



**HAL**  
open science

## SPC généralisation de l'indicateur de capabilité Cpm - Cas des tolérances unilatérales

Maurice Pillet, Emmanuel Duclos, Alain Courtois

► **To cite this version:**

Maurice Pillet, Emmanuel Duclos, Alain Courtois. SPC généralisation de l'indicateur de capabilité Cpm - Cas des tolérances unilatérales. Revue pratique de controle industriel, 1996. hal-02314022

**HAL Id: hal-02314022**

**<https://hal.science/hal-02314022>**

Submitted on 12 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SPC

## Généralisation de l'indicateur de capabilité Cpm

### Cas des tolérances unilatérales

Maurice PILLET - Emmanuel DUCLOS - Alain COURTOIS  
Laboratoire de Logiciels pour la Productique (LLP- CESALP) - Université de Savoie - (Annecy)

L'étude des capabilités forme un des piliers  
de la Maîtrise Statistique des Procédés (MSP ou SPC).

Les indicateurs de capabilité (ou d'aptitude) ont pour objectif  
de quantifier l'adéquation entre un moyen de production et un objectif de qualité.

L'indicateur de la capabilité Cpm (voir CI&Q n°187 Juin 94) donne dans le cas  
des tolérances bilatérales une meilleure indication sur la qualité de la production que  
les indicateurs classiques. Cet article propose une extension de cet indicateur dans les cas  
de tolérances unilatérales telles que les tolérances de circularité.

#### 1. Les limites de l'indicateur Cpk

Pour quantifier le rapport entre l'intervalle de tolérance de fabrication et la dispersion observée, on définit une capabilité des procédés de production en établissant le rapport entre ces deux valeurs. Les deux indicateurs classiques de capabilité d'un procédé sont Cp et Cpk ou (CAP et CPK pour les normes AFNOR/CNOMO). Le Cp (ou CAP) établit le rapport entre l'intervalle de tolérance et la dispersion sans tenir compte du décentrage, alors que le Cpk tient compte du décentrage (figure 1). On considère généralement qu'un procédé est capable si son Cpk est supérieur à 1,33.

Cependant, dans certains cas, un Cpk de bon niveau (Cpk = 2) peut donner moins de satisfaction qu'un Cpk considéré comme limite (Cpk de 1,33). La figure 1 illustre deux cas de figure où le Cpk est supérieur ou égal à 1,33. Dans les relations clients/fournisseurs

établies sur le Cpk, les deux productions de la figure 1 donnent satisfaction. Pourtant une des productions est centrée avec le maximum de densité de probabilité sur la valeur cible, alors que la seconde est décentrée et la densité de probabilité pour la valeur cible est quasiment nulle.

Dans le cas d'assemblages fonctionnels, le fait de limiter les exigences en matière de capabilité au seul Cpk peut être dangereux. Il peut conduire à des montages impossibles dans le cas d'une cotation statistique si toutes les valeurs sont concentrées au bord de l'intervalle de tolérance. (Voir notre article dans CI & Q n° 187 Juin 1994).

Dans le cas des tolérances unilatérales telles que la concentricité, on définit également un Cpk (figure 2) en établissant le rapport entre la distance (limite supérieure à la moyenne) divisée par la demi-dispersion (Cpk = D1/D2). On peut également définir un calcul de

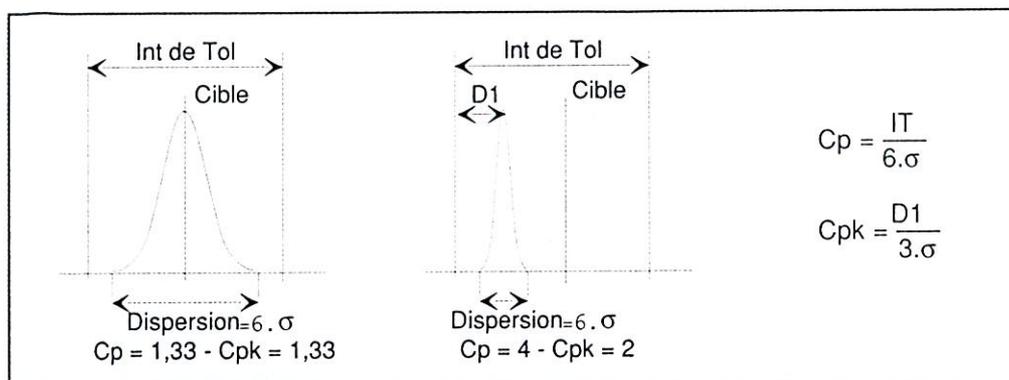


Figure 1- Cas bilatéral, le Cpk n'est pas suffisant

$$Cp = \frac{IT}{6.\sigma}$$

$$Cpk = \frac{D1}{3.\sigma}$$

tolérance en fabrication, les indicateurs de capabilité Cp et Cpk doivent être complétés. Un autre indicateur (1) commence à être largement utilisé dans les entreprises : l'indicateur Cpm. Celui-ci tient compte à la fois de la dispersion et du centrage. Son objectif est de donner une image globale du procédé

CAP en établissant le rapport entre la tolérance et la dispersion définie par D3 (CAP = IT/D3). Ce calcul, initié par CNOMO, désormais normalisée par l'AFNOR est cependant plus complexe que dans le cas des productions bilatérales car, en général, on est en présence de populations non normales. (Le lecteur peut se reporter à l'ouvrage « Appliquer la Maîtrise Statistique des Procédés » de Maurice PILLET aux éditions d'organisation pour plus de détails sur le sujet)

Malheureusement, le calcul du Cpk donne parfois des résultats curieux. En effet, pour les deux cas de la figure 2, on trouve un Cpk de 1,33 (Les CAP donneraient également des résultats similaires). Pourtant, il est évident que globalement la population 1 donnera un meilleur résultat en terme de fonctionnement global des produits. En effet, le maximum de densité de probabilité se trouvera proche de l'optimum (0). Le Cpk ou le CAP ne sont donc pas des indicateurs de capabilité qui traduisent correctement la qualité des pièces dans le cas des tolérances unilatérales.

Nous proposons dans cet article une extrapolation aux cas unilatéraux de la notion de Cpm proposée par Chan L. K. qui permet une meilleure description de ces situations que les indicateurs classiques Cp, Cpk.

par une seule valeur. Il assure que les conditions de centrage et de dispersion sont respectées. L'indicateur Cpm est basé sur la fonction perte de TAGUCHI que nous avons présentée dans l'encadré 1. Le nouvel indicateur Cpm reflète la perte (au sens de Taguchi) due à un dérèglement ou à la dispersion (figure 4). Il est défini par :

$$Cpm = \frac{IT}{6.\sqrt{\sigma^2 + (\bar{X} - \text{Cible})^2}}$$

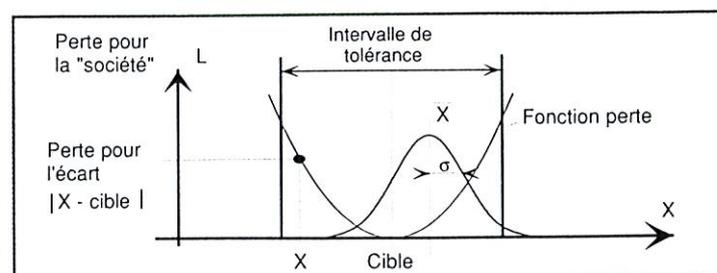
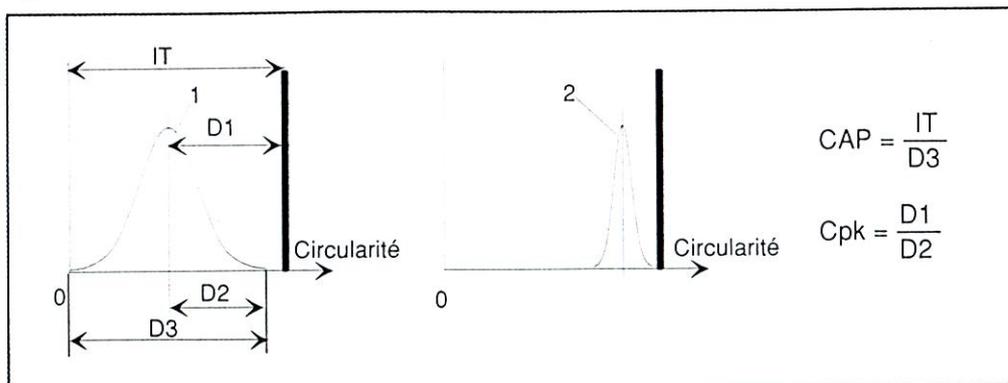


Figure 4 - Fonction perte de TAGUCHI associée à une population

Figure 2 - Cas unilatéral, deux situations identiques ?

## 2. L'indicateur Cpm dans le cas bilatéral

Pour tenir compte de la fonction perte de TAGUCHI (voir encadré 1) et de l'évolution actuelle dans la façon de voir l'intervalle de



$$CAP = \frac{IT}{D3}$$

$$Cpk = \frac{D1}{D2}$$

Encadré 1 - Notion de fonction perte

On a trop considéré qu'une pièce ne générerait aucune perte à l'intérieur de l'intervalle de tolérance, et une perte non nulle à l'extérieur de cet intervalle. En fait, la "perte" due à l'écart d'une caractéristique par rapport à une valeur cible n'est pas nulle à l'intérieur de la tolérance et constante à l'extérieur. TAGUCHI définit la fonction perte (figure 3) comme étant une fonction du second degré si la caractéristique doit viser une valeur Cible  $X_0$ . La perte est considérée comme nulle sur la cible, et croît avec le carré de l'écart.

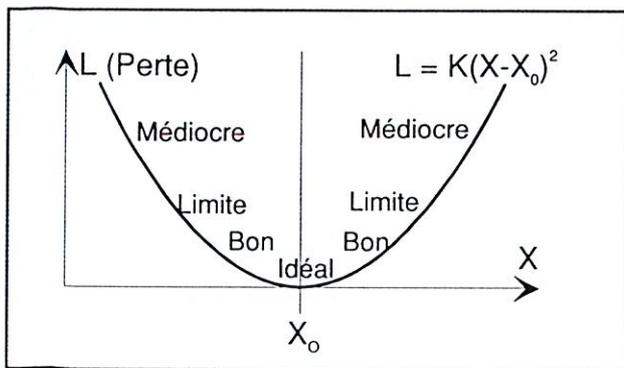


Figure 3 - Fonction perte de TAGUCHI

Elle s'écrit  $L = K (X - X_0)^2$  avec :

- K une constante qui dépend du problème posé ;
- $X_0$  valeur cible recherchée ;
- X valeur réelle prise par la caractéristique.

Cette fonction est en fait le développement de Taylor en éliminant les termes d'ordre supérieur à 2 et en considérant les hypothèses suivantes :

- la perte est nulle pour  $X = X_0$  soit  $L(X_0) = 0$  ;
- la perte est minimale pour X proche de  $X_0$  soit  $L'(X_0) = 0$ .

Nous obtenons  $L(X) = \frac{L''(X_0)}{2!}(X-X_0)^2$

Perte dans le cas d'un échantillon

A partir de la définition de la fonction perte, il est intéressant de connaître la perte moyenne par pièce dans le cas d'un échantillon d'écart-type  $\sigma$ .

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum K(X_i - X_0)^2 = \frac{K}{n} \sum (\bar{X}_i - \bar{X} + X - X_0)^2 =$$

$$\frac{K}{n} \sum [(X_i - \bar{X})^2 + (\bar{X} - X_0)^2 + \frac{2(X_i - \bar{X})(\bar{X} - X_0)}{= 0}]$$

$$\bar{L} = K \left[ (\bar{X} - X_0)^2 + \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} \right]$$

D'où

$$\bar{L} = K \cdot [\sigma^2 + (\bar{X} - X_0)^2]$$

Avec

- $\bar{L}$  : perte moyenne par pièce ;
- $\sigma$  : écart-type de la population ;
- $\bar{X}$  : moyenne de l'échantillon ;
- $X_0$  : valeur cible.

Remarque importante :

la démonstration du calcul de la fonction perte dans le cas d'un échantillon ne suppose pas la normalité de la population.

La fonction perte intervient au dénominateur. On note que l'indicateur Cpm est égal au Cp lorsque le procédé est parfaitement centré. Cpm décroît lorsque le décentrage augmente. Comme on le constate, Cpm tient compte à la fois du centrage et de la dispersion.

Pour interpréter facilement le Cpm, nous allons établir une situation de référence correspondant à la perte maximum acceptable dans le cas d'une répartition Gaussienne. Cette situation se rapporte à une production centrée telle que  $Cpm = Cp = Cpk = 1,33$  (Figure 5).

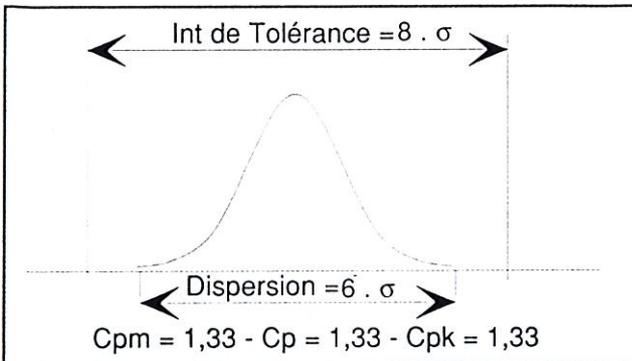


Figure 5 - Situation de référence  $C_{pm} = C_p = C_{pk} = 1,33$

Pour ne pas générer une perte au sens de TAGUCHI supérieure à la perte de la situation de référence, où  $C_p = C_{pk} = 1,33$ , le  $C_{pm}$  doit rester supérieur à 1,33.

### 3. Cpm dans le cas des tolérances unilatérales limitées à zéro

#### 3.1. Définitions

La fonction perte dans le cas des tolérances unilatérales est définie par  $L = K.X^2$  (figure 6)

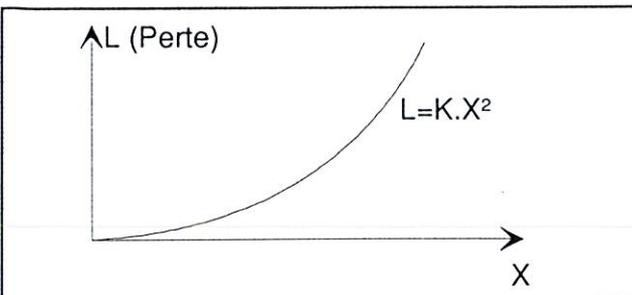


Figure 6 - Fonction perte dans le cas unilatéral

On a vu précédemment qu'un  $C_{pm}$  constant correspondait à une perte moyenne constante pour les populations concernées. Nous proposons de généraliser ce concept au cas unilatéral.

On montre que la perte moyenne par pièces dans le cas unilatéral est proportionnelle à  $\sigma^2 + \bar{X}^2$ . On définit (voir encadré 2)  $C_{pm}$  comme égal à :

$$C_{pm} = \frac{IT}{A\sqrt{\sigma^2 + \bar{X}^2}}$$

Avec

$\sigma$  : L'écart-type de la population

$\bar{X}$  : Moyenne de la population

A : Une constante qui dépend de la qualité souhaitée (A = 1,33 ou 1,46 ou 1,66)

$C_{pm}$  peut être calculé par cette formule quelle que soit le type de répartition. Il est inversement proportionnel à la perte moyenne par pièce. Nous recommandons l'utilisation de A = 1,46. Le lecteur trouvera dans l'encadré 2 la démonstration de la formule du  $C_{pm}$  que nous proposons dans le cas unilatéral.

Avec A = 1,46, la formule de  $C_{pm}$  devient

$$C_{pm} = \frac{IT}{1,46\sqrt{\sigma^2 + \bar{X}^2}}$$

#### 3.2. Exemples de calcul de $C_{pm}$ et comparaison avec le $C_{pk}$

Soit l'histogramme de la figure 8 relatif à des mesures de circularité :

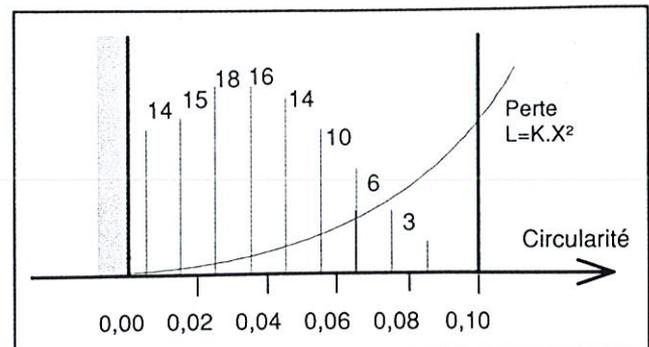


Figure 8 - Exemple 1 ( CAP = 1,08 - Cpk = 1,05 - Cpm = 1,63)

#### Calcul du CAP et du $C_{pk}$

Le calcul classique de CAP et  $C_{pk}$  dans ce cas de figure fait appel à la loi de défaut de forme. Le calcul est relativement compliqué car il fait appel à des tables pour trouver des coefficients intermédiaires de calcul.

Encadré 2 - Origine du calcul de Cpm dans le cas unilatéral

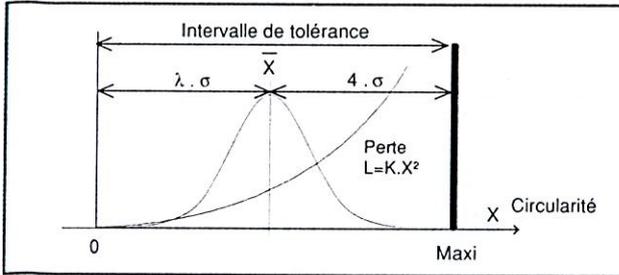


Figure 7 - Situation de référence telle que Cpm = 1,33

Définissons une situation de référence (Figure 6) telle que :

- la moyenne soit située à  $\lambda \cdot \sigma$  de 0 ;
- la moyenne soit située à  $4 \cdot \sigma$  de la limite supérieure ;
- Cpm = 1,33.

L'intervalle de tolérance représente alors  $(4 + \lambda) \cdot \sigma$ . La perte moyenne par pièce ( $\bar{L}$ ) pour une production d'écart-type  $\sigma$  (non nécessairement normale) est donnée par la relation suivante :

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum K(X_i)^2 = \frac{K}{n} \sum (X_i - \bar{X} + \bar{X})^2 =$$

$$\frac{K}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 + (\bar{X})^2 + \frac{2(X_i - \bar{X})(\bar{X})}{= 0}$$

$$\bar{L} = K \left[ \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} + (\bar{X})^2 \right]$$

$$\bar{L} = K \cdot [\sigma^2 + (\bar{X})^2]$$

D'où

Pour la situation de référence (Figure 7) :

la perte moyenne générée par la situation de référence est égale à :

$$\bar{L} = K \cdot [\sigma^2 + (\bar{X})^2]$$

$$Cpm = \frac{IT}{A\sqrt{\sigma^2 + \bar{X}^2}} = \frac{(4 + \lambda) \cdot \sigma}{A\sqrt{\sigma^2 + (\lambda \cdot \sigma)^2}} = 1,33$$

$$d'où \quad A = \frac{(4 + \lambda)}{1,33\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

•  $\lambda$  doit être déterminé par un accord entre le client et le fournisseur en fonction du niveau de qualité souhaité.

• A est une constante calculée à partir de  $\lambda$ . Nous recommandons l'emploi de  $k = 4$ .

|           |      |      |      |
|-----------|------|------|------|
| $\lambda$ | 3    | 4    | 5    |
| A         | 1,66 | 1,46 | 1,33 |

Prenons le cas particulier où  $\lambda = 4$  (la moyenne de la répartition de la situation de référence est située à  $4 \cdot \sigma$  de 0), on a  $A = 1,46$ . Le Cpm est alors défini comme étant :

$$Cpm = \frac{IT}{1,46\sqrt{\sigma^2 + \bar{X}^2}}$$

La loi normale sous jacente est définie par :

$$X = 0,0366$$

$$\sigma = 0,0202$$

$$\text{On trouve : } CAP = \frac{0,1}{0,0366 + 2,78 \times 0,0202} = 1,08$$

$$Cpk = \frac{0,1 - 0,0366}{3 \times 0,0202} = 1,05$$

Calcul du Cpm

Le calcul du Cpm tel que nous l'avons présenté est en revanche beaucoup plus simple, en effet, il ne tient pas compte du type de répartition des pièces.

On calcule l'écart-type estimé et la moyenne de la répartition à partir de l'histogramme précédent :

$$S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}} = 0,01927 \quad \text{et} \quad \bar{X} = 0,03729$$

Le Cpm se calcule en appliquant :

$$Cpm = \frac{IT}{1,46\sqrt{\sigma^2 + \bar{X}^2}} = \frac{0,1}{1,46\sqrt{0,01927^2 + 0,03729^2}} = 1,63$$

On le voit, dans ce cas de figure, le Cpm donne une capacité plus importante que le CAP ou le Cpk car la densité de probabilité est près de l'optimal (ici zéro). L'interprétation de ce Cpm est simple : la répartition de la figure 8 donnera une perte plus faible que la répartition de référence. Cela signifie que le fonctionnement des produits assemblés à partir de ces pièces sera de meilleure qualité. Le Cpk et le CAP sont fondés sur des concepts très différents du Cpm. En effet, ceux-ci s'appuient sur un critère quantitatif de pièces hors tolérance, alors que le Cpm est basé sur le fonctionnement optimal des produits. Mais ce qui doit intéresser l'industriel, c'est justement le bon fonctionnement des produits plus que les ppm en dehors de la tolérance !

Considérons maintenant l'histogramme de la figure 9 :

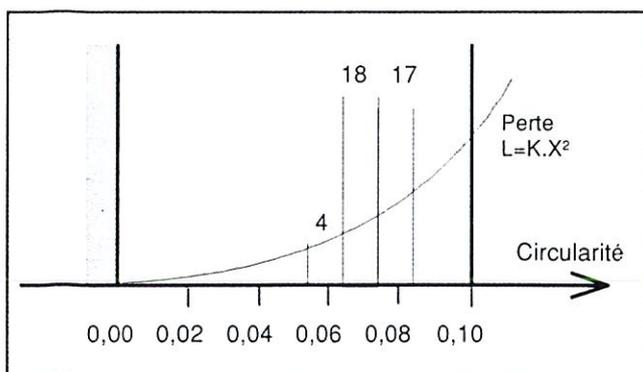


Figure 9 - Exemple 2 ( CAP = 1,09 - Cpk = 1,34 - Cpm = 0,93)

La normalité de cette répartition n'est pas très bonne, mais cela n'a pas d'importance pour le calcul du Cpm.

### Calcul du Cpk

Dans ce cas, il est inutile de rechercher une loi normale sous-jacente.

$$\bar{X} = 0,0733$$

$$S = 0,0662$$

$$\text{On trouve : CAP} = \frac{0,1}{0,0733 + 2,78 \times 0,0662} = 1,09$$

$$Cpk = \frac{0,1 - 0,0733}{3 \times 0,0662} = 1,34$$

### Calcul du Cpm

$$\bar{X} = 0,0733$$

$$S = 0,0662$$

$$\text{On trouve Cpm} = \frac{0,1}{1,46\sqrt{0,0733^2 + 0,0662^2}} = 0,93$$

Dans ce cas, le Cpm donne une capacité plus faible que le CAP ou le Cpk. Ceci est dû au fait que l'ensemble des valeurs est proche de la limite supérieure. Toutes les pièces ayant une circularité limite, le Cpm traduit que le fonctionnement des produits avec ce type de répartition sera moins bon qu'avec la répartition de référence (Figure 7)

Enfin, pour comparer la différence entre le CAP et le Cpm, nous allons comparer les résultats donnés avec deux situations théoriques différentes (Figure 10).

Dans ces deux cas, le calcul du CAP et du Cpk donnerait 1,00. On considère donc ces deux situations comme identiques. Pourtant, il est évident que d'un point de vue fonctionnel, les deux populations sont totalement différentes. Même si le pourcentage de défauts dans les deux cas est identique, il est évident que la population 1 donne globalement de bien meilleurs résultats.

### Calcul de Cpm

Cas 1

$$Cpm = \frac{0,1}{1,46\sqrt{0,0166^2 + 0,05^2}} = 1,30$$

Cas 2

$$Cpm = \frac{0,1}{1,46\sqrt{0,005^2 + 0,085^2}} = 0,80$$

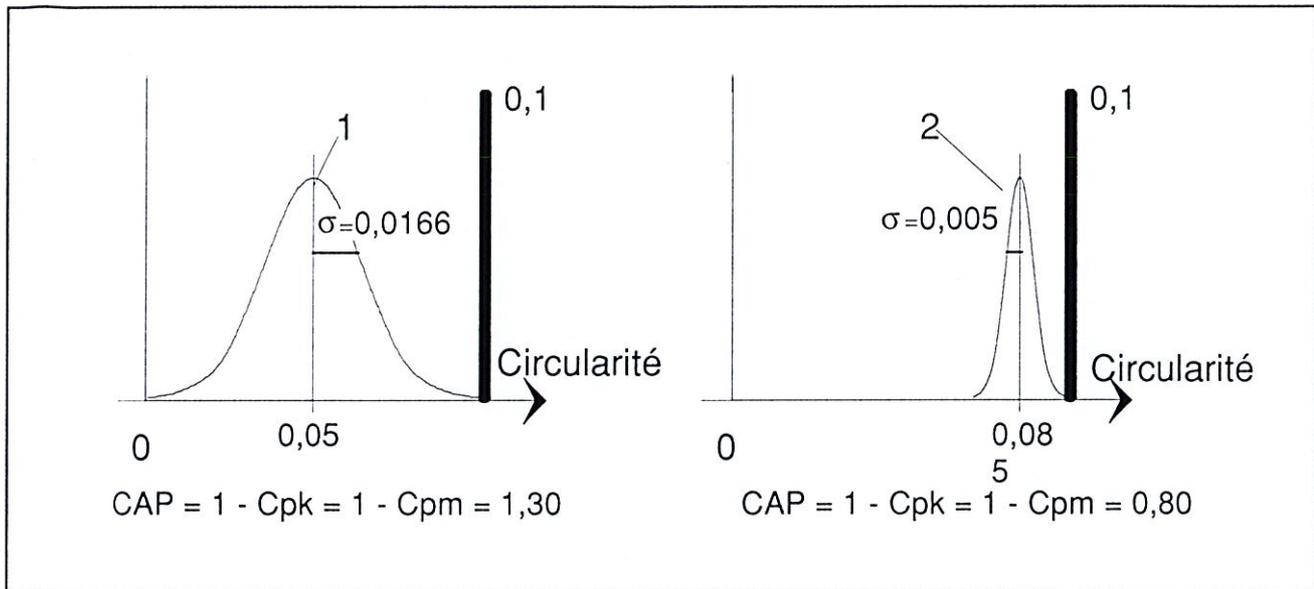


Figure 10 - Comparaison sur deux cas théoriques où Cpk est proche de 1

On constate que le Cpm tel que nous l'avons décrit dans cet article, est bien plus lié à la qualité réelle d'une production que tout autre indicateur connu. Surtout que dans ce cas, la valeur cible est parfaitement identifiée ( $X_0 = 0$ ), ce qui n'est pas toujours le cas dans les situations bilatérales.

## 6. Conclusions

L'indicateur Cpm dans le cas de tolérances bilatérales, que nous avons présenté dans un précédent article, offre de très nombreux avantages par rapport aux indicateurs classiques CAP et Cpk. L'extension du Cpm au cas des tolérances unilatérales que nous avons présenté dans cet article offre également des perspectives très intéressantes. Nous résumerons les avantages de ce nouvel indicateur de capacité par les remarques suivantes :

- Le calcul de Cpm est indépendant de la loi de distribution. Cela simplifie les calculs et évite de se poser la question sur la loi à utiliser (Loi normale, de défaut de forme, lognormale, Rayleigh...);
- Le Cpm traduit plus la qualité du fonctionnement du produit final que la qualité de la pièce. En effet, Cpm est calculé à partir de la répartition des pièces et non à partir du pourcentage de pièces hors tolérance;
- Cpm permet par un indicateur unique de caractériser une population. Cette simplification permet de mieux formaliser les relations clients fournisseur.

Bien sûr, les propositions que nous avons faites dans cet article sont ouvertes à la critique, et nous serons heureux d'échanger avec tous les lecteurs intéressés.

## Bibliographie

1. Chan L. K., Cheng S. W., Spiring F. A.  
A new measure of Process Capability : Cpm  
Journal of Quality Technology, Volume 20.
2. Douglas C. Montgomery  
Introduction to Statistical Quality Control  
Second edition - Wiley  
675 pages - 1990
3. Maurice Pillet  
Introduction aux plans d'expériences  
par la méthode TAGUCHI  
Ouvrage 240 pages  
Edition organisation - 1994
4. Maurice Pillet  
Appliquer la Maîtrise Statistique  
des Procédés MSP/SPC  
Ouvrage 340 pages  
Edition organisation - 1994
5. Maurice Pillet  
Les mesures de capacité  
Revue Contrôle industriel & Qualité n°171  
58 : 64 - Novembre 1991

6. Maurice Pillet  
Cotation statistique et SPC  
Journées de la cotation  
Annecy - 1993
7. Daniel Duret  
Cotation et méthodes de contrôle  
en fabrication mécanique  
Editions Augustin (1989)
8. Genichi Taguchi  
System of experimental Design  
Volume I & II - Kraus - 1987
9. Genichi Taguchi  
Elsayed A. Elsayed - Thomas Hsiang  
Quality engineering in production systems  
Mc Graw-Hill - 1989
10. AFNOR - Norme E60 181  
Réception des moyens de production  
1994.

*L'agencement  
de votre espace qualité.*

*suivant les normes ISO 9000 avec SESA SYSTEMS.*

**QUALIPOST 400**  
Poste de travail ergonomique :  
- Nombreuses options.

**QUALIPOST Série 3**  
Intégration d'appareils  
de mesure ou  
d'acquisition.

**MOBIPOST**  
Intégration  
ordinateurs :  
- Tiroir pour  
clavier et  
imprimante.  
- etc...

**INFOPOST**

**POINT  
"INFORMATION  
QUALITÉ"**  
Nombreux accessoires  
complémentaires.

**PORTE-FICHES  
MURAL  
ET PUPITRE**  
Pour une exploitation  
dans un environnement  
difficile.

**MODULE  
"INFORMATION  
QUALITÉ"**  
Affichage modulable pour la  
présentation des performances  
Qualité ou Production en milieu  
industriel.

**SESA SYSTEMS**  
B.P. 402 - 27404 LOUVIERS Cedex - Tél. 32 40 50 13 - Fax 32 50 47 82

VIGNY & COMMUNICATION DE 12 40 19 81

Lecteur Information n° 6

**POLYTECH**  
SSII partenaire  
de SAS INSTITUTE Spécialisé  
dans le domaine de la qualité

**EDUCASOFT**  
Organisme de formation  
Expert du système SAS

**RHÔNE POULENC  
QUALITÉ SERVICES**  
Partenaire et conseil  
des entreprises  
dans le domaine de la Qualité

**CISIA CERESTA**  
Organisme de formation  
conseil en statistique

*Sont heureux de vous inviter au séminaire*

## Qualité et Maîtrise Statistique des Processus - Normes ISO 9000

### PROGRAMME

- 10h00 Introduction**  
H. Gérard (Educasoft), B. Jacamon (Polytech), A. Morineau (Cisia Cerestra)
- 10h15 La M.S.P. dans la démarche Qualité - Norme iso 9000**  
A. Palsky (Groupe Rhône Poulenc) Membre de l'AFNOR, expert auprès du MFQ
- 11h00 «MSPRO» un outil d'aide à la conduite conforme à la méthodologie MSP (Norme AFNOR X06031)**  
M. Venchiarutti (Ingénieur A.M.) Directeur Technique (Polytech)
- 12h00 REPAS**
- 13h45 La démarche MSP : les pièges à éviter**  
M. Enaud Responsable du développement M.S.P. (Renault S.A.)
- 15h15 Exemples d'implantation de la MSP en milieu industriel**  
M. Toutain Direction Qualité (Schneider Electric)
- 16h15 Les outils de SAS Institute pour la maîtrise de la qualité et l'analyse de données**  
A. Postic Chef de produit Analyse (SAS Institute)
- 16h45 Conclusion**  
H. Gérard (Educasoft), B. Jacamon (Polytech), A. Morineau (Cisia Ceresta)

### Pour tout renseignement :

M. Jacamon de la société Polytech (Tél. 89 64 01 24 - Fax 89 65 27 03) ou  
M. Gérard de la société Educasoft (Tél. 69 07 13 15 - Fax 69 86 98 94).