où interviennent différents enjeux et acteurs (économique, social, environnement, urbanisme, vie quotidienne des riverains)
- trouver la meilleure solution pour tous (l'intérêt général)

Problème : Comment décider de l'intérêt général ? Et qui doit décider ?

2) Retour sur la première image : la démocratie représentative :

Définir le mode de décision :

- Un groupe de personnes décide pour l'ensemble. Sont élus. Leur autorité ou leur légitimité repose sur la volonté du peuple telle qu'elle s'exprime au moment des élections. Doivent porter des propositions et représenter les différents courants d'opinion de la société.
- Démocratie indirecte. Les citoyens n'exercent pas directement mais délèguent le pouvoir à des représentants. Le vote est la forme que prend la participation politique dans les États modernes où il semble admis qu'une démocratie directe est impossible.

Questionner ce mode de décision :

- Nécessité d'une représentation. Seule une petite partie, et non l'ensemble des citoyens, peut participer directement aux décisions politiques : 1) Territoire trop étendue et population trop nombreuse pour assembler les citoyens dans les États-nations modernes 2) Tous ne possèdent pas les compétences politiques nécessaires aux prises de décisions dans l'intérêt général.
- Risques d'une dérive oligarchique de la démocratie : une « classe dirigeante » se constitue et sert des intérêts particuliers. Dérive liée à la transformation des partis en machine électorale et à la professionnalisation de la politique.
- Attirer l'attention sur le vote : sa fonction et ses limites. Le lien entre les dirigeants et la population est maintenu par le vote. Le vote devrait permettre aux citoyens un moyen d'exprimer leurs préférences et d'exercer un contrôle sur les élus (sélectionner les dirigeants qui agissent dans l'intérêt de tous, de manière honnête et efficace, et révoquer ceux qui privilégient des intérêts particuliers). Est-ce réellement le cas ?
- Interroger, à travers le vote, la liberté politique dont dispose les citoyens dans les États modernes. Ne doit-on pas considérer que la liberté politique, entendue comme le pouvoir de participer aux décisions collectives, par opposition à une liberté civile ou individuelle, est très réduite ?

3) Proposer une alternative : retour sur la seconde image : la délibération publique :

Définir le mode de décision :

- L'ensemble des citoyens concernés décident eux mêmes et collectivement.
- Démocratie délibérative. La décision légitime est celle qui résulte d'un processus de délibération collective. La délibération doit inclure de manière équitable tous ceux qui sont concernés par la décision. La participation aux délibérations et donc l'existence de lieux délibératifs, sont la clé de voûte de la citoyenneté.

Discuter les avantages d'un tel processus.

- Permettre des décisions plus justes car : 1) Plus inclusive et plus équitables. La délibération doit permettre une meilleure participation politique et l'intégration des différentes opinions. A la fois parce qu'elles sont écoutées et parce que l'argumentation même, pour être recevable, doit tenir compte du point de vue des autres. 2) Plus rationnelle. La délibération conduit à écarter les mauvais arguments et rechercher les meilleurs à la fois pour fonder les décisions et permettre une adhésion de tous. Cette recherche du meilleur argument permet d'éclairer les différentes opinions de sorte que les citoyens pourront faire des choix plus informés et plus cohérents.
- Ne pas ignorer l'écart qui peut exister entre l'idéal et la réalité. 1) Un débat constructif est très exigeant et difficile à rendre possible en pratique. Notamment parce que les citoyens ne possèdent pas les compétences nécessaires pour argumenter et s'écouter mutuellement. De sorte que le consensus peut n'être qu'apparent : 2) la division des opinions, liée à la diversité des intérêts et des conceptions de l'intérêt commun, peut ne pas être dépassée ; et 3) au lieu de s'exprimer librement et de s'informer, les opinions peuvent être étouffées ou influencées : pressions, manipulations, persuasions.

4) Conclusion : rappeler les questions importantes :

- La politique doit viser l'intérêt commun, mais comment déterminer l'intérêt commun compte tenu de la diversité des opinions et des intérêts présents dans une société ?
- La légitimité politique en démocratie repose sur la volonté du peuple, mais qu'est-ce que la volonté du peuple : comment prendre en compte l'avis des citoyens ?
- Deux manières d'organiser la démocratie et donc deux questionnements : sur le vote et sur la délibération.

Référence utiles :

- Les arguments en faveur d'une démocratie représentative sont développés au moment de l'institution des démocraties américaines et française à la fin du XVIIIème siècle. Par exemple Madison dans *Le Fédéraliste* ou l'abbé Sieyès qui oppose la souveraineté nationale, incarnée par ses représentants, à la souveraineté populaire.
- Constant *De la liberté des anciens comparée à celle des modernes*. Opposition entre deux formes de citoyenneté ou de liberté. « La liberté des anciens » qui est avant tout politique, et « la liberté des modernes » qui est essentiellement une liberté individuelle s'exerçant dans la vie privée.
- Aristote, *Les politiques*. Définition de l'homme comme « animal politique » en tant qu'il possède le « logos ». Capacité à argumenter sur le bien et le mal, le juste et l'injuste. Construction de notions communes qui sont le fondement de la vie en commun. Distinction entre sociétés animales et sociétés humaines.

FICHE PROFESSEUR N°2: LE VOTE ET LA DEMOCRATIE, A LA RECHERCHE DE LA VOLONTE DU PEUPLE

Enoncé du problème posé aux élèves :

Lors d'une élection visant à sélectionner une personne parmi une liste de cinq candidats A, B, C, D et E, il est demandé aux électeurs de préciser dans leur bulletin de vote leurs préférences sous la forme d'un classement des candidats. Lors du dépouillement, on constate les résultats suivants :

% des électeurs	33%	16%	3%	8%	18%	22%
	A	B	C	C	D	E
Ordre	B	D	D	E	E	C
des	C	C	B	B	C	B
préférences	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

La deuxième colonne du tableau signifie que 33 % des électeurs placent A en première position, B en deuxième position etc.

Objectif de ce travail :

On va voir que, selon le mode de scrutin choisi, chacun des 6 candidats peut être vainqueur de l'élection, ce qui met en évidence la difficulté à faire émerger la volonté générale et pose la question d'un « bon » mode de scrutin.

Déroulement de la séquence :

Le professeur s'assurera de la compréhension du tableau et surtout de la notion d'ordre de préférences (**5 min**).

13. A votre avis, quel candidat représente le mieux la volonté du peuple ? Reportez votre réponse sur le billet fourni et donnez vos arguments en quelques lignes. Vous avez 5 min pour répondre à cette question, avant une discussion collective d'environ 10 min.

La classe procédera à un vote à main levée à l'issue des 5 min, ce qui permet de simuler une ambiance électorale. Cette durée très limitée laisse peu de temps aux calculs et favorise le recours à l'intuition (voir ci-dessous). Certains calculs élémentaires sont bien sûr attendus : par exemple, C arrive premier avec $8+3=11$ % des voix. On notera les résultats au tableau. Le professeur demandera aux élèves leurs arguments et discutera ces derniers avec les élèves (10 min).

De nombreuses expérimentations en licence 1 à l'université par Nicolas Saby, enseignant-chercheur à Montpellier, ont permis de dégager les éléments suivants :

- D n'est en général jamais choisi ;
- A et E sont en général choisis par moins de 10 % des élèves. Par contre, ceux qui les choisissent basent leur argumentation sur une théorie : ces élèves reconnaissent que A est le gagnant du scrutin uninominal à 1 tour et E celui du scrutin uninominal à 2 tours.

- B et C sont les candidats majoritairement désignés comme vainqueurs par les élèves, mais ces derniers ne possèdent pas la connaissance des systèmes de vote qui permettent d'asseoir ces choix (les systèmes de Borda et de Condorcet respectivement). C bénéficie en général d'un peu plus de voix que B de la part des élèves. Parmi les arguments avancés par les élèves, lorsqu'il s'agit de rationaliser leur intuition (peu d'élèves en sont en général capables) : C n'arrive jamais dans les 2 dernières places. C'est une situation très différente de celle de A qui est 4 fois dernier (détesté par 64 % des électeurs), ou encore celle de E qui totalise également des scores importants dans les bas classements. De façon analogue, B apparaît comme un candidat qui semble apprécié globalement par les électeurs.

Au vu de cette analyse, la discussion avec le professeur de mathématiques permettra de faire émerger les éléments suivants :

A et E sont identifiés comme les candidats des scrutins uninominaux à 1 et 2 tours. Concernant le scrutin à deux tours, il est important que le professeur de mathématiques prenne 2 min pour effectuer les calculs avec les élèves. La consigne suivante pourra être donnée aux élèves : en s'appuyant sur le tableau, examiner le report des voix (vers A ou E, qui sont les gagnants du premier tour), pour chacune des 6 catégories d'ordre de préférences.

On obtient :

33 %	16 %	3 %	8 %	18 %	22 %
A	E	A	E	E	E

Ainsi A totalise 36 % des voix au second tour et E 64 %. Le gagnant est E.

Les définitions suivantes figurent sur la fiche élève, au dos de la page. Elles sont destinées à institutionnaliser ce qui a émergé lors de la discussion collective, avant d'aborder d'autres systèmes de votes.

Définition : Dans le **scrutin majoritaire à un tour**, aussi appelé **vote de la pluralité**, le candidat qui a obtenu le plus de bulletins le plaçant en première position gagne l'élection.

Définition : Dans le **scrutin majoritaire à deux tours**, si un candidat obtient plus de 50 % de bulletins le plaçant en première position, il est élu. Sinon on retient les deux candidats ayant obtenu le plus de bulletins les plaçant en première position. Entre ces deux candidats, le vainqueur est celui qui devance son concurrent dans la majorité des bulletins.

En considérant que les préférences des électeurs restent identiques entre les deux tours (ce qui est loin de refléter la réalité, les électeurs pouvant changer d'avis ou bien décider de « voter utile », par exemple), notre système des classements permet de prédire ce qui se passerait dans le cas du scrutin majoritaire à deux tours : les classements permettent en effet de déterminer le report automatique des voix au second tour.

Du point de vue philosophique, les résultats mis en évidence pendant la discussion permettent de mettre en évidence les points suivants :

- La mise en commun est source d'étonnement pour la classe : si peu d'élèves considèrent les candidats A ou E comme « représentatifs » de l'opinion majoritaire, ils seraient néanmoins élus dans le cadre de notre mode de scrutin (uninominal à un ou deux tours).
- Ceci permet d'introduire l'idée que notre mode de scrutin est potentiellement problématique, c'est-à-dire qu'il ne permet pas de faire émerger l'opinion générale, au sens où l'entend notre

intuition à l'observation des données.

- On pourra alors interroger comment justifier ou rationaliser l'intuition qui, le plus souvent, considère les candidats B et C comme les plus « représentatifs » de l'opinion générale.

Pour avancer davantage, il est nécessaire d'introduire les éléments théoriques manquants, c'est-à-dire des systèmes de vote qui pour le même scrutin proposent différents vainqueurs, et en particulier les candidats B et C :

- système de Condorcet : C est gagnant ;
- système de Borda : B est gagnant ;
- vote simple transférable ou vote préférentiel : D est gagnant.

14. Vérifier que C gagne l'élection selon la méthode de Condorcet. (10 min, en incluant la lecture de ce qui précède sur le verso de la fiche élève 1)

Définition : On dit qu'un candidat X **gagne son duel** face à un autre candidat Y si X est placé devant Y dans plus de 50 % des bulletins. Selon la **méthode de vote de Condorcet** (1743-1794, mathématicien et homme politique français), est déclaré vainqueur un candidat qui gagne ses duels face à tous les autres candidats.

L'analyse de l'ensemble des duels demanderait trop de temps ; on privilégiera donc la vérification qui suffit à comprendre la méthode et permet de déterminer le vainqueur de l'élection. La méthode de Condorcet sera approfondie dans une autre activité de la ressource (voir fiche élève 2).

Le candidat C est le vainqueur de Condorcet de cette élection :

1. il gagne son duel face à A en lui étant préféré par $16 + 3 + 8 + 18 + 22 = 67$ % des électeurs (ou encore, seulement 33 % des électeurs préfèrent A à C, ceux de la deuxième colonne) ;
2. il gagne son duel face à B en lui étant préféré par 51 % des électeurs ;
3. il gagne son duel face à D en lui étant préféré par 66 % des électeurs ;
4. il gagne son duel face à E en lui étant préféré par 60 % des électeurs.

15. Quel est le vainqueur selon le vote préférentiel ? On prendra soin de barrer successivement les lettres correspondant aux candidats éliminés dans le tableau des préférences. (10 min)

Définition : La méthode de **vote préférentiel** (ou vote simple transférable) fonctionne de la manière suivante : si un candidat est classé en première position dans plus de 50 % des bulletins, il est élu. Si aucun des candidats n'atteint cette majorité absolue, le candidat qui a obtenu le moins de bulletins le classant en première position est éliminé. Un vote plaçant le candidat éliminé en première position est alors automatiquement transféré au candidat situé en deuxième position dans l'ordre de préférences. On compte alors de nouveau le nombre de voix et si une personne obtient plus de 50 % de bulletins la plaçant en tête, elle est élue. Si ce n'est toujours pas le cas, on reprend la procédure aussi longtemps qu'il le faut pour qu'un des candidats obtienne la majorité absolue.

Le professeur pourra effectuer la première étape (voir ci-dessous) avec les élèves afin d'expliquer le report des votes et mettre en place les annotations du tableau proposées dans l'énoncé de la question.

Première étape : aucun candidat n'a la majorité et l'on élimine C qui n'est placé en première position que par 11 % des électeurs. Le tableau de classement devient alors :

% des électeurs	33%	16%	3%	8%	18%	22%
-----------------	-----	-----	----	----	-----	-----

Ordre des préférences	A	B	€	€	D	E
	B	D	D	E	E	€
	€	€	B	B	€	B
	D	E	A	D	B	D
	E	A	E	A	A	A

Les 3% de votes de la troisième colonne sont transférés à D (première lettre non barrée de la colonne) qui obtient donc $18+3 = 21\%$ des votes et les 8% des votes de la quatrième colonne sont transférés à E qui obtient donc $22+8 = 30\%$ des votes.

On se retrouve alors dans la situation décrite par le tableau suivant de répartition des voix selon les premières positions :

% des électeurs	33 %	16%	21%	30%
En première position	A	B	D	E

Deuxième étape : le candidat B est alors éliminé et l'on barre toutes les occurrences de la lettre B dans le tableau de classement. Ensuite, l'examen de la troisième colonne du tableau de classement ainsi actualisé (lecture de la première lettre non barrée) conduit à reporter les 16 % de votes recueillis par B sur le candidat D qui totalise donc $21+16 = 37\%$ des voix. On obtient ainsi le tableau de répartition suivant :

% des électeurs	33 %	37 %	30%
En première position	A	D	E

Troisième étape : le candidat E est alors éliminé et l'on barre toutes les occurrences de la lettre E dans le tableau de classement. Ensuite, l'examen des colonnes dans lesquelles E apparaissait en première position (avant d'être barré) permet d'affirmer que ses voix sont intégralement transférées à D qui obtient donc $37+30 = 67\%$ des voix, d'où le tableau de répartition suivant :

% des électeurs	33 %	67 %
En première position	A	D

Le candidat D est donc déclaré vainqueur de l'élection selon le vote préférentiel.

16. Quel est le vainqueur selon la méthode de Borda ? Pour y répondre, on pourra compléter le tableau suivant. (5 min)

candidat	1er	2ème	3ème	4ème	5ème	score
A	33	0	0	3	48	$33*4+3=135$
B						
C						
D						
E						

N.B. la seconde colonne du tableau donne le pourcentage de bulletin dans lesquels le candidat concerné arrive en première position, etc.

Définition : Selon la **méthode de Borda**, on attribue, pour chaque bulletin classant les k candidats, $k - 1$ points au candidat en première position, $k - 2$ points au deuxième, etc., et 0 point au dernier. On additionne ensuite, pour chaque candidat, le nombre de points obtenus. Le vainqueur est le candidat qui obtient le plus de points.

Le tableau complété est le suivant :

candidat	1er	2ème	3ème	4ème	5ème	score
A	33	0	0	3	48	$33*4 + 3 = 135$
B	16	33	33	18	0	$16*4 + 33*3 + 33*2 + 18 = 247$
C	11	22	67	0	0	$11*4 + 22*3 + 67*2 = 244$
D	18	19	0	63	0	$18*4 + 19*3 + 63 = 192$
E	22	26	0	16	36	$22*4 + 26*3 + 16 = 182$

Le candidat B est donc déclaré vainqueur de l'élection selon La méthode de Borda.

Conclusion générale de la séquence :

- Différents modes de scrutin sont utilisés dans le monde pour procéder à des élections ;
- La manière de recueillir les votes individuels (un seul nom de candidat, tous les noms avec un ordre de préférences, etc.) et de les assembler pour faire émerger un vainqueur (méthode de Condorcet, de Borda, etc.) définit le mode de scrutin ;
- Le vainqueur dépend du mode de scrutin : sur notre exemple, chaque candidat se révèle vainqueur pour un des modes de scrutin présentés.

FICHE PROFESSEUR N°3 : ANALYSE CRITIQUE DU SCRUTIN UNINOMINAL

Objectifs :

- Prolonger la réflexion sur les systèmes de vote. Un premier moment, descriptif, est celui de la découverte : il existe différents modes de scrutin et la majorité dépend du mode de scrutin utilisé. Un second moment est celui de l'analyse critique : que vaut le mode de scrutin que nous utilisons, le scrutin uninominal à un ou deux tours ?
- Mettre en avant les défauts du scrutin uninominal. Montrer qu'il n'est pas un bon outil pour saisir l'état de l'opinion et qu'il peut être instrumentalisé par les candidats. De ce fait : le vote au scrutin uninominal ne permet pas, nécessairement, de connaître la « volonté générale » d'un groupe et de choisir un gouvernement qui en serait « représentatif ».
- Cette analyse doit conduire à désacraliser le résultat d'une élection, mais également à s'interroger sur les moyens d'en améliorer le fonctionnement. Tous les systèmes de vote ne se valent pas. De sorte que le choix d'un mode de scrutin ne doit pas être considéré comme arbitraire ou de pure convention. Comment prendre en compte au mieux la volonté des citoyens et déterminer la « volonté générale » ? Cette question sera reprise par la suite en cours de mathématiques (recherche d'un meilleur système de vote) et de philosophie (les apports de la délibération).

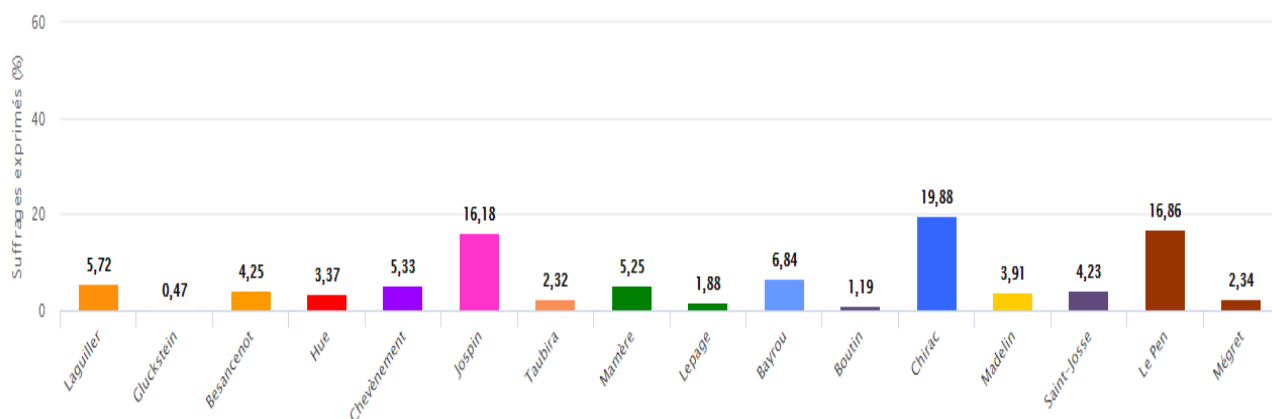
Difficultés anticipées :

- L'analyse se situe entre les mathématiques, la science politique, et la philosophie. Ce mélange des genres peut conduire à des approximations. Selon les questions des élèves certains aspects peuvent être approfondis, mais ils nécessitent alors un traitement rigoureux (candidat et paradoxe de Condorcet, paradoxe d'Arrow).
- L'analyse ne doit pas être entièrement abstraite. Pour faire comprendre les idées, il est nécessaire de s'appuyer au maximum sur des exemples : les chiffres du tableau étudié précédemment, mais aussi ceux d'élections présidentielles. Voir ci-dessous les outils pédagogiques.
- L'analyse critique peut conduire à renforcer une opinion déjà très répandue chez les élèves, selon laquelle la classe politique accapare le pouvoir et manipule les citoyens en définissant elle-même les règles du jeu. Il est important de montrer que des rapports de force et de « domination symbolique » sont présents en politique, et peuvent se dissimuler là même où les citoyens pensent détenir un pouvoir (voir le texte de Bourdieu). Cependant le propos doit rester nuancé. D'une part les défauts relevés correspondent surtout à des dérives ou des instrumentalisation possibles d'un scrutin. D'autre part, pour ne pas fermer la porte à toute réflexion sur les moyens d'une appropriation démocratique de l'État (délibération collective et autres systèmes de vote).

Outils pédagogiques :

- Réutiliser le tableau 1 au maximum, de manière à assurer une continuité entre les deux moments du cours et permettre d'appuyer le discours.
- Mobiliser des exemples concrets avec les élections présidentielles de 2002 et 2007. Celle de 2002 pour illustrer les problèmes de la légitimité du vainqueur et de l'influence des petits candidats sur le résultat final. Celle de 2017 pour illustrer le problème de la légitimité du vainqueur.

Election présidentielle de 2002 - Premier tour
Tous droits réservés Laurent de Boissieu pour France-politique.fr



Présidentielle 2007 Bayrou Condorcet ne passe pas le Premier TOUR

	Voix	% Exprimés
M. Olivier BESANCENOT	1 498 581	4,08
Mme Marie-George BUFFET	707 268	1,93
M. Gérard SCHIVARDI	123 540	0,34
M. François BAYROU	6 820 119	18,57
M. José BOVÉ	483 008	1,32
Mme Dominique VOYNET	576 666	1,57
M. Philippe de VILLIERS	818 407	2,23
Mme Ségolène ROYAL	9 500 112	25,87
M. Frédéric NIHOUS	420 645	1,15
M. Jean-Marie LE PEN	3 834 530	10,44
Mme Arlette LAGUILLER	487 857	1,33
M. Nicolas SARKOZY	11 448 663	31,18

Déroulé du cours : Présenter les différents défauts du scrutin uninominal et conclure :

1) Premier problème : La légitimité du vainqueur :

Revenir au tableau 1 : le scrutin uninominal peut conduire à :

- Un candidat qui est très fortement rejeté dans l'opinion peut se qualifier pour le second tour, et même l'emporter dans le cas d'une triangulaire ou d'une proportionnelle (lors des municipales par exemple). Le candidat A. Exemple du front national. Exemple des présidentielles de 2002 et 2017.
- La qualification et même l'élection d'un candidat alors qu'il serait battu en duel par un autre candidat éliminé au premier tour. Le candidat E gagne l'élection au second tour contre A mais perdrait son duel contre C. Hypothèses sur l'élection de 2002 et un second tour entre Chirac et

Jospin.

- L'élimination au premier tour d'un candidat qui gagnerait tous ses duels contre les autres candidats. Le candidat C qui serait le candidat de Condorcet. Exemple de Bayrou lors de la présidentielle de 2007.

- Référence possible : Ces paradoxes ont été mis en lumière par Borda et Condorcet, ce qui les a conduit à disqualifier le scrutin uninominal majoritaire et à imaginer d'autres systèmes de vote.

Conclusion : Dans ces cas l'autorité et la légitimité politique font problème : un choix collectif serait manifestement insatisfaisant puisqu'il conduirait à adopter une proposition contraire à l'opinion majoritaire. Transition : D'où vient ce problème ?

2) Second problème : La mesure des préférences individuelles :

Revenir au tableau 1 :

Montrer que les opinions des électeurs sont toujours plus complexes que ce qu'un bulletin de vote « uninominal » permet d'exprimer :

- Le tableau montre que les électeurs peuvent avoir un ordre de préférence avec : des avis sur tous les candidats, des avis qui vont de l'adhésion au rejet.
- Rayer les préférences du second au cinquième rang pour montrer que le scrutin uninominal occulte une grande partie des préférences individuelles.

Montrer que les opinions exprimées ne sont pas toujours les opinions réelles :

- Demander quel pourrait être la stratégie des électeurs qui placent le candidat C en tête de leur ordre de préférence sachant qu'il a peu de chance de l'emporter (seulement 11% de voix au premier tour).
- Montrer alors que le vote peut exprimer autre chose qu'une adhésion. Chercher des exemples. Vote utile (le système pousse à faire des calculs pour donner sa voix au moins mauvais parmi les candidats qui ont une chance de gagner). Vote de cœur et vote de raison (expression souvent utilisée lors des élections présidentielles) par exemple le vote pour faire barrage à certains candidats (front républicain) ou le vote par défaut, voire par dépit, faute de mieux. Vote de protestation contre d'autres candidats

Conclusion : Le scrutin uninominal n'est pas un bon outil pour recueillir des informations sur les avis des électeurs. Il ne prend en compte qu'une partie minimale des préférences ; et il comptabilise tous les votes comme des adhésions alors qu'ils peuvent exprimer un avis plus nuancé, voire différent. Le résultat d'une élection ne peut pas refléter correctement l'opinion commune si les bulletins n'expriment pas toute l'opinion et même l'opinion réelle des électeurs.

3) Troisième problème : les stratégies politiques : les discours ciblés :

Le scrutin uninominal favorise les candidats dits « exclusifs » capables d'accaparer un public ciblé en usant de stratégies de clivages plutôt que de rassemblement (ils excluent dans leurs discours une partie de la population et sont exclus, rejetés par une autre partie de la population) :

- Revenir au tableau 1. Exemple du candidat A rejeté par les 2/3 de l'électorat mais qui l'emporterait au premier tour et serait qualifié pour un second tour. Candidat qui pourrait être le candidat du « Front National » aux présidentielles de 2002 et 2017.
- Dans le scrutin uninominal, le plus important pour un candidat est d'être placé en haut des

préférences de certains électeurs. Si d'autres électeurs lui sont hostiles ils ne voteront pas pour lui, mais ne disposent d'aucun moyen d'exprimer leur désaccord, voire leur rejet.

- Au contraire un système de vote par évaluation, ou le système de Borda, permettraient de sanctionner certains candidats par une note faible. Il deviendrait coûteux ou risqué électoralement d'avoir des programmes ciblés uniquement sur certains groupes au mépris des autres.

Dans une certaine mesure le mode de scrutin détermine la façon de faire de la politique. Dans le cadre du scrutin uninominal :

- la stratégie gagnante, appuyée par les sciences modernes de l'opinion publique et du marketing, consiste à : découper la population en groupes ou en catégories, saisir leurs motivations, souvent les plus irrationnelles et les plus égoïstes, et de s'employer à les mobiliser
- les normes commerciales ont ainsi colonisé les normes de « publicité » politique
- l'espace politique reste un ensemble de luttes et d'affrontement entre des intérêts catégoriels et non comme le moyen de transformer le conflit pour identifier ou définir des intérêts communs

4) Quatrième problème : Les stratégies politiques : le jeu des candidatures :

Le résultat d'une élection dépend du nombre de candidats. Il suffit même de l'apparition ou du désistement d'un petit candidat qui n'a aucune chance de l'emporter pour que le vainqueur soit différent :

- Utiliser éventuellement des diagrammes sous forme de bâtons. Imaginons deux candidats A et B, et que la collectivité préfère A à B. Un candidat C se déclare, prend des voix à A, et B gagne l'élection.
- Souligner le paradoxe. Le résultat de l'élection change alors que les électeurs et leurs opinions sur les candidats A et B ne changent pas. La préférence collective entre A et B devrait être indépendante de la présence ou non du candidat C.

La stratégie politique consiste dès lors à encourager des « petits candidats » ou des « candidats jumeaux » pour influencer le résultat final :

- Exemple des Présidentielles de 2002 : Problème des petits candidats. L'opinion publique préfère Jospin à Le Pen mais Jospin est éliminé au premier tour du fait de la présence de nombreuses candidatures à gauche et du désistement de Pasqua. On peut faire calculer le % de voix qui a manqué à Jospin pour se qualifier au second tour et demander ce qui lui aurait permis de se qualifier.
- Référence possible : Ce problème a été mis en lumière par Arrow (prix nobel d'économie en 1972 pour ses travaux sur les théories mathématiques des choix collectifs) : selon lui un « bon » système de vote devrait respecter le critère d'indépendance des états non pertinents.

5) Prolongement possible : lecture d'un texte de Pierre Bourdieu, extrait de « L'opinion publique n'existe pas », exposé fait à Arras en janvier 1972 et repris dans *Questions de sociologie* (Les éditions de minuit, 1984) :

« Le sondage d'opinion est, dans l'état actuel, un instrument d'action politique ; sa fonction la plus importante consiste peut-être à imposer l'illusion qu'il existe une opinion publique comme sommation purement additive d'opinions individuelles ; à imposer l'idée qu'il existe quelque chose qui serait comme la moyenne des opinions ou l'opinion moyenne. L'« opinion publique » qui est manifestée dans les premières pages de journaux sous la forme de pourcentages (60 % des Français sont favorables à...), cette opinion publique est un artefact pur et simple dont la fonction est de

dissimuler que l'état de l'opinion à un moment donné du temps est un système de forces, de tensions et qu'il n'est rien de plus inadéquat pour représenter l'état de l'opinion qu'un pourcentage. On sait que tout exercice de la force s'accompagne d'un discours visant à légitimer la force de celui qui l'exerce ; on peut même dire que le propre de tout rapport de force, c'est de n'avoir toute sa force que dans la mesure où il se dissimule comme tel. Bref, pour parler simplement, l'homme politique est celui qui dit : « Dieu est avec nous ». L'équivalent de « Dieu est avec nous », c'est aujourd'hui « l'opinion publique est avec nous ». Tel est l'effet fondamental de l'enquête d'opinion : constituer l'idée qu'il existe une opinion publique unanime, donc légitimer une politique et renforcer les rapports de force qui la fondent ou la rendent possible. »

Deux idées importantes dans ce texte :

1) Bourdieu oppose « l'opinion publique » telle qu'elle est représentée dans les sondages et « l'état de l'opinion » dans la réalité, tel qu'il est « à un moment donné ». Il conteste l'existence d'une volonté commune ou d'un intérêt commun dans la société que manifesterait les sondages. « L'état de l'opinion » est toujours fait de « tensions » entre des intérêts particuliers et de « rapports de force » entre les groupes qui les soutiennent.

2) Sur cette idée Bourdieu développe une critique des sondages d'opinion comme « instrument d'action politique ». Leur utilisation, en imposant l'idée qu'il existerait une opinion publique en accord avec un projet de gouvernement, vise à dissimuler les rapports de force constitutifs de l'opinion et de l'action politique. Leur dissimulation renforce le pouvoir de la classe ou du groupe dominant.

Utilisation du texte :

- Se demander dans quelle mesure cette critique des sondages pourrait s'appliquer au vote en réactualisant des éléments de l'analyse du scrutin uninominal. Préciser que cette critique s'applique au scrutin uninominal, mais pas au vote en général : des systèmes de vote meilleurs que d'autres peuvent exister.

- Dans le cadre du scrutin uninominal : avancer l'idée d'une « instrumentalisation » du vote au profit des classes dirigeantes. Définir l'idéologie pour développer cette idée (à la fois une fausse représentation de la réalité, et un discours visant à justifier un rapport de force).

6) Conclusion et transition :

Le scrutin uninominal ne permet pas, automatiquement, d'élire un gouvernement « représentatif » de la « volonté générale » d'un groupe (représenter : faire connaître l'état de l'opinion et transmettre une autorité politique conformément à cette opinion).

Récapituler les arguments :

- plusieurs modes de scrutin sont possibles qui offrent différentes représentations de l'opinion – de sorte que le résultat du vote au scrutin uninominal n'est pas le reflet de l'opinion mais une construction ou un « découpage » de cette opinion parmi d'autres

- parmi ces différents modes de scrutin, le scrutin uninominal comporte des faiblesses importantes, notamment : il peut désigner un vainqueur qui n'obtiendrait pas une majorité contre un autre candidat et aurait donc une majorité contre lui, il ne permet pas de prendre en compte correctement l'opinion des électeurs, il est très sensible aux stratégies politiques

- le vote n'est pas seulement un outil pour connaître la volonté du peuple : il peut devenir, dans certaines circonstances, un instrument d'action politique pour les classes dirigeantes.

Transition :

Comment mieux prendre en compte la volonté des citoyens et déterminer une volonté générale qui ne soit pas une construction artificielle ? Deux directions : réfléchir sur les apports de la délibération et chercher un meilleur système de vote.

FICHE PROFESSEUR N°5 : LE VOTE ET LA DEMOCRATIE, ASPECTS MATHÉMATIQUES

Cette partie vise à répondre aux questions suivantes :

- Comment les mathématiciens formalisent-ils l'idée de préférence ? Par une relation d'ordre.
- Qu'est-ce qui garantit l'existence d'un candidat meilleur que les autres ? Le fait qu'il existe un ordre total sur un ensemble fini est une condition suffisante.
- Qu'essaie de faire Condorcet et pourquoi la non-existence d'un vainqueur de Condorcet est-elle paradoxale à première vue ? Condorcet essaie d'introduire une relation d'ordre ; notre représentation naïve de l'ordre nous pousse à croire qu'il existe un plus grand élément. Or la relation qu'il introduit n'est pas un ordre, car elle n'est pas transitive : on le voit clairement sur les graphes des duels à l'aide des cycles de 3 éléments.
- Comment pallier le défaut de non-transitivité ? Le système de Schulze est une méthode possible pour faire émerger un vainqueur.

Étudions le passage des préférences individuelles aux préférences collectives :

Au niveau des listes de préférences individuelles, les candidats sont classés selon un ordre (relation réflexive, transitive et antisymétrique) total strict. Un théorème mathématique bien connu dit qu'un ensemble fini totalement ordonné possède un plus grand élément. De plus, la conception usuelle de l'ordre est linéaire : on s'imagine des points ordonnés sur une droite orientée.

Au niveau de l'agrégation des préférences individuelles, à la suite de Condorcet, on dit que x est préféré à y selon la méthode de Condorcet (et note $x P_C y$) si et seulement si x est préféré à y dans au moins (au sens large) la moitié des bulletins. Il s'agit d'une relation réflexive, antisymétrique (d'un point de vue pragmatique, dans le cas d'un grand nombre d'électeurs), mais la transitivité fait défaut. On souhaite avoir un candidat de Condorcet, c'est à dire un plus grand élément pour cette relation. Tout le travail consiste alors à pallier ce défaut de transitivité.

Le côté paradoxal du paradoxe de Condorcet s'explique par le fait que nous pensons a priori qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Pour dépasser cette conception erronée, il est important de se faire une nouvelle représentation de l'ordre, qui ne soit plus linéaire mais « buissonnante ». C'est le rôle du changement de cadre qui consiste à passer d'une description algébrique des relations à une représentation mobilisant la théorie des graphes orientés : sous l'hypothèse (raisonnable en cas d'un grand nombre d'électeurs) que l'élection ne conduise pas à des cas d'égalité, on note $y \rightarrow x$ la relation stricte induite par P_C (x est préféré à y dans strictement plus que la moitié des bulletins) et trace le « graphe des duels ».

La négation de l'axiome de transitivité de la relation P_C (un exercice de logique intéressant en lien avec le programme de terminale) se traduit, dans le registre des graphes, par l'existence d'un cycle entre 3 éléments x, y et z . La non-transitivité se lit ainsi facilement dans ce nouveau cadre. Et si la relation est transitive, alors il s'agit d'une relation d'ordre et nous savons par le théorème qu'il existe un candidat de Condorcet.

Signalons qu'il existe une troisième représentation possible : le tableau des duels, où l'on note 0 ou 1 si le duel est gagné ou non par chaque élément de la table à double entrée. L'existence d'un candidat de Condorcet se lit facilement dans la table, mais pas la transitivité. Le meilleur cadre pour la transitivité est celui des graphes. Ce travail de changement de cadre et de conversion entre registres⁶ est fondamental dans le travail mathématique. La flexibilité cognitive requise, à savoir

6 Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, pp. 37-65. Récupéré de

maîtriser le passage d'un registre à un autre, a été identifiée comme un élément clef pour l'accès à la pensée mathématique avancée, lors de l'entrée à l'université.

En définitive, ce travail avec les élèves permet de comprendre ce qui se joue, du point de vue du formalisme mathématique, dans la construction d'un système de vote. Ceci vient éclairer la technique mathématique, dont le discours philosophique a permis de discuter la portée, lorsque cette technique est appliquée en sciences économiques et politiques. En outre, une réponse mathématique au problème philosophique serait de réussir à produire un système de vote qui soit satisfaisant, au sens où il respecte une liste de critères raisonnables et présente des propriétés de robustesse à la manipulation (par exemple par des votes non sincères). Nous avons ainsi choisi de présenter le système de Schulze, qui est un système contemporain utilisé par exemple dans la communauté du logiciel libre. Le système de Borda est également étudié plus en détail dans un devoir à la maison (voir fiches élève et prof correspondantes). Nous concluons sur les qualités et défauts de ces différents systèmes. Par exemple, la méthode de Schulze vérifie le critère de Condorcet, à la différence de Borda, et ne souffre pas du paradoxe de Condorcet. Elle est sensible à la manipulation, mais présente une propriété de robustesse sous l'hypothèse qu'une majorité absolue d'électeurs vote sincèrement. Le système de Borda, s'il apparaît comme une manière aisée d'obtenir un ordre sur les candidats et donc d'obtenir un plus grand élément, présente un système de pondération dont on peut contester le caractère arbitraire : une modification des poids peut permettre de faire émerger n'importe lequel des candidats comme gagnant de l'élection. Par contre, le gagnant est invariant lors d'une modification des poids par une fonction affine. Par ailleurs, le système de Borda est sensible à la manipulation par des votes non sincères.

La fiche élève se termine par un discours mettant en perspective le travail mathématique, en vue de ses applications aux sciences économiques et politiques :

Pour ce qui est des méthodes reposant sur les listes de préférences, l'économiste **Arrow (1952)** a montré qu'il est impossible d'avoir une procédure de vote remplissant simultanément certaines conditions qui paraissent raisonnables⁷, dès que l'on vote sur un ensemble de choix comprenant au moins 3 options (par exemple 3 candidats). Faut-il conclure de ce résultat négatif qu'il est vain de se tourner vers les systèmes de vote pour prendre une décision collective ? Cette problématique de construction de bonnes procédures d'agrégation des préférences individuelles fait l'objet d'intenses recherches à la croisée entre mathématiques et sciences économiques et politiques. Une solution au problème d'Arrow est d'affaiblir les conditions, en particulier le critère d'indépendance qui, pour certains chercheurs, ne refléterait pas bien le comportement humain. Ainsi le système de Schulze vérifie-t-il le « critère d'indépendance locale » pour lequel X gagne encore l'élection si l'on rajoute un candidat Y qui n'est pas dans le « groupe de tête » (voir description de la méthode de Schulze). Une autre solution est de construire des systèmes de vote où les voix sont exprimées par d'autres moyens que les listes de préférences. Pour conclure, nous pouvons constater qu'il existe de nombreux systèmes de vote possibles, qui vérifient ou non des critères et possèdent ou non des propriétés de robustesse à la manipulation. S'il existe des systèmes qui présentent des avantages par rapport au scrutin uninominal (par exemple, qui vérifient le critère de Condorcet et sont davantage robustes), une difficulté majeure est de se mettre d'accord sur quel système adopter : ceci nécessite un débat politique qui est d'autant plus difficile à mener que le système actuel favorise les grands

https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

7 *Non-dictature* : les préférences d'un seul individu ne doivent pas déterminer le résultat collectif ; *Totalité* : toutes les propositions possibles doivent avoir une chance d'être adoptées ; *Universalité* : on doit toujours pouvoir déduire une volonté collective à partir des volontés individuelles. *Unanimité* : si un candidat est préféré par la totalité des votants, il doit être le gagnant. *Indépendance* : si un candidat X gagne l'élection, et une nouvelle possibilité Y est ajoutée, seuls X ou Y peuvent gagner l'élection.

partis en place.

Eléments de corrigé mathématique et minutage des différentes questions (durées données à titre indicatif ; elles comprennent le temps de lecture, d'explication et de correction)

I – Relations d'ordre et graphes orientés

5. Définitions

6. Prouver que tout ensemble fini totalement ordonné admet un élément plus grand ou égal à tous les autres pour la relation \geq et qu'il est unique. On l'appelle le *plus grand élément*.

Soit E un ensemble fini totalement ordonné pour la relation \geq . On note n le cardinal de l'ensemble E , c'est-à-dire ici le nombre d'éléments de E . On va prouver l'existence d'un *plus grand élément* de E par récurrence sur n .

Propriété : Si E est un ensemble fini totalement ordonné pour la relation \geq , il existe un plus grand élément de E .

Initialisation : pour $n = 1$, le résultat est évident puisqu'il n'y a qu'un seul élément.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n et démontrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$ totalement ordonné pour \geq et a un élément de E . Alors l'ensemble $E - \{a\}$, de cardinal n , admet un plus grand élément b selon l'hypothèse de récurrence : pour tout x de $E - \{a\}$, $b \geq x$. On compare alors a et b :

- 4) Si $b \geq a$, on a $b \geq x$ pour tout x dans E . Alors b est le plus grand élément de E
- 5) Si $a \geq b$, on a pour tout x de $E - \{a\}$, $a \geq b$ et $b \geq x$ ce qui entraîne $a \geq x$ par transitivité. Alors, puisque $a \geq a$ (par réflexivité) et $a \geq x$ pour tout x de $E - \{a\}$, on a : $a \geq x$ pour tout x de E . Ainsi a est le plus grand élément de E

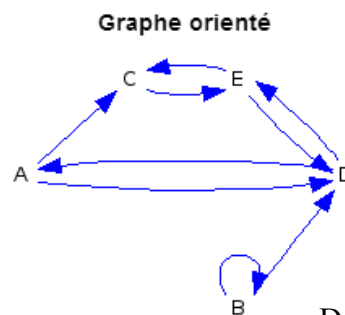
Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Durée : 25 min

6. Représenter une relation binaire par un graphe orienté.

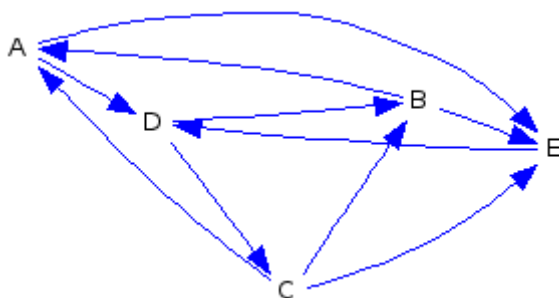
7. Ecrire toutes les relations représentées par ce graphe.

A R C, A R D,
B R B, B R D,
C R E
D R A, D R E
E R C, E R D



Durée : 10 min

7. Application aux listes de préférences



8. Existe-t-il un vainqueur de Condorcet dans le graphe ci-dessus ? Avant de répondre à cette question :
- définir le vainqueur de Condorcet au moyen de la relation \rightarrow (rappelons qu'un vainqueur de Condorcet est celui qui gagne tous les duels) ;

X est un vainqueur de Condorcet lorsque, pour tout candidat A, on a : $A \rightarrow X$

- dessiner un graphe orienté avec 3 éléments dans lequel il existe un vainqueur de Condorcet.



Il n'y a donc pas de vainqueur de Condorcet dans le graphe proposé dans l'énoncé puisque tous ses sommets comptent au moins une flèche « sortante », c'est-à-dire une défaite dans un duel.

Durée : 20 min

9. Montrer que la relation binaire \rightarrow est non transitive si et seulement si il existe un « circuit » $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow X$ entre trois sommets du graphe orienté.

S'il existe un « circuit » $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow X$ entre trois sommets du graphe orienté, la relation \rightarrow est non transitive, puisque une relation transitive, avec $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z$ imposerait $X \rightarrow Z$.

Si la relation est non transitive la négation de la transitivité garantit l'existence d'un triplet (A, B, C) tel que $A \rightarrow B, B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$. Il existe alors un circuit entre les sommets A, B et C.

Durée : 10 min

II – Essayons de faire mieux : la méthode de Schulze

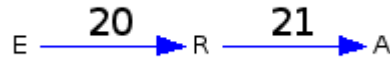
10. Voici les résultats obtenus (en nombre de bulletins) lors d'un vote d'un groupe de 37 personnes sur une proposition avec les mentions suivantes : éliminée (E), à rediscuter (R) ou adoptée (A).

$A R E : 4 ; A E R : 14 ; R A E : 0 ; R E A : 16 ; E A R : 3 ; E R A : 0$

Représentez ces résultats par un graphe orienté et déterminez le vainqueur selon la méthode de Schulze.



Noter que les arêtes présentent ici la pondération en nombre de bulletins et non en pourcentage (il est aisé de s'y ramener, si on le souhaite). Selon la méthode de Schulze, il faut supprimer l'arête la plus faiblement pondérée de ce groupe de tête :



Le groupe de tête du graphe ainsi obtenu se réduit à l'élément A (il n'y a pas de chemin partant de A et aboutissant à un autre élément, donc tout autre élément n'appartient pas au groupe de tête, par définition de ce dernier). Selon la méthode de Schulze, A est donc déclaré vainqueur : la proposition est donc adoptée.

Durée : 25 min

11. **Prouvez que cette méthode respecte le critère de Condorcet (le vainqueur de Condorcet, s'il existe, sera le vainqueur selon la méthode de Schulze).**

S'il existe un vainqueur de Condorcet C, toutes les flèches pointent vers lui et aucune flèche ne part de C. Le groupe de tête se réduit alors à l'élément C (car il n'y a aucun chemin partant de C pour rejoindre un autre sommet S, donc tout autre sommet S n'appartient pas au groupe de tête), le vainqueur de Condorcet, qui est donc également vainqueur selon la méthode de Schulze.

Durée : 10 min

FICHE PROFESSEUR N°6 : POURQUOI PAS DE POINTS ? LA METHODE DE BORDA

Objectifs :

Ce devoir maison permet de découvrir la méthode de Borda, qui utilise un système de points pour classer les candidats.

Pourquoi présenter cette méthode pour étayer l'idée d'une pluralité des systèmes de vote ?

- le nom de Borda et de son système sont historiquement rattachés à celui de Condorcet en raison de la controverse qui les a opposés. Il est donc intéressant de les présenter pour éclairer les enjeux de la controverse ;
- le classement par points est généralement bien connu des élèves en raison de son utilisation dans les championnats sportifs, ce qui devrait faciliter la compréhension et la manipulation de la méthode ;
- remarquons que dans la phase 1 de la ressource, on voit déjà que le candidat de Borda ne coïncide pas avec celui de Condorcet. Il s'agit donc ici d'une reprise, pour vérifier que la définition de vainqueur de Condorcet est assimilée, et rappeler que la méthode de Borda ne vérifie pas le critère de Condorcet.

Outre le non respect du critère de Condorcet, la méthode de Borda présente également des caractéristiques techniques intéressantes pour interroger l'application des techniques mathématiques dans les sciences humaines, mais aussi pour introduire quelques éléments d'algèbre linéaire :

- si elle apparaît comme une manière aisée d'obtenir un ordre sur les candidats et donc d'obtenir un plus grand élément, la méthode de Borda présente un système de pondération dont on peut contester le caractère arbitraire : comme il est montré dans l'énoncé, une modification des points peut permettre de faire émerger n'importe lequel des candidats comme gagnant de l'élection ;
- en revanche, le gagnant est invariant lors d'une modification des poids par une fonction affine. On propose un exercice sur ce thème.
- par ailleurs, le système de Borda est sensible à la manipulation par des votes non sincères. L'étude de la manipulation des scrutins est l'un des principaux domaines mathématiques de la théorie du choix social, difficile à évaluer pour les scrutins complexes sans les techniques formelles.

Eléments de corrigé mathématique :

- La méthode de Borda

Pour 3 candidats, l'élément classé premier par un votant a 2 points, le second 1 point et le dernier 0 point, ce qu'on résume par le vecteur score $(2 ; 1 ; 0)$.

Voici les résultats d'un scrutin d'une élection de délégués à laquelle se présentent trois élèves Assia, Bertrand et Carole, représentés respectivement par les lettres A, B et C :

$A B C : 2 ; A C B : 9 ; B A C : 0 ; B C A : 10 ; C A B : 2 ; C B A : 0$

-

Pondération	(2; 1; 0)
Score de A	$(2 + 9) \times 2 + 2 \times 1 = 24$
Score de B	$10 \times 2 + 2 \times 1 = 22$
Score de C	$2 \times 2 + (9 + 10) \times 1 = 23$

La liste agrégée de préférences est donc $A > C > B$, ce qui signifie qu'Assia est première, Carole deuxième et Bertrand troisième.

- On attribue à chaque candidat un score entier. La relation binaire issue de la méthode de Borda hérite donc des propriétés de la relation « supérieur ou égal » qui est un ordre sur les entiers naturels. Si l'on exclut les cas d'égalités, on a donc bien un ordre strict.
- Après le vote stratégique de certains votants, on a les résultats suivants :

A B C : 2 ; A C B : 9 ; B A C : 0 ; B C A : 8 ; C A B : 2 ; C B A : 2

Alors :

Pondération	(2; 1; 0)
Score de A	$11 \times 2 + 2 \times 1 = 24$
Score de B	$8 \times 2 + 4 \times 1 = 20$
Score de C	$4 \times 2 + 17 \times 1 = 25$

Les votes stratégiques ont modifié le résultat de l'élection : Carole est désormais première devant Assia, puis Bertrand.

- Le scrutin issu de la méthode de Borda est donc manipulable : dans la configuration précédente, certains électeurs peuvent obtenir un résultat plus favorable à leurs yeux en votant de manière non sincère.
- On a :

Pondération	(1; 0; 0)	(2; 1; 0)	(1,5; 1; 0)	(1; 1; 0)
Score de A	11	24	18,5	13
Score de B	10	22	16	12
Score de C	2	23	23	21
Résultat de l'agrégation des préférences	$A >_1 B >_1 C$	$A >_2 C >_2 B$	$C >_3 A >_3 B$	$C >_4 A >_4 B$

N.B. : Les relations d'ordre associées à la première, la deuxième etc. procédure d'agrégation sont notées respectivement $>_1$, $>_2$ etc.

Le choix de la pondération intervient donc de manière essentielle dans la méthode de Borda : il modifie le résultat de l'élection. Or il n'y a pas de justification éthique ou mathématique permettant de choisir une pondération plutôt qu'une autre (notamment (2;1;0) et (1,5;1;0)). Les résultats de ces scrutins peuvent donc aisément être contestés pour leur aspect arbitraire.

- Soit f une fonction affine croissante définie par $f(x)=ax+b$ avec $a > 0$. On calcule les résultats obtenus avec la pondération $(f(2); f(1); f(0))$, puis on les compare avec ceux obtenus pour $(2; 1; 0)$.

Pondération	(2; 1; 0)	$(f(2); f(1); f(0))$
Score de A	$11 \times 2 + 2 \times 1 + 11 \times 0 = 24$	$11 \times f(2) + 2 \times f(1) + 10 \times f(0)$ $= 11(2a+b) + 2(a+b) + 10b$ $= 24a + 23b$
Score de B	$10 \times 2 + 2 \times 1 + 11 \times 0 = 22$	$10 \times f(2) + 2 \times f(1) + 11 \times f(0)$ $= 10(2a+b) + 2(a+b) + 11b$ $= 22a + 23b$
Score de C	$2 \times 2 + 19 \times 1 + 2 \times 0 = 23$	$2 \times f(2) + 19 \times f(1) + 2 \times f(0)$ $= 2(2a+b) + 19(a+b) + 2b$ $= 23a + 23b$

Puisque $a > 0$, on a : $24a > 23a > 22a$ et donc $24a + 23b > 23a + 23b > 22a + 23b$, donc pour la pondération $(f(2); f(1); f(0))$, on a :

$$\text{Score de A} > \text{Score de C} > \text{Score de B}$$

Ainsi la pondération $(f(2); f(1); f(0))$ n'a pas modifié les résultats obtenus avec la pondération $(2; 1; 0)$.

Plus généralement, dans le cas d'une élection avec p candidats, si (n_1, n_2, \dots, n_p) est une pondération pour la méthode de Borda, les résultats pour cette pondération sont les mêmes que ceux obtenus avec la pondération $(f(n_1), f(n_2), \dots, f(n_p))$ si f est une fonction affine croissante, c'est-à-dire si $f(x)=ax+b$ avec $a > 0$

En effet, soient v_i le nombre de bulletins où le candidat i est classé i -ème (i variant de 1 à p) et S_i le score du candidat i obtenu avec la pondération (n_1, n_2, \dots, n_p) , on a :

$$S_i = v_1 \times n_1 + v_2 \times n_2 + \dots + v_p \times n_p$$

Alors, pour la nouvelle pondération, le score S'_i du candidat i est :

$$S'_i = v_1 \times f(n_1) + v_2 \times f(n_2) + \dots + v_p \times f(n_p)$$

$$\begin{aligned}
&= v_1(an_1 + b) + v_2(an_2 + b) + \dots + v_p(an_p + b) \\
&= a(v_1 \times n_1 + v_2 \times n_2 + \dots + v_p \times n_p) + (v_1 + v_2 + \dots + v_p) b \\
&= aS_i + bV \text{ où } V \text{ est le nombre total de votants} \\
&\quad (\text{car } V = v_1 + v_2 + \dots + v_p)
\end{aligned}$$

Puisque $a > 0$ et que bV est une constante, indépendante des scores des candidats, les nouveaux scores des candidats sont les images des scores précédents par la fonction affine croissante g définie par $g(x) = ax + bV$. L'ordre des scores est donc conservé avec la nouvelle pondération.

II. La méthode de Borda et le critère de Condorcet

Voici les résultats obtenus lors d'une élection de 4 délégués Aristide (A), Bruno (B), Charlotte (C) et Daniel (D). Seules sont notées les listes de préférences ayant obtenu des voix.

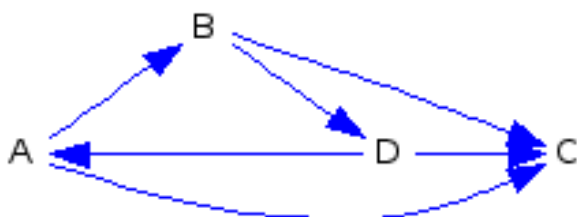
ABCD : 5 ; ACBD : 4 ; DBAC : 2 ; DBCA : 6 ; CBAD : 8 ; DCBA : 2

- On construit le graphe des duels à l'aide d'un tableau :

	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
C	0	0	0	0
D	1	0	1	0

On note 1 dans la cellule correspondant à la ligne A et la colonne B pour indiquer qu'il y a une flèche qui part de A et pointe vers B (B étant préféré à A).

On obtient le graphe suivant :



Le candidat C est donc un candidat de Condorcet.

- Selon la méthode de Borda, c'est-à-dire avec le vecteur score (3; 2; 1; 0), on obtient les résultats suivants :

Pondération	(3; 2; 1; 0)
Score de A	$9 \times 3 + 0 \times 2 + 10 \times 1 + 8 \times 0 = 37$
Score de B	$0 \times 3 + 21 \times 2 + 6 \times 1 + 0 \times 0 = 48$
Score de C	$8 \times 3 + 6 \times 2 + 11 \times 1 + 2 \times 0 = 47$
Score de D	$10 \times 3 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 17 \times 0 = 30$

Le vainqueur selon la méthode de Borda est le candidat B qui n'est pas le candidat de Condorcet.

Dans ce dernier exemple, la méthode de Borda a permis de désigner un vainqueur mais le critère de Condorcet n'est pas vérifié.

	IREM 6- Compte-rendu(s) d'expérimentation au cours des mises en œuvre successives	 E. M. I. R. C. de 1 Montpellier
--	--	--

K. Arrow, Préférences individuelles et choix collectifs

Ch. Girard et A. Le Goff, la démocratie délibérative - Anthologie de textes fondamentaux

R, Peyre, Les mathématiques de la démocratie, II Et le vainqueur du second tour est...Le critère de Condorcet. Récupéré de <http://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html?lang=fr>, Voir aussi : <http://images.math.cnrs.fr/La-democratie-objet-d-etude.html>

Pour une autre approche avec matrices de préférence, fonctions d'agrégation, quasi-universalité :

O, Sicard, Théorie du choix social, IREM de la Réunion, Récupéré de <http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article781>

J.J Rousseau, Du Contrat Social

Science4all (chaîne youtube) :

<https://www.youtube.com/watch?v=fBYCoPAmpr4&list=PLtzmb84AogRSmv5o-eFNb3i9z64luOjdX>

Outil de tracé de graphe : <http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi>*

IREM 8- Evolution de la ressource (CV)	
---	---

Etape	Date	Réalisations	Contributeurs
1	Septembre 2014	Création d'un germe de ressource sur le paradoxe de Condorcet GNE : première version d'une fiche élève à partir d'un document du café pédagogique	Thomas François
2	Décembre 2014	Remaniement de la fiche élève et création d'une deuxième partie sur les méthodes du choix social (activité math)	Patrice Marie-Jeanne
3	Mars 2015	1ère Expérimentation	Thomas François
4	Mai 2015	Proposition d'une fiche élève et prof pour la troisième partie (activité philo)	Thomas François
		Remaniement des deux fiches élèves (activité math)	Patrice Marie-Jeanne Dominique Guin, Thomas Hausberger
		Création d'une fiche prof (activité math)	Patrice Marie-Jeanne
		Relecture des documents philo	Manuel Bachtöld Véronique Pinet
5	Octobre 2015	Remaniement de la troisième partie, fiches élève et prof (activité philo) Création d'un glossaire sur la volonté générale	Thomas François
6	Décembre 2015	Remaniement de l'activité math pour la nouvelle version	Patrice Marie-Jeanne Dominique Guin, Thomas Hausberger
		Germe d'un glossaire sur le choix social	Patrice Marie-Jeanne
7	Octobre 2016	Remaniement de l'activité philo	Thomas François
8	Janvier à Mars 2017	Remaniement de l'activité math pour la nouvelle version de l'activité philo	Patrice Marie-Jeanne Dominique Guin, Thomas Hausberger
9	Mai 2017	Expérimentations seconde (MPS) et Terminale S	Thomas François Carole Combalbert, Damien Perez
		Approfondissement des fondements épistémologiques des théories du choix social	Patrice Marie-Jeanne, Thomas François

10	Juin 2017	Modification de l'activité philo à partir des données questionnaire élèves de mai 2017	Thomas François
11	Juillet 2017	Remaniement de l'activité math avec intégration d'éléments repris d'une conférence donnée par Nicolas Saby	Patrice Marie-Jeanne Dominique Guin, Thomas Hausberger
		Remaniement de l'activité philo pour la version math ci-dessus	Thomas François
12	Novembre Déc 2017	Fiches élèves 1 & 3, fiche prof 2 pour le remaniement précédent de l'activité math	Patrice Marie-Jeanne
13	Janvier 2018	Fiche élève 4 (activité math), Fiches prof 5 & 6 (activité math)	Patrice Marie-Jeanne
14	Février 2018	Remaniement des fiches élèves et prof (activité math)	Dominique Guin, Thomas Hausberger
		Fiche prof 1, Création scénario d'usage philo Fiche prof 3 (philo)	Thomas François
15	Mars 2018	Expérimentation de la partie math (adaptée à un public de T°ES)	Patrice Marie-Jeanne
		Formation au PAF	Thomas François Patrice Marie-Jeanne Nicolas Saby
16	Juin 2018	Mise en forme de la ressource	Thomas Hausberger
		Création d'un satellite sur les fondements épistémologiques de la mathématique sociale	Nicolas Saby
17	Juillet 2018	Finalisation, relecture	Tous