



**HAL**  
open science

# Application de la théorie de la dualité aux systèmes céréaliers : étude économétrique sur la base de données individuelles

Jean-Christophe Bureau, E. Boutitie, A. Laubie, F. Magnien, Dominique  
Vermersch

## ► To cite this version:

Jean-Christophe Bureau, E. Boutitie, A. Laubie, F. Magnien, Dominique Vermersch. Application de la théorie de la dualité aux systèmes céréaliers : étude économétrique sur la base de données individuelles. [Rapport Technique] Inconnu. 1987, 46 p. hal-02311401

**HAL Id: hal-02311401**

**<https://hal.science/hal-02311401>**

Submitted on 10 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

E.N.S.A.E. - S. E. A.  
Groupe de Travail

INSTITUT NATIONAL DE LA RECHERCHE AGRONOMIQUE  
Station d'Economie et Sociologie Rurales  
**DOCUMENTATION**  
65, Rue de St Brieuc  
35042 RENNES CEDEX  
Tél. : 99.28.54.08 et 09

APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA DUALITÉ  
AUX SYSTÈMES CÉRÉALIERS : ÉTUDE ÉCONOMÉTRIQUE  
SUR LA BASE DE DONNÉES INDIVIDUELLES

Juin 1987

Bureau J.C.  
Boutitie E.  
Laubie A.  
Magnien F.  
Vermersch D.

INRA-  
ESR-AEN  
DV n° 87

## INTRODUCTION

Le travail ici présenté se propose de développer une méthodologie d'étude de la technologie des grandes orientations techniques agricoles.

De ce point de vue, l'ensemble "grandes cultures" (1) justifie des investigations particulières compte tenu de son importance. Ainsi, les céréales à elles seules représentent 18,2 % des livraisons totales de la branche en 1985. C'est également une activité qui risque de subir les effets dus au changement de conjoncture (Carles, 1985). D'autre part, les exploitations spécialisées dans les cultures de vente céréalières et industrielles (2) font l'objet d'observations détaillées réalisées dans le cadre du RICA (réseau d'information comptable agricole).

A ce sujet, notons que peu de travaux systématiques, de nature économétrique, ont été menés sur la technologie de l'agriculture française, que ce soit au niveau global ou au sein des diverses orientations productives.

L'étude présentée ici, raisonne sur données microéconomiques provenant d'une seule coupe (Année 81) et issues de comptabilités d'exploitations céréalières du RICA (cf. annexe) : les systèmes de grandes cultures sont susceptibles, en effet, de se modifier à court ou à moyen terme sous la pression notamment :

- des variations de prix : l'évolution du prix des céréales sur un marché saturé impliquera probablement des mouvements de substitution vers d'autres produits ; les variations des prix relatifs des facteurs influent également, dans un terme plus ou moins rapproché, sur la technologie adoptée.

- de contraintes naturelles : l'intensification des productions agricoles induit des effets externes négatifs sur le milieu naturel (érosion, baisse de fertilité...) dont l'internalisation pourra se reporter sur la structure des combinaisons productives.

S'investir dans une telle problématique nous situe, de fait, au coeur de la théorie de la production ; l'approche duale, associée à un comportement d'optimisation du producteur et à l'hypothèse de concurrence parfaite permet une modélisation appropriée.

Cette approche, qui a permis les récents développements en économie de la production, se structure sur la notion de fonction d'objectif indirecte (fonction de production, de coût, de profit) et sur le théorème de l'enveloppe : par différenciation partielle de ces fonctions, on obtient directement l'offre de produits et la demande de facteurs et on en déduit les élasticités-prix, toute l'information pertinente

(1) notamment : céréales, plantes industrielles, pommes de terre, betterave sucrière, légumes de plein champ, ...

(2) orientations "céréalières" et "autre agriculture générale" au sens de la classification des exploitations agricoles utilisée par la statistique agricole nationale et européenne.

concernant la technologie de production (rendements d'échelle, substitution entre facteurs, séparabilité, ...).

Le chapitre I portera sur une présentation théorique de l'approche duale en économie de la production. Il convient ensuite de spécifier une forme fonctionnelle flexible associée à la fonction d'objectif indirecte, et qui puisse se prêter, ensuite, à une estimation économétrique : ce sera l'objet du chapitre II où nous supposerons tous les facteurs variables.

L'hypothèse précédente de flexibilité de l'ensemble des facteurs mérite d'être affaiblie tout particulièrement dans le secteur agricole : la productivité du travail agricole est généralement plus faible que dans les autres secteurs (Bonnieux, 1986) et cet écart s'explique par une population active agricole nombreuse, par nature plus rigide aux mouvements de substitution des facteurs ; le manque de mobilité de la main-d'oeuvre familiale peut être ainsi appréhendé comme étant la principale source de déséquilibre du secteur. Le chapitre III, qui introduit la notion de fonction de coût variable, présente une nouvelle spécification du modèle où la terre et le travail familial sont considérés comme des facteurs fixes.

Nous concluerons sur une synthèse des résultats et sur de nouvelles orientations possibles de cette étude.

## Chapitre I. APPROCHE DUALE EN THEORIE DE LA PRODUCTION

L'approche duale permet de raisonner sur des hypothèses moins restrictives que l'approche primale : en effet cette dernière consiste à spécifier une fonction de production qui, associée au programme d'optimisation du producteur, permet de dériver l'offre de produits, la demande de facteurs et la fonction d'objectif indirecte. Empiriquement, cette approche se heurte à deux types de difficultés, à savoir la spécification d'une fonction de production et les problèmes de simultanéité relatifs à l'estimation économétrique.

La première étape consiste en la spécification d'une forme fonctionnelle pour la fonction de production : les premières générations de ces fonctions supposaient des proportions fixes entre facteurs ou des élasticités de substitution constantes, ce qui représente d'une manière trop schématique la réalité. Il faut attendre les années 1970 pour assister à l'introduction des formes fonctionnelles flexibles qui permettent de représenter toutes les possibilités de substitution.

Par ailleurs, une estimation économétrique correcte des paramètres de la fonction de production requiert la prise en compte de l'ensemble des relations qui expliquent la détermination des facteurs et des produits, autrement dit après optimisation (Malinvaud, 1969, p. 645). Cet obstacle justifie logiquement l'introduction de l'approche duale qui, reposant sur l'estimation d'une fonction d'objectif indirecte (donc après optimisation), nous évite également les difficultés relatives à la mesure des services des facteurs. La théorie de la dualité établit l'équivalence primale-duale.

Ce premier chapitre sera traité de la manière suivante : nous présenterons une formalisation de la technologie de production permettant, entre autres, une spécification de l'hypothèse de comportement du producteur. La dualité entre fonction de production et fonction de coût sera ensuite établie. Finalement, la prise en compte de facteurs fixes, relative à une analyse de court-terme, introduira à la fonction de coût variable dont nous verrons qu'elle contient l'information suffisante pour le calcul des élasticités de long terme.

### I.1. Technologie et fonction de production

Adoptons une représentation géométrique de la technologie (Jorgensen et Lau, 1974) ; soit une entreprise qui dispose de  $n$  biens  $x_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) en vue de produire  $y$  :

soit  $x' = (x_1, \dots, x_n)$  le vecteur des facteurs

et l'on suppose, pour tout  $i$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $p_i > 0$ .

Définissons l'ensemble de production  $Y$  comme étant l'ensemble des couples  $(x', y)$  techniquement possibles pour l'entreprise : le producteur peut produire  $y$  s'il dispose de  $x$ . Cet ensemble  $Y$  formalise l'état des connaissances techniques, les lois physico-chimiques et naturelles dans la sphère productive agricole.

Soient  $Y^* = \{ y / (x', y) \in Y, \forall x \}$  l'ensemble des productions possibles et

$X(y) = \{ x / (x', y) \in Y \}$ , l'ensemble des vecteurs de facteurs rendant possible la production de  $y$ .

Notons  $T_1$  l'hypothèse initiale sur  $Y$  :

$T_1$  :  $Y$  est non-vide et fermé et si  $y \neq 0$ , alors  $x \neq 0$ .

$Y$  sous  $T_1$  est dit alors régulier  
soit enfin  $Y(x) = \{ y / (x', y) \in Y \}$  l'ensemble des productions rendues possibles par la disposition de  $x$

L'entreprise, dans une logique rationnelle, se limitera aux couples  $(x', y)$  techniquement efficaces, autrement dit aux couples  $(x', y)$  tels que :

si  $y \in Y(x)$ , alors  $\forall y' \in Y(x)$ ,  $y' \leq y$

Ceci nous amène à définir la fonction de production  $f$  :

$$f(x) = \underset{y}{\text{Max}} [y ; y \in Y(x)]$$

La régularité de  $Y$  implique l'existence et la continuité à droite de la fonction  $f$ .

### I.2. Hypothèse de comportement : la fonction de coût

a) Introduction

soit  $p' = (p_1, \dots, p_n)$ , le vecteur-prix des facteurs ;

H<sub>1</sub> (i) Les prix sont donnés et ne dépendent pas des décisions de l'entreprise.

(ii) à ces prix, l'entreprise peut acheter (vendre) une quantité quelconque de chacun des biens (produit).

Cette hypothèse de concurrence parfaite schématise, de manière correcte, le comportement des entreprises agricoles et l'environnement économique au sein duquel elles opèrent.

Ce cadre concurrentiel peut se révéler, à juste titre, inadéquat dans de nombreux cas tels, dans la sphère agricole, la présence d'incertitudes quant aux prix futurs de productions ou le fait de spéculations agricoles soumises à des contraintes de débouchés, de disponibilités limitées en certains facteurs : ces diverses modalités infèrent directement sur le cadre décisionnel de l'entreprise, en effet, celui-ci nécessite :

- l'identification des variables (facteurs et produit) soumises aux choix de l'entreprise et celles qui ne le sont pas.

- la donnée de l'information sur laquelle les choix sont opérés.

Le comportement du producteur est alors formalisé suivant l'hypothèse H<sub>2</sub> :

H<sub>2</sub> choisir  $x = (x_i)$  tel que  $G(x, z, w)$  soit optimisée.

$G$  est définie comme étant la fonction d'objectif de l'entreprise.

$x = (x_1, \dots, x_n)$  : ensemble des variables soumises au choix de l'entreprise (les facteurs variables).

$z$  = variables non soumises aux choix de l'entreprise que nous assimilerons aux facteurs fixes.

$w$  = ensemble informationnel.

La prise en compte de facteurs fixes établira la distinction entre l'analyse de long terme et celle de court terme ; nous n'aborderons pas la formalisation de l'ensemble informationnel détenu par l'entreprise qui découle de la prise en compte initiale d'un environnement incertain sur lequel il nous faut supposer au préalable l'existence d'une loi de probabilité.

Nous adoptons ici la minimisation du coût des facteurs variables sous contrainte d'un niveau désiré du produit. Ce choix de comportement se justifie dans la mesure où le producteur sera de plus en plus largement soumis à une demande effective (débouchés contraints) ; quant à l'hypothèse de maximisation du profit, elle requiert en toute rigueur, la connaissance des prix futurs à la production, eux-mêmes soumis à l'incertain d'où la prise en compte d'un ensemble informationnel.

b) La fonction de coût du producteur

L'objectif de minimisation du coût se traduit de la manière sui-

$$\text{vante : (1) Min } \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{s.t. } f(x) \geq y$$

La fonction de coût est alors définie par :

$$(2) C(y,p) = \text{Min}_x [p'x ; x \in X(y) ]$$

L'existence de  $C(y,p)$  est assurée dès lors que toute fonction continue (en l'occurrence  $p'x$ ) sur un ensemble non vide fermé et borné (ici  $X(y)$ ) atteint un minimum dans cet ensemble. En outre, elle possède les propriétés suivantes :

$$C1 : C(y,p) \geq 0$$

$$C2 : C(y,p) > 0 \text{ pour tout } y > 0$$

$$C3 : \text{à } y \text{ donné, } C(y,p) \text{ est non décroissante par rapport à } p.$$

$$C4 : C(y,p) \text{ est linéaire homogène par rapport à } p.$$

$$C5 : \text{à } y \text{ donné, } C(y,p) \text{ est concave par rapport à } p.$$

$$C6 : C(y,p) \text{ est continue en } p.$$

Varian (1984, p.44) propose une démonstration explicite de ces diverses propriétés.

La donnée de l'hypothèse T1 sur la technologie de production suffit donc pour s'assurer de l'existence de la fonction de coût vérifiant les propriétés C1 à C6.

D'autre part, les propriétés de différentiabilité à l'ordre deux et de symétrie de la fonction de coût peuvent être obtenues comme corollaires de la théorie des fonctions convexes (Fuss, Mac Fadden, 1978, p. 15) :

$$\text{ainsi (3) } \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i}$$

La propriété de différentiabilité est vérifiée pour presque tout vecteur-prix strictement positif et nous introduit à un résultat fondamental dû initialement à Shephard (1953) :

#### Lemme de Shepard

soit  $C(y,p)$  la fonction de coût définie précédemment

(i) si la dérivée partielle de  $C$  par rapport à  $p_i$ , notée  $\frac{\partial C}{\partial p_i}$  existe au point  $(y,p)$ , alors  $\frac{\partial C}{\partial p_i} = x_i^c(y,p)$  (4).

$x_i^c(y,p)$  étant la solution unique de (1) pour  $x_i$ .



(ii) si  $\frac{\partial C}{\partial p_i} x_i^c(y, p)$  est la solution unique de  $x_i$  pour (1) alors existe.

L'hypothèse de différentiabilité étant admise en tout point, le lemme de Shephard est généralement assimilé à l'égalité (4) et se présente comme une application directe du théorème de l'enveloppe (Taylor, 1985, p.232) ; Fuss et Mac Fadden (1978, p.14) en fournissent une démonstration plus rigoureuse.

Le lemme de Shephard montre que la connaissance de la fonction de coût est suffisante pour en déduire les demandes de facteurs et s'articule avec la mise en évidence d'une possible dualité entre fonction de coût et technologie de production : moyennant l'ajout d'hypothèses faibles sur la technologie, la fonction de coût peut décrire complètement la technologie, d'une manière équivalente à la fonction de production.

### I.3. la dualité entre fonction de production et fonction de coût

#### a) Mise en évidence

Considérons la fonction de coût  $C(y, p)$  définie précédemment munie des propriétés C1 à C6.

$$y \in Y^*, X(y) = \{ x / (x', y) \in Y \} = \{ x / f(x) \geq y \}$$

soit  $p_1$  un vecteur prix,  $p_1 \neq 0$  et

$$(5) I(p_1) = \{ x / p_1' \cdot x \geq C(y, p_1) \}$$

comme  $C(y, p_1) = \min_x [p_1' \cdot x / x \in X(y)]$

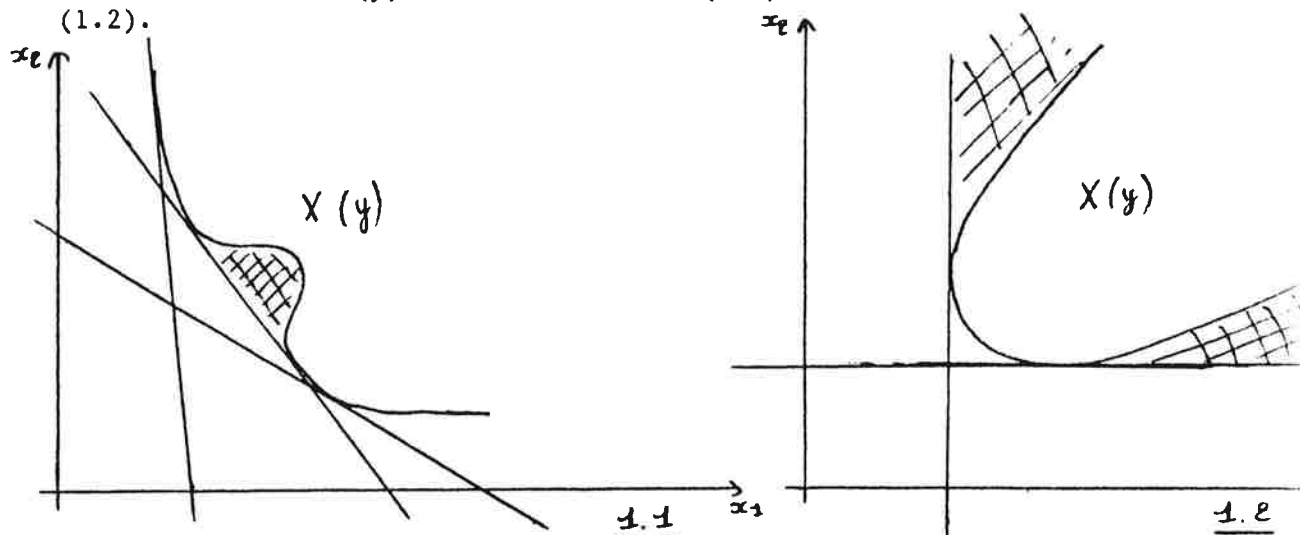
$$\forall x \in X(y), x \in I(p_1), \text{ ce qui implique } X(y) \subset I(p_1)$$

ceci est vérifié pour tout  $p \neq 0$

$$\text{autrement dit } X(y) \subset \bigcap_{p \neq 0} I(p) = \bigcap_{p \neq 0} \{ x ; p' \cdot x \geq C(y, p) \}$$

$$\text{ou encore } X(y) \subset \bigcap_{p \neq 0} \{ x ; p' \cdot x \geq C(y, p) \} \equiv X^*(y)$$

Les figures 1.1. et 1.2 représentent cette relation d'inclusion dans les cas où  $X(y)$  est non convexe (1.1) et  $f$  est non croissante (1.2).



d'après (Varian, 1984, p.62)

$$\begin{aligned} & * \\ \text{soit alors } f^*(x) &= \text{Max}_y [y ; x \in X^*(y)] \\ & * \\ f^*(x) &= \text{Max}_y [y ; p'x \geq C(y,p) \quad \forall p \neq 0] \end{aligned}$$

En général,  $f^*(x)$  ne coïncide pas avec  $f(x)$ , les figures précédentes en sont une illustration ; moyennant les hypothèses supplémentaires T2 et T3 suivantes :

T2  $f$  est non décroissante

T3  $f$  est une fonction quasi concave (ou, d'une manière équivalente,  $X(y)$  est convexe).

La coïncidence entre  $f^*(x)$  et  $f(x)$  peut être démontrée pour tout point  $x$  de la frontière de  $X(y)$ , il existe un vecteur de prix  $p$ , tel que  $x$  est solution de (1).

(1) Comme le fait remarquer Diewert (1982, p. 547) cette mise en évidence de la dualité est une application directe du théorème de Minkowski : tout ensemble convexe fermé (ici  $X(y)$  peut être généré par l'intersection de ses demi-espaces d'appui (ici  $I(p)$ ,  $p \neq 0$ ). Ces relations duales entre fonction de production et fonction de coût furent introduites par Shephard (1953) ; de nombreux travaux postérieurs (Uzawa, 1964), (Mac Fadden 1962), entre autres, étendirent ces relations dans le cas d'une technologie multi-produits, d'une fonction de profit...

## b. Pratique de l'approche duale

Le résultat théorique précédent se révèle d'un intérêt pratique important; la fonction de coût contenant toute l'information nécessaire pour représenter la technologie, il s'agira donc de spécifier, en premier lieu, une forme fonctionnelle pour  $C(y,p)$ , deux fois différentiable, munie des propriétés C1 à C6 par application du lemme de Shephard, nous obtenons les demandes de facteurs, puis par une seconde dérivation, les différentes élasticités-prix.

Par ailleurs, il est possible d'étudier les propriétés importantes de la technologie (homothéticité, homogénéité linéaire de la fonction de production, séparabilité des facteurs) à partir des propriétés de la fonction de coût.

I.4. Prise en compte de facteurs fixes : fonction de coût variable

Nous considérons toujours l'ensemble des  $n$  facteurs utilisés ( $x_1, \dots, x_n$ ) et supposons les  $h$  premiers fixes :  $z_1, \dots, z_h$ .

Le programme d'optimisation (1) devient :

$$(6) \quad \text{Min} \sum_{j=1}^h p_j x_j + \sum_{i=h+1}^n p_i x_i$$

$$(a) \quad f(x) \geq y$$

$$x_j \leq z_j \quad j=1 \dots h$$

A l'optimum, la contrainte (a) est saturée et le producteur subit le coût  $p_j \cdot z_j$  quelque soit la quantité effectivement utilisée du facteur  $j$  : la fonction de production étant supposée croissante par rapport à chacun de ses arguments, le producteur, utilisera la quantité  $z_j$  d'où :

$$(7) \quad \text{Min} \sum_{i=h+1}^n p_i x_i$$

$$f(z_1, \dots, z_h, x_{h+1}, \dots, x_n) = y$$

moyennant les hypothèses précédentes sur la technologie, (7) a une solution  $x^* = (x_{h+1}^*, \dots, x_n^*)$  dont les arguments seront : les prix  $p_i$ ,  $i = h+1, \dots, n$  le niveau de production  $y$ , les quantités de facteurs  $z_j$ ,  $j : 1 \dots h$ .

La fonction de coût variable  $CV(y, p_i, z_j)$  est la fonction de coût de court terme alors que la fonction de coût total  $C(y, p)$  correspond au coût de long terme. Les relations entre les matrices hessiennes de ces deux fonctions permettent de déduire les résultats de statistique comparative de long terme connaissant ceux de court terme (Lau, 1976).

Donc, les élasticités de long terme peuvent être obtenues par la seule donnée de la fonction de coût variable.

En effet,  $C(y, p)$  peut s'écrire :

$$(8) \quad C(y, p) = \min_z \left\{ \sum_{j=1}^h p_j z_j + CV(y, p, z) \right\}$$

Par ailleurs, nous avons, à l'équilibre de long terme :

$$(9) \quad p_j + \frac{\partial CV(p, z)}{\partial z_j} = 0 \quad j = 1 \dots h$$

$$(10) \quad \frac{\partial C}{\partial p_j} = z_j \quad j = 1 \dots h$$

$$(11) \quad \frac{\partial C}{\partial p_i} = \frac{\partial CV}{\partial p_i} \quad i = h+1 \dots n$$

Les équations (9) traduisent les conditions nécessaires du premier ordre du programme (8) quant à (10) et (11), elles sont une application du lemme de Shephard.

Décomposons ensuite  $p' = (p_1, \dots, p_n) = (p'_z, p'_x)$

$$p'_z = (p_1, \dots, p_h)$$

$$p'_x = (p_{h+1}, \dots, p_n)$$

En dérivant l'ensemble des équations (10) et (11) par rapport à  $p_x$  et  $p_z$ , il vient :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial p_x \partial p_z} = \frac{\partial z}{\partial p_x}$$

$$(13) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial p_z^2} = \frac{\partial z}{\partial p_z}$$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial p_x^2} = \left[ \frac{\partial^2 C V}{\partial p_x^2} \right] + \left[ \frac{\partial z}{\partial p_x} \right] \left[ \frac{\partial^2 C V}{\partial z \partial p_x} \right]$$

$$(15) \quad \frac{\partial^2 C}{\partial p_z \partial p_x} = \left[ \frac{\partial z}{\partial p_z} \right] \left[ \frac{\partial^2 C V}{\partial z \partial p_x} \right]$$

Ces égalités, prises au point  $z$  du plan de production de long terme, s'interprètent comme les formules de passage du court terme au long terme. Les niveaux  $z_j$  optimaux sont des fonctions de  $p_i$  ( $i = h + 1, \dots, n$ ) et de  $p_j$  ( $j = 1, \dots, h$ ) et de  $y$ . Ils s'obtiennent au travers des équations (9), ce qui détermine les termes  $\frac{\partial z}{\partial p_x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial p_z}$ .

## Chapitre II. LA FONCTION DE COUT DE LONG TERME

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une spécification de la fonction de coût où tous les facteurs sont variables. Nous supposons donc, qu'en fonction du prix des facteurs et du niveau d'output, l'agriculteur peut adapter les niveaux des consommations intermédiaires, du capital, du travail et de la terre qui lui permettent de minimiser son coût. Nous nous intéressons à une fonction à quatre facteurs variables, cités ci-dessus.

L'adaptation au système de prix ou au niveau d'output peut demander un certain temps. C'est pourquoi une telle spécification n'est justifiée que pour une approche long terme.

Après un préliminaire, sur la spécification de la forme fonctionnelle et le choix de la forme translog, nous nous intéresserons dans une première partie à l'écriture du modèle et à sa spécification stochastique.

Dans une deuxième partie, nous présenterons les résultats des estimations et des tests, puis nous concluerons en les comparant à la littérature déjà publiée sur le sujet.

**PRELIMINAIRE :**

## LE CHOIX D'UNE FORME FONCTIONNELLE

Ni la théorie économique, ni la connaissance empirique ne permettent d'imposer une spécification a priori pour une fonction de production ou de coût. On dispose d'une certaine liberté de choix et l'on retiendra une forme fonctionnelle qui permette de tester des propriétés particulières. On peut (LAU 1986, p. 520) proposer un ensemble de critères pour guider ce choix : la compatibilité avec la théorie, la flexibilité, le domaine d'applicabilité, la facilité de mise en oeuvre, et la compatibilité avec les observations empiriques.

1) Compatibilité avec la théorie

La forme algébrique choisie doit posséder les propriétés requises par la relation économique considérée. Dans le cas d'une fonction de coût il est logique d'imposer que la fonction soit homogène de degré un par rapport aux prix, non décroissante par rapport aux prix et au produit, concave par rapport aux prix des inputs. La forme fonctionnelle choisie doit pouvoir posséder ces propriétés pour un choix adéquat des paramètres. Elle doit aussi pouvoir prendre en compte des contraintes sur la fonction de production, puisque la fonction de coût (duale) apporte autant d'information sur la technologie que la fonction de production et, en particulier, permettre des substitutions entre facteurs. On admet généralement que la production agricole est soumise à des lois physiques telles que la productivité moyenne d'un facteur de production soit bornée supérieurement, et que la fonction de production ne soit pas globalement convexe. Ceci implique que la forme fonctionnelle permette des coûts marginaux croissants ou constants (la concavité de la fonction de coût est impliquée par la quasi-concavité de la fonction de production, (BEATTIE, TAYLOR, 1985, p.241). Ces conditions étant remplies, il y a tout lieu de préférer une forme fonctionnelle imposant le minimum de contraintes a priori sur la séparabilité des facteurs, les possibilités de substitution, l'homogénéité de la fonction de production sous-jacente : il convient donc de retenir des formes algébriques n'imposant pas ces contraintes (ce qui n'est pas le cas des formes CD ou CES) mais qui permettent de les tester : c'est le cas des formes dites "flexibles".

2) La flexibilité

Afin de tester des hypothèses sur la technologie, dont bon nombre se traduisent par des contraintes sur les élasticités de substitution au sens de ALLEN, il est nécessaire de laisser celles-ci prendre n'importe quelle valeur. Cependant, UZAWA (1962) a montré qu'il n'existe pas de forme fonctionnelle telle que cette propriété soit possible dès lors que le nombre de facteurs excède deux. De ce fait, on a recherché des fonctions ayant des propriétés plus faibles, la contrainte sur les élasticités de substitution étant simplement locale et non plus globale

comme dans la CD ou la CES. De telles spécifications sont appelées des "formes flexibles". DIEWERT (1974, p.113) définit une forme fonctionnelle  $C(y,p)$  comme étant flexible si et seulement si elle contient assez de paramètres pour que le niveau de  $C(y_0, p_0)$ , le gradient et le Hessien de  $C(y_0, p_0)$  correspondent à ceux de  $C^*(y_0, p_0)$ .

Six formes de ce type ont jusqu'ici été considérées. La forme translog (CHRISTENSEN, JORGENSEN, LAU, 1973), la forme Leontieff généralisée (DIEWERT 1971), la forme quadratique généralisée (DIEWERT 1974), la Box Cox généralisée (KHALED, 1978) la Cobb-Douglas généralisée (MAGNUS, 1979) et la Minflex-Laurent (BARNETT 1982) sont les plus connues. Des formes basées sur des séries de Fourier (GALLANT 1981) ou des fonctions proposées plus récemment (la Mc Fadden généralisée, la Mc Fadden généralisée symétrique, la Barnett généralisée) par DIEWERT et WALES (1987) sont rarement utilisées.

On peut vérifier que ces formes répondent bien au critère de flexibilité. Ainsi on vérifie facilement que la fonction de coût Translog

$$\ln C(y, p) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \ln p_i + a_y \ln y + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \ln p_i \ln p_j + \sum_{i=1}^N a_{iy} \ln p_i \ln y + \frac{1}{2} a_{yy} (\ln y)^2$$

avec symétrie ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) et homogénéité de degré un par rapport aux prix ( $\sum a_i = 1, \sum a_{ji} = 0, \sum a_{iy} = 0$ ) possède le nombre requis de paramètres libres pour satisfaire en un point le critère de flexibilité. Cependant, si l'on impose des propriétés de régularité (JORGENSEN, FRAUMENT 1981) en imposant que la matrice des  $a_{ij}$  soit semi-définie négative, on détruit la flexibilité de la fonction (ce qui a amené DIEWERT et WALES (1987) à retenir une forme "Mc Fadden généralisée symétrique" qui permet d'imposer la concavité globale par rapport au prix sans détruire la flexibilité. Mais cette forme est encore peu connue et l'on préférera retenir une forme plus classique). Il n'est donc pas possible d'imposer la régularité de la fonction sans introduire des contraintes a priori sur les élasticités d'ALLEN et donc perdre l'essentiel de l'intérêt de ces formes fonctionnelles. Il faut alors vérifier que la propriété de régularité, légitime du point de vue de la théorie, est bien vérifiée sur l'échantillon. Dans la pratique, c'est rarement le cas sur la totalité des points. Comme différentes formes algébriques peuvent donner des intervalles plus ou moins grands où la régularité est vérifiée, certaines peuvent paraître mieux adaptées à la relation économique. Choisir la forme la plus adaptée pour les conditions qu'on ne peut imposer a priori constitue ce que LAU (1986) appelle le critère du "domaine d'applicabilité".

### 3) Domaine d'applicabilité

Ce domaine peut être défini comme l'ensemble des valeurs des variables explicatives pour lesquelles la forme fonctionnelle satisfait



les exigences de compatibilité avec la théorie : dans le cas présent, la fonction de coût doit être monotone croissante par rapport aux prix et au niveau de production et doit être concave par rapport aux prix. Ces hypothèses définissent, lorsqu'elles sont vérifiées, le domaine de validité de la fonction. Par contre, la symétrie du Hessien, la non négativité de la fonction qui peuvent être imposées sans soulever des problèmes de flexibilité, ou encore l'homogénéité linéaire par rapport aux prix ne sont pas des critères discriminants pour le choix entre les différentes formes flexibles. On ne dispose pas d'information a priori sur les domaines de régularité de chacune des formes fonctionnelles qui permette de choisir la meilleure spécification. Tout au plus l'étude empirique de BARNETT, LEE et WOLFE (1985) suggère que le domaine de régularité d'une Leontieff généralisée ou d'une translog est plus réduit que celui d'une Minflex Laurent : la translog est régulière au point moyen de leur échantillon, mais cette propriété n'est pas assurée aux frontières de l'échantillon, sauf, bien entendu dans le cas particulier d'une Cobb-Douglas. En l'absence de conclusions tranchées, il serait donc nécessaire de vérifier sur notre échantillon la régularité de plusieurs spécifications. La comparaison de leur domaine de régularité respectif peut être un critère de choix.

#### 4) La facilité de mise en oeuvre

La translog et la Léontieff généralisée présentent de nombreux avantages pratiques, par rapport à la minflex Laurent, dont les conditions d'homogénéité imposent des contraintes non linéaires, ou à la Base Cox généralisée, difficilement estimable. L'un des principaux avantages est que, toutes deux, grâce aux Lemme de Shephard permettent des expressions de demandes dérivées de facteur linéaires dans ces paramètres à estimer. Ceci permet une facilité d'estimation et de faire appel aux outils de l'inférence statistique développés autour du modèle linéaire, qui apportent une information précieuse sur la validité des estimateurs. De plus dans ces deux formes, c'est le nombre minimal de paramètres nécessaire à la flexibilité que l'on a à estimer (critère de parcimonie).

Parmi les trois formes les plus faciles à mettre en oeuvre (Translog, Leontieff généralisée, quadratique), nous avons retenu la spécification translog. En toute rigueur, il conviendrait de choisir en fonction de leurs domaines de régularité, et, également, en fonction de la conformité des estimations à posteriori, compte tenu des connaissances empiriques (signes des élasticités, importance des rendements d'échelle ...).

#### 5) Les avantages de la translog

La forme algébrique translog répond au critère de flexibilité, n'impose qu'un minimum de restrictions a priori et est capable d'approcher correctement une fonction quelconque, au moins au voisinage du point moyen. Facile à estimer, grâce aux équations de demande de facteur, peu susceptibles de biais de simultanéité ni de multicollinéarité, la fonction de coût translog permet de déduire facilement des élasticités d'ALLEN à partir des paramètres, qui en sont une forme linéaire, et effectuer ainsi des tests de significativité de celles-ci.

La plupart des hypothèses que l'on souhaite tester s'exprime comme des contraintes linéaires sur les paramètres, particulièrement simples à intégrer dans un système d'équations de parts de facteurs (une équation est omise pour l'estimation, afin d'éviter la singularité de la matrice de variance - covariance).

La fonction translog est donc une forme facile à mettre en oeuvre, qui permet de tester et de vérifier les principales propriétés de la technologie sans les imposer à priori.

Il faut cependant, dans une étude empirique, rester prudent dans l'interprétation des résultats. Comme approximation quadratique d'une fonction de coût, il n'est pas exclu que la translog donne des résultats peu crédibles pour des élasticités de substitution. Dans une étude de simulation, GUILKEY et LOVELL (1980) montrent d'ailleurs les limites de cette approche puisqu'une approximation translog d'une "vraie" CES n'est guère performante pour estimer des élasticités de substitution entre facteurs.

## II.2. Ecriture du modèle et spécification stochastique

La forme fonctionnelle choisie nous conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \ln C(Y, p_1 \dots p_4) = & a_0 + a_1 \ln y + a_2 (\ln y)^2 \\ & + \sum_{i=1}^4 b_i \ln p_i \ln y + \sum_{i=1}^4 c_i \ln p_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 d_{ij} \ln p_i \ln p_j \end{aligned}$$

Nous considérons quatre facteurs variables : les consommations intermédiaires, le capital, le travail et la terre.

Le développement de la fonction Translog s'effectue autour du point moyen : ainsi  $\ln y$  et  $\ln p_i$  dans l'écriture ci-dessus sont en fait les variables centrées  $\ln y - \bar{\ln y}$  et  $\ln p_i - \bar{\ln p_i}$ . Pour alléger les écritures, nous nous contenterons d'écrire  $\ln y$  et  $\ln p_i$ .

## II.2. Ecriture des parts de facteurs

La fonction de coût résulte de la minimisation de  $\sum_{i=1}^4 p_i X_i$

$X_i$  : niveau d'input,  $p_i$  : prix de l'input  $i$ , sous la contrainte de la technologie de production.

D'après le lemme de Shephard :

$$\text{à l'optimum : } X_i^* = \frac{\partial C}{\partial p_i}$$

$$\text{d'où } \frac{\ln C}{\ln p_i} = p_i / C \frac{\partial C}{\partial p_i} = p_i X_i^* / C = M_i$$

$M_i$  est la part du facteur  $i$  dans le coût total à l'optimum.

Comme nous supposons que les observations sont obtenues à l'optimum de l'utilisation des facteurs, nous disposons de quatre équations de part de facteur :

$$M_i = C_1 + b_i \ln y + \sum_{j=1}^4 1/2 (d_{ij} + d_{ji}) \ln p_j$$

Si on pose  $D_{ij} = \frac{1}{2} (d_{ij} + d_{ji})$ , par construction  $D_{ij} = D_{ji}$ .

L'écriture d'une fonction de coût de forme translog revient à supposer celle-ci deux fois différentiable, ce qui entraîne la symétrie des dérivées partielles secondes et donc  $d_{ij} = d_{ji}$ .

$$D_{ij} = D_{ji} = d_{ij} = d_{ji}.$$

La spécification stochastique consiste en l'addition, pour les quatre équations de parts de facteurs, d'un terme d'erreur  $\mathcal{E}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) normalement distribué :

$$\mathcal{E}_i \sim N(0, \sigma_i^2)$$

$$E(\mathcal{E}_{in} \cdot \mathcal{E}_{in'}) = 0 \quad n \neq n'$$

$$E(\mathcal{E}_{in} \cdot \mathcal{E}_{jn}) = \sigma_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

C'est le cadre d'hypothèses classiques des régressions simultanées. Les termes  $\mathcal{E}_i$  traduisent des écarts au comportement de minimisation du coût.

Ils sont corrélés car nous avons construit les données de telle façon que pour chaque observation (exploitation)  $\sum_{i=1}^4 M_i = 1$ , ce qui implique la contrainte suivante :  $\sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i = 0$ .

L'information relative à la structure aléatoire du second ordre qui en résulte impose une estimation simultanée des équations de ce modèle (Zellner, 1962).

La relation  $\sum M_i = 1$ , dite contrainte d'additivité entraîne les relations suivantes sur les paramètres :

$$\cdot \sum_{i=1}^4 c_i = 1$$

$$\cdot \sum_{i=1}^4 b_i = 0$$

$$\cdot \sum_{i=1}^4 d_{ij} = 0$$

De plus, elle rend la matrice de variance-covariance du système des parts de facteur empilées singulière. Une équation doit donc être éliminée. Barten (1969) a montré que les estimateurs du maximum de vraisemblance sont indépendants de l'équation omise. Nous avons choisi d'éliminer la quatrième équation, soit le modèle de base :

$$M_1 = c_1 + b_1 \ln y + d_{11} \ln p / p + d_{12} \ln p / p + d_{13} \ln p / p + \mathcal{E}_1$$

$$M_2 = c_2 + b_2 \ln y + d_{12} \ln p / p + d_{22} \ln p / p + d_{23} \ln p / p + \mathcal{E}_2$$

$$M_3 = c_3 + b_3 \ln y + d_{13} \ln p / p + d_{23} \ln p / p + d_{33} \ln p / p + \mathcal{E}_3$$

### II.2.2. Test de symétrie

Ce test consiste à tester l'égalité  $d_{ij} = d_{ji}$ . D'après l'écriture des parts de facteur, on teste en fait  $D_{ij} = D_{ji}$ . Or par construction,  $D_{ij} = 1/2 (d_{ij} + d_{ji})$ . Réaliser ce test revient donc à remettre en cause la spécification même du modèle et de la forme fonctionnelle. C'est pourquoi de nombreux auteurs supposent cette symétrie, puisqu'elle est la conséquence du choix de la forme fonctionnelle.

### II.2.3. Homogénéité linéaire de la fonction de coût

Si la fonction de coût est homogène linéaire alors :

$$\forall \lambda > 0, \forall p \in \mathbb{R}^4, C(y, \lambda p) = \lambda C(y, p)$$

On montre que les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres sont :

$$\sum_{i=1}^4 c_i = 1 \quad \sum_{i=1}^4 b_i = 0 \quad \sum_{i=1}^4 d_{ij} = \sum_{j=1}^4 d_{ij} = 0$$

$$\text{Les contraintes } \sum_{i=1}^4 c_i = 1 ; \sum_{i=1}^4 b_i = 0 ; \sum_{i=1}^4 d_{ij} = 0$$

sont portées par le modèle car découlent de la contrainte d'additivité ( $\sum M_i = 1$ ).

Ainsi, dès que l'on accepte ou que l'on suppose la symétrie ( $d_{ij} = d_{ji}$ ), alors

$$\sum_{i=1}^4 d_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^4 d_{ij} = 0 \text{ et la contrainte d'additivité}$$

entraîne l'homogénéité linéaire de la fonction de coût.

Par contre, il est possible de tester l'homogénéité si on ne suppose pas la symétrie en testant la contrainte

$$\sum_{j=1}^4 d_{ij} = 0$$

### II.2.4. Homothéticité et homogénéité linéaire de la fonction de production

#### Proposition :

(i) La fonction de production est homothétique  $\Leftrightarrow$

La fonction de coût duale associée est de la forme  
 $C(y, P) = H(y) G(p)$   
 où H est une fonction croissante de Y.

(ii) La fonction de production est homogène linéaire  $\Leftrightarrow$

La fonction de coût duale associée est de la forme  
 $C(y, p) = Y \cdot G(p)$

(i) et (ii) se démontrent de façon analogue.

Démontrons (i) :

Soit  $Y = F(X)$ ,  $X = (X_1 \dots X_4)$  la fonction de production.  
 Si elle est homothétique, il existe une fonction  $\varphi$  croissante, et une fonction  $g$  homogène de degré un telles que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^4, \quad F(X) = \varphi(g(X)) \quad \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs } C(y, p) &= \min_X \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i X_i / Y = F(X) \right\} \\ &= \min_X \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i X_i / \varphi^{-1}(Y) = g(X) \right\} \end{aligned}$$

en multipliant X par  $\varphi^{-1}(Y)$  :

$$C(y, p) = \min_X \left\{ p_i (X_i \varphi^{-1}(y)) / \varphi^{-1}(y) = g(x \varphi^{-1}(y)) \right\}$$

Comme  $g$  est homogène linéaire :

$$\begin{aligned} C(y, p) &= \varphi^{-1}(y) \min_X \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i X_i / \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y) \cdot g(X) \right\} \\ &= \varphi^{-1}(y) \min_X \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i X_i / g(X) = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(y, p) &= H(y) \cdot G(p) \quad \text{où } H = \varphi^{-1} \\ \text{et} \\ G(p) &= \min_X \left\{ \sum_{i=1}^4 p_i X_i / g(x) = 1 \right\} \end{aligned}$$

L'homothéticité puis l'homogénéité linéaire de la fonction de production peut donc être testée d'après la forme de la fonction de coût.

Pour tester l'homothéticité, il suffira donc de tester les égalités :  $b_1 = 0 \forall_i$  (pas de termes croisés en y et p).

Si on accepte l'homothéticité, on testera l'homogénéité linéaire en testant  $a_2 = 0$  et  $a_1 = 1$ .

Pour cela, il faudra estimer le modèle sous contraintes d'homothéticité et la fonction de coût. En effet, les paramètres  $a_1$  et  $a_2$  n'interviennent pas dans les équations de part de facteurs.

#### II.2.5. Elasticités de Allen

Ces élasticités permettent, à partir de la fonction de coût, de tester la substituabilité et la séparabilité entre facteurs pour la fonction de production.

Allen (1938) a étendu à un nombre quelconque de facteurs les travaux de J. Robinson et Hicks sur les substitutions factorielles.

L'élasticité de substitution entre deux facteurs est définie comme la variation en pourcentage du montant relatif d'un premier facteur à la suite d'une variation en pourcentage du prix relatif du second.

$$\text{Soit } e_{ij} = \frac{\Delta X_i}{\Delta p_j} p_j / X_i$$

Allen définit les élasticités de substitution partielles par :

$$S_{ij} = \sum_{h=1}^n \frac{X_h F'_h}{X_i X_j} \frac{|\bar{F}_{ij}|}{|\bar{F}|}$$

où F est la fonction de production ;  $F'_h = \frac{\partial F}{\partial X_h}$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & F'_1 & \dots & F'_n \\ F_1 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & F''_{ij} & \\ F'_n & & & \end{pmatrix}$$

; $|\bar{F}|$  est le déterminant de  $\bar{F}$  et

$|\bar{F}_{ij}|$  le cofacteur de  $F''_{ij}$  dans F appelée matrice Hessienne bordée.

Si la production est efficace et si l'offre d'input est parfaitement élastique, alors (Allen, 1938, p. 503-509) :

$$S_{ij} = \frac{\frac{\partial X_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{X_i}}{\sum p_h X_h} = e_{ij} / M_j$$

où  $M_j$  est la part du facteur  $j$  dans le coût total.

Il existe donc une relation simple entre les élasticités partielles de substitution de Allen ( $s_{ij}$ ) et les élasticités de substitution de demande de facteurs ( $e_{ij}$ ) :

$$e_{ij} = M_j S_{ij}$$

A l'optimum  $S_{ij}$  s'écrit très simplement en fonction des parts de facteur :

$$X_i^* = \frac{\partial C}{\partial p_i} \quad (\text{Lemme de Shephard})$$

$$S_{ij} = \frac{\frac{\partial X_i^*}{\partial p_j} p_j / X_i^*}{M_j} = \frac{C_{ij} p_j}{X_i^* M_j}$$

$$\text{or } M_j = \frac{p_j X_j^*}{C}$$

$$\text{donc } S_{ij} = \frac{C C_{ij}}{X_i^* X_j^*} = \frac{C C_{ij}}{C_i C_j} \quad \text{où } C_i = \frac{\partial C}{\partial p_i}$$

Mais  $C_i = C / p_i M_i$  et  $C_{ij} = d_{ij}$  (d'après la forme fonctionnelle).

$$\text{donc } S_{ij} = \frac{M_i M_j + d_{ij}}{M_i M_j} = 1 + \frac{d_{ij}}{M_i M_j} \quad (i \neq j)$$

$$S_{ii} = \frac{M_i^2 - M_i + d_{ii}}{M_i^2} = 1 - \frac{1}{M_i} + \frac{d_{ii}}{M_i^2}$$

$$\text{De plus } e_{ij} = M_j + d_{ij} / M_i \quad (i \neq j)$$

$$e_{ii} = M_i - 1 + d_{ii} / M_i$$



### II.2.5.1. Interprétation en termes de substituabilité de facteurs

L'utilisation de  $s_{ij}$  pour caractérier la substituabilité des facteurs  $i$  et  $j$  suppose que  $s_{ii} < 0$  et  $s_{jj} < 0$ . Ceci est en particulier vérifié quand la fonction de coût est concave. En effet alors la matrice  $(C_{ij})$  est définie négative et donc  $(S_{ij})$  l'est aussi.

Si  $S_{ii}$  et  $s_{ij}$  sont négatifs, alors

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_i} \text{ et } \frac{\partial X_j}{\partial p_j} \text{ sont négatifs.}$$

Dès lors :

\* Si  $S_{ij} > 0$  alors comme  $S_{ij} = e_{ij}/M_j = e_{ji}/M_i$

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_j} > 0 \text{ et } \frac{\partial X_j}{\partial p_i} > 0$$

Ainsi, une augmentation du prix du facteur  $j$  (respectivement  $i$ ) augmente la demande dérivée en input  $i$  (respectivement  $j$ ) et diminue celle en input  $j$  (respectivement  $i$ ).

Les facteurs  $i$  et  $j$  sont donc substituables.

De plus,  $S_{ij} = 1 + d_{ij}/M_i M_j$

$$\text{donc } S_{ij} > 1 \iff d_{ij} > 0 \iff \frac{\partial M_i}{\partial p_i p_j} > 0 \iff \frac{\partial M_j}{\partial p_i} > 0$$

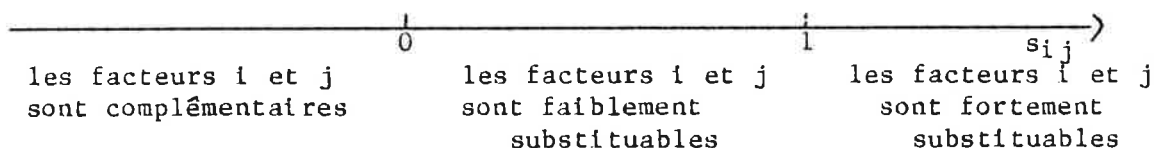
Alors les facteurs  $i$  et  $j$  sont fortement substituables, car non seulement le niveau d'emploi du facteur  $i$  augmente quand celui du facteur  $j$  diminue mais sa part  $M_i$  augmente aussi.

Si  $0 < S_{ij} < 1$  les facteurs  $i$  et  $j$  seront dits faiblement substituables.

\* Si  $S_{ij} < 0$ , une augmentation de  $p_j$  (respectivement  $p_i$ ) diminue conjointement  $X_i$  et  $X_j$ .

Les facteurs  $i$  et  $j$  sont complémentaires.

Nous pouvons donc résumer ainsi l'interprétation des élasticités de substitution de Allen (sous l'hypothèse  $s_{ii} < 0$  et  $s_{jj} < 0$ ).



### II.2.5.2. Interprétation en termes de séparabilité

On raisonne ici sur une fonction de production  $F$  :

- deux fois différentiable,
- strictement quasi-concave,
- homothétique donc  $C(y, p) = H(y) \cdot G(p)$
- croissante en chaque input.

Les résultats suivants ont été présentés par Berndt et Christensen (1973).

Soient  $[1, \dots, n]$  les indices des facteurs  
et  $R = [N_1, \dots, N_r]$  une partition de  $[1, n]$ .

Définition :

$F$  est faiblement séparable par rapport à une partition  $R$  de  $[1, n]$

si :

$$\forall s ; \forall i, j \in N_s, \forall k \notin N_s$$

$$\frac{\partial TMS}{\partial X_k} (x_i, x_j) = 0$$

$$\text{où } TMS (x_i, x_j) = F'_i / F'_j = \frac{\partial F}{\partial X_i} / \frac{\partial F}{\partial X_j}$$

Une fonction de production est donc faiblement séparable par rapport à une partition de l'ensemble de ses inputs, si le taux marginal de substitution entre deux inputs appartenant à la même sous-partie ne dépend pas du niveau d'emploi d'un input n'appartenant pas à cette sous-partie.

Une interprétation plus facile est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 :  $F$  faiblement séparable par rapport à  $R \Leftrightarrow$

$\forall s \in [1, r], \exists X^s$  fonctions d'inputs indicés par  $N_s$ ,  
telle que :

$$F(X_1, \dots, X_n) = \tilde{F}(X^1, \dots, X^r).$$

Les fonctions  $X^s$  constituent des agrégats des inputs indicés par  $N_s$ .

Par exemple, si la fonction de production est séparable pour les consommations intermédiaires par rapport aux trois autres facteurs (terre, travail, capital). On peut définir une fonction valeur ajoutée ne dépendant que de ces trois derniers facteurs.

Un deuxième théorème établit une équivalence entre la faible séparabilité de  $F$  et celle de la fonction  $G$  telle que  $C(y, p) = H(y) \cdot G(p)$ .

Nous pouvons finalement écrire :

Théorème 3 :  $F$  faiblement séparable par rapport à  $R$

$$\Leftrightarrow \forall s \in [1, r], \forall i, j \in N_s, \forall k \notin N_s, G_j \cdot G_{ik} = G_{jk} \cdot G_i$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in [1, r], \forall i, j \in N_s, \forall k \notin N_s, S_{ik} = S_{jk}.$$

Les élasticités de Allen permettent donc de tester la séparabilité entre les facteurs.

Ainsi, dans le cas de quatre facteurs, la séparabilité entre les consommations intermédiaires (facteur 1) et les trois autres facteurs s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{13} \\ S_{12} &= S_{14} \end{aligned}$$

Celle entre les consommations intermédiaires et le travail (facteur 3), et le capital (facteur 2) et la terre (facteur 4) s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{12} &= S_{14} \\ S_{23} &= S_{34} \\ S_{12} &= S_{23} \end{aligned}$$

Pour tester ces relations, il faut donc tester des relations du type :

$$S_{ik} = 1 + d_{ik}/M_i M_k = S_{jk} = 1 + d_{jk}/M_j M_k$$

soit  $d_{ik}/M_i = d_{jk}/M_j$

avec  $M_i = C_i + \sum_{k=1}^4 d_{ik} \ln p_k$

( $b_i = 0$  car la fonction de production est supposée homothétique).

On montre qu'il y a séparabilité entre les consommations intermédiaires et les autres facteurs si les contraintes :

$$\left[ \begin{array}{l} C_3 = d_{13}/d_{12} C_2 \\ d_{22} = d_{12}^2 / d_{11} \\ d_{23} = d_{13} \cdot d_{12}/d_{11} \text{ sont vérifiées.} \\ C_1 = 1 + d_{11} C_2 / d_{12} \\ d_{33} = d_{13}^2 / d_{11} \end{array} \right.$$

Si ces cinq contraintes sont vérifiées, il y a séparabilité entre le facteur 1 et les trois autres facteurs quelles que soient les valeurs prises par les valeurs explicatives qui sont les prix des inputs  $p_1, p_2, p_3, p_4$ .

La séparabilité au seul point moyen s'écrit plus simplement. En effet, en ce point  $M_i = C_i$  car  $\ln p_i = 0$  ( $\ln p_i = \overline{\ln p_i}$  et par convention, on a écrit  $\ln p_i$  à la place de  $\ln p_i - \overline{\ln p_i}$ ).

La séparabilité entre le facteur 1 et les trois autres s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C_3 &= d_{13} / d_{12} C_2 \\ C_1 &= 1 + d_{11} C_2 / d_{12} \end{aligned}$$

### II.3. Estimation des parts de facteurs

#### II.3.1. Estimation du modèle sous différentes contraintes

La fonction de coût n'a pas été estimée directement. En effet, les variables explicatives sont trop corrélées et trop peu de paramètres sont significativement différents de zéro.

Nous avons choisi d'estimer les paramètres à l'aide des équations de parts de facteurs.

Nous avons utilisé la méthode du maximum de vraisemblance à information complète sur les trois premières parts de facteurs (Le quatrième se déduit des trois autres par la contrainte d'additivité

$\sum_{i=1}^4 M_i = 1$ ). Les estimateurs obtenus sont donc convergents et asymptotiquement efficaces.

Neuf estimations différentes ont été réalisées. Elles ont permis de tester la symétrie, l'homothéticité de la fonction de production et certaines séparabilités.

Les trois premières estimations concernent la remise en cause de la spécification du modèle (hypothèse de symétrie).

Estimation 1 :

$$E_1 : M_i = C_i + b_i \ln y + \sum_{j=1}^4 D_{ij} \ln p_j + \varepsilon_i$$

$i = 1, 2, 3$  sans contraintes d'égalité entre  $D_{ij}$  et  $D_{ji}$ .

Estimation 2 :

$$E_2 : M_i = C_i + b_i \ln y + \sum_{j=1}^4 D_{ij} \ln p_j + \varepsilon_i$$

$i = 1, 2, 3$  avec  $D_{ij} = D_{ji}$

Estimation 3 :

$$E_3 : M_i = C_i + b_i \ln y + \sum_{j=1}^3 D_{ij} \ln p_j / p_4 + \varepsilon_i$$

$i = 1, 2, 3$  sans contraintes d'égalité entre  $D_{ij}$  et  $D_{ji}$

tester  $E_2$  contre  $E_1$  revient à tester la symétrie.

On verra dans le tableau récapitulatif ci-dessus qu'on l'accepte de peu.

On teste donc l'homogénéité linéaire de la fonction de coût sans hypothèse de symétrie en testant  $E_3$  contre  $E_1$ . On verra qu'on rejette l'homogénéité linéaire dans ce cas.

Les estimations suivantes supposent à la fois les égalités  $d_{ij} = d_{ji}$  vérifiées et la contrainte d'additivité. La fonction de coût est donc homogène linéaire par les propriétés mêmes du modèle.

Estimation 4.

C'est le modèle de base, on ne suppose aucune propriété de la fonction de production :

$$E_4 : M_i = C_i + b_i \ln y + \sum_{j=1}^3 d_{ij} \ln p_j / p_4 + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, 3 \quad d_{ij} = d_{ji}$$

Estimation 5.

On suppose en plus l'homothéticité de la fonction de production :

$$\forall i, b_i = 0$$

$$E_5 : M_i = C_i + \sum_{j=1}^3 d_{ij} \ln p_j / p_4 + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, 3 \quad d_{ij} = d_{ji}$$

Pour tester l'homothéticité de F, on testera E5 contre E4.

Estimation 6.

En plus de l'homothéticité, on suppose que les consommations intermédiaires (facteur 1) sont séparables des trois autres facteurs.

On ajoute à E5 les cinq contraintes indiquées en II.1.5.2. correspondant aux contraintes :

$$s_{12} = s_{13}$$

$$s_{12} = s_{14} \quad \text{quelques soient les prix } p_1, p_2, p_3, p_4$$

Il faudra tester E6 contre E5 pour tester la séparabilité 1-2 3 4.

Estimation 7.

On suppose la séparabilité entre le travail et les consommations intermédiaires, le capital, la terre.

On ajoute à E5 les contraintes correspondant

$$\begin{cases} s_{23} = s_{13} \\ s_{23} = s_{34} \end{cases}$$

Il faudra tester E7 contre E5 pour tester la séparabilité 3 - 1 2 4

Les deux dernières estimations permettent de tester l'homogénéité linéaire de la fonction de production en supposant son homothéticité.

Pour cela, il a fallu estimer conjointement les trois premières parts de facteur avec la fonction de coût.

Estimation 8.

$$E_8 : M_i = C_i + \sum_{j=1}^3 d_{ij} \ln p_j / p_4$$

$$d_{ij} = d_{ji}$$

$$\begin{aligned} \ln C &= a_0 + a_1 \ln y + a_2 (\ln y)^2 \\ &+ \ln p_4 + \sum_{i=1}^3 C_i \ln p_i / p_4 + 1/2 \sum_{i=1}^3 d_{ii} (\ln p_i / p_4) \\ &+ \sum_{i < j=1}^3 d_{ij} \ln p_i / p_4 \ln p_j / p_4. \end{aligned}$$

On ne suppose ici que l'homothéticité de la fonction de production.

Estimation 9.

On suppose l'homogénéité linéaire de F :  $a_2 = 0$   
 $a_1 = 1$

$$E_9 : M_i = C_i + \sum_{j=1}^3 d_{ij} \ln p_j / p_4$$

$$d_{ij} = d_{ji}$$

$$\begin{aligned} \ln C &= a_0 + \ln y + \ln p_4 + \sum_{i=1}^3 C_i \ln p_i / p_4 \\ &+ 1/2 \sum_{i=1}^3 d_{ii} (\ln p_i / p_4)^2 + \sum_{i < j=1}^3 d_{ij} \ln p_i / p_4 \ln p_j / p_4 \end{aligned}$$

Pour tester l'homogénéité linéaire de F, on testera  $E_9$  contre  $E_8$ .

Pour l'ensemble des tests, nous avons utilisé le test du rapport de vraisemblance de statistique :

$$S = -2 \log L(H_0) / L(H_1)$$

Les résultats sont indiqués dans les tableaux (II.1).

Ces estimations ont été effectuées pour deux hypothèses différentes concernant la rémunération de la main-d'oeuvre familiale : en effet, une fois déduit du produit brut de l'exploitation la somme des charges correspondant aux autres facteurs, le solde restant pour rémunérer la main-d'oeuvre familiale est souvent négatif. Nous avons pris deux conventions différentes pour faire apparaître tout de même une rémunération positive.

Convention 1: Nous avons considéré que toutes les exploitations rémunèrent leur main-d'oeuvre familiale au même prix égal à la moyenne du prix de la main-d'oeuvre salariée sur l'échantillon.

Convention 2: Nous avons décalé la rémunération familiale d'une même somme pour toutes les exploitations de façon à ce que l'exploitation "la plus pauvre" rémunère sa main-d'oeuvre familiale au prix de 20 000 F/U.T.A..

Cette deuxième convention repose sur la constatation que le produit brut Y peut être différent du coût C. Il ne faut pas en effet imposer la contrainte  $C = Y$  car une exploitation peut être en déficit.

La rémunération de la main-d'oeuvre familiale apparaissant comme un solde, il ne faut pas rejeter l'idée que son coût d'opportunité soit négatif. On doit cependant compter un service positif de la main-d'oeuvre familiale ce qui justifie le décalage de la convention 2. On peut noter ici qu'un auteur comme Higgins (1986) a éliminé de son échantillon les exploitations ayant un profit négatif ou nul.

tableaux II.1

Estimations	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9
Convention 1 Log L	1039,62	1028,17	1013,71	988,35	919,76	730,15	600,35	976,47	938,64
Convention 2 Log L	1042,06	1034,28	1005,96	1002,35	934,90	746,46	779,22	1011,54	952,73

Convention 1 : 208 observations

Convention 2 : 200 observations

Tests	Statistique de Test S		nombre de contraintes R	$X^2(k)$ = 1 %
	Convention 1	Convention 2		
symétrie	22,9	15,6	6	22,46
homogénéité linéaire de C sans symétrie	51,8	72,2	3	16,27
homothéticité de F	137,2	134,9	3	16,27
séparabilité 1-234	379,2	376,9	5	20,52
séparabilité 3-124	638,8	311,36	5	20,52
homogénéité linéaire de F	75,7	117,6	2	13,82

La statistique de test S suit asymptotiquement un  $X^2(k)$  sous  $H_0$ . La région critique du test s'écrit :

$$w = \{ S > X^2_{1-\alpha}(k) \}$$

Pour un risque de première espèce de un pour mille, seul le test de symétrie n'est pas rejeté.

Empiriquement, dans le cas de test asymptotique, avec un grand nombre d'observations, on est très souvent amené à rejeter l'hypothèse nulle.

Leamer ( ) a suggéré que pour ces tests, il convenait de choisir un risque de première espèce décroissant avec le nombre d'observations.

En effet, il existe une grande dissymétrie entre le risque de seconde espèce qui tend vers zéro pour les tests asymptotiques (avec un grand nombre d'observations) et le risque de première espèce que l'on fixe.

Ainsi nous avons choisi de ne pas rejeter la symétrie pour pouvoir continuer l'étude avec les spécifications choisies. La statistique de test pour les deux conventions est en effet très proche du seuil de un pour mille.

Par contre, l'homothéticité de la fonction de production est très fortement rejetée.

Nous nous limiterons donc au modèle de base  $E_4$ . Ainsi, les tests de séparabilité et d'homogénéité linéaire de la fonction de production n'ont plus lieu d'être considérés puisqu'ils supposent l'homothéticité de  $F$ .

Nous donnons ci-dessous les valeurs estimées des paramètres pour l'estimation 4 :

paramètres	Estimation		T de Student	
	convention 1	convention 2	convention 1	convention 2
C1	0,441	0,294	87,7	61,3
C2	0,153	0,104	37,6	33,9
C3	0,226	0,482	54,1	84,8
C4	0,179	0,120	68,1	50,4
b1	0,074	0,087	8,4	9,3
b2	0,030	0,038	4,4	6,7
b3	-0,101	-0,140	-13,7	-13,1
b4	-0,003	0,015	-0,7	3,5
d11	0,113	0,132	5,4	10,1
d12	-0,031	-0,005	-3,6	-0,8
d13	-0,024	-0,099	-1,3	-10,1
d14	-0,058	-0,028	-8,2	-5,2
d22	0,088	0,063	11,6	11,7
d23	-0,040	-0,054	-5,4	-10,2
d24	-0,016	-0,04	-3,9	-1,1
d33	0,118	0,211	5,6	18,8
d34	-0,053	-0,059	-7,6	-13,4
d44	0,127	0,091	26,5	23,2
Log L	988,35	1002,35		
Nombre d'observation	208	200		
SCR(M1)	1,09	0,92		
SCR(M2)	0,71	0,38		
SCR(M3)	0,75	1,29		



## II.3.2. Calcul des élasticités et substituabilité factorielle

Nous présentons ci-dessous les calculs des élasticités de substitution  $s_{ij}$  et des élasticités de demande de facteur  $e_{ij}$  au point moyen.

## Caractéristiques de l'exploitation moyenne

Superficie	:	70 ha	
Produit Brut	:	388 000	(Fr 81)
UTA total	:	1,3	
Part du blé dans le produit brut	:	46 %	
Part du maïs dans le produit brut	:	22 %	
Revenu net d'exploitation/ha	:	1391	(Fr 81)
Revenu net	:	96300	(Fr 81)

Par construction, à ce point,  $\ln p_i = 0$ ,  $\ln y = 0$

donc :

$$s_{ij} = 1 + d_{ij} / C_i C_j \quad i \neq j$$

$$e_{ij} = C_j + d_{ij} / C_i \quad i \neq j$$

$$s_{ii} = 1 + (d_{ii} / C_i^2) - 1 / C_i$$

$$e_{ii} = C_i - 1 + (d_{ii} / C_i)$$

Ces élasticités ne dépendent que des paramètres estimés. Nous avons utilisé l'estimation 4.

Elasticités de Allen  $S_{ij}$ 

	consommations intermédiaires		capital		travail		terre	
consommations intermédiaires	-0,684 (-6,37)	-0,871 (-5,78)	0,539 (4,16)	0,821 (3,84)	0,756 (4,00)	0,305 (4,47)	0,269 (3,03)	0,197 (1,29)
capital			-1,784 (-5,5)	-2,774 (-5,55)	-0,168 (-0,78)	-0,077 (-0,72)	0,406 (2,67)	0,706 (2,72)
travail					-1,117 (-2,70)	-0,164 (-3,39)	-0,309 (-1,81)	-0,022 (-0,29)
terre							-0,617 (-4,14)	-1,012 (-3,70)
	conven- tion 1	conven- tion 2	C 1	C 2	C 1	C 2	C 1	C 2

Les t de Student sont indiqués entre parenthèses.

## Elasticités de demande de facteur

input	prix des consommations intermédiaires		prix du capital		prix du travail		prix de la terre	
consommations intermédiaires	-0,302 (-6,37)	-0,256 (-5,78)	0,082 (4,16)	0,086 (3,84)	0,171 (4,00)	0,147 (4,47)	0,048 (3,03)	0,024 (1,29)
capital	0,238 (4,16)	0,242 (3,84)	-0,273 (-5,50)	-0,289 (-5,55)	-0,038 (-0,78)	-0,037 (-0,73)	0,073 (2,67)	0,084 (2,73)
travail	0,334 (4,00)	0,090 (4,47)	-0,026 (-0,78)	-0,008 (-0,73)	-0,253 (-2,70)	-0,079 (-3,39)	-0,055 (-1,81)	-0,003 (-0,29)
terre	0,119 (3,03)	0,058 (1,29)	0,062 (2,67)	0,074 (2,73)	-0,070 (-1,81)	-0,011 (-0,29)	-0,111 (-4,14)	-0,121 (-3,70)
	conven- tion 1	conven- tion 2	C 1	C 2	C 1	C 2	C 1	C 2

Les deux couples de facteurs pour lesquels on trouve des élasticités non significativement différentes de zéro sont les couples (travail, capital) et (travail, terre).

Les élasticités propres sont bien négatives au point moyen. On peut donc interpréter le signe des élasticités en termes de substituabilité.

Les facteurs sont substituables deux à deux sauf pour les deux couples (travail, capital) et (travail, terre).

Ces deux complémentarités ne sont cependant pas significatives. La deuxième paraît naturelle : plus la surface à cultiver est grande, plus la charge de travail s'accroît. Par contre la première est difficile à expliquer puisqu'un investissement en matériel à production constante, devrait permettre une diminution du temps de travail.

La substituabilité pour les couples (consommations intermédiaires, capital) et (consommations intermédiaires, travail) peuvent s'expliquer comme suit :

Un passage avec traitement phytosanitaire adapté permet de supprimer de nombreux passages avec outils pour sarcler.

Ainsi, en augmentant l'utilisation de consommations intermédiaires, on peut économiser des heures de tracteur, du matériel et des heures de travail.

La substituabilité (CI, terre) ou (capital, terre) s'explique par le choix d'un mode de production plus ou moins intensif. Ainsi, à production constante, on peut choisir de cultiver une grande superficie avec peu de traitements et de passages d'engins ou au contraire une superficie moins étendue, plus intensivement, avec des rendements supérieurs.

Il est très difficile de comparer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres à partir d'une fonction de coût translog.

Weaver (83) a estimé une fonction de coût multi produits à l'aide de séries temporelles pour deux Etats céréaliers des USA. Le Nord-Dakota et le Sud-Dakota.

Il a trouvé que les facteurs, travail, engrais, service du capital, matériel et produits pétroliers étaient tous complémentaires deux à deux. La technologie céréalière dans le Dakota n'est cependant pas comparable à celle rencontrée en France.

Antle et Aitah (83) ont quant à eux utilisé des données micro économiques pour la riziculture en Egypte. Leurs résultats ne sont absolument pas transposables dans le cadre de notre étude.

Enfin Ray (1982) et Binswanger (1974) ont travaillé sur des données macroéconomiques pour l'ensemble des USA. Leurs résultats ne sont pas tout à fait concordants car Binswanger met à jour des complémentarités travail-engrais et matériel-engrais, alors que pour RAY, capital, engrais et travail sont substituables deux à deux.

En définitive, il semble très difficile de tirer des conclusions de la confrontation de ces études à nos résultats. Les données ne sont pas de même nature, les agrégats de facteurs choisis différents et surtout les technologies étudiées peu semblables.

**Chapitre III. UN MODELE D'EQUILIBRE PARTIEL :  
PRISE EN COMPTE DE FACTEURS FIXES**

La faible mobilité de la main-d'oeuvre familiale, renforcée par un fort chômage dans les autres secteurs de l'économie et la lenteur des mouvements de restructuration foncière conduisent à considérer le travail familial et la terre comme des facteurs fixes. Le comportement de minimisation du coût porte alors sur les facteurs variables, et est conditionné par les quantités disponibles de terre et de main-d'oeuvre familiale.

Dans une première partie, nous aborderons quelques implications microéconomiques relatives à ces nouvelles hypothèses, puis spécifierons le modèle économétrique utilisé pour fournir en dernier lieu des estimations en terme, principalement, d'élasticités de court et long terme et de rendements d'échelle.

III.1. Aspects microéconomiques d'une technologie à facteurs fixes

La résolution du programme (6) (cf. I.4) aboutit à la définition d'une fonction de coût variable,  $CV(p_i, y, z_j)$  associée à la donnée des prix  $p_j$  ; celle-ci contient toute l'information nécessaire à la détermination des niveaux optimaux des facteurs  $z_j, z_j^*$ .

En effet :

$$(1) \quad C(y, p_i, p_j) = CV(p_i, y, z_j^*) + \sum p_j z_j^*$$

par dérivation, il vient :

$$(2) \quad \frac{\partial C}{\partial z_j} = 0 = \frac{\partial CV}{\partial z_j}(z_j^*) + p_j \quad j = 1, \dots, h$$

d'où :

$$(3) \quad \frac{\partial CV}{\partial z_j}(z_j^*) = -p_j \quad (j = 1, \dots, h)$$

système de  $h$  équations à  $h$  inconnues,  $z_1^*, \dots, z_h^*$ .

En supposant  $CV(y, p_i, z_j)$  différentiable par rapport aux  $z_j$  posons, en tout point  $z = (z_1, \dots, z_h)$ .

$$(4) \quad \frac{\partial CV}{\partial z_j} = -p_j^* \quad j = 1, \dots, h$$

Le vecteur  $(p^*_1, \dots, p^*_h)$  s'interprète comme le vecteur des prix duaux des différents facteurs fixes : en effet si  $p^* = (p^*_1, \dots, p^*_h)$  était le vecteur prix observé, alors  $z = (z_1, \dots, z_h)$ , solution de (3) pour  $p_j = p^*_j$ ,  $j = 1, \dots, h$  serait le niveau optimal de long terme.

L'application du lemme de Shephard à la fonction de coût variable fournit les demandes de facteurs conditionnelles aux niveaux des facteurs fixes ; notons les élasticité propres correspondantes :

$$\varepsilon_i^h = p_i / x_i^h \left( \frac{\partial x_i^h}{\partial p_i} \right)_h$$

$x_i^h$  étant la demande du facteur variable  $i$  solution de (6) (cf. chap. I. 4), dans le cas de  $h$  facteurs fixes. De manière analogue,

soit  $\varepsilon_i = \frac{p_i}{x_i} \left( \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \right)$ , l'élasticité propre du facteur  $i$ , supposant

tous les facteurs variables. Dans le cas de  $n$  facteurs, ces élasticité vérifient la relation suivante :

$$(5) \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_i^1 \leq \dots \leq \varepsilon_i^h \leq \dots \leq \varepsilon_i^{n-1} \leq 0$$

Samuelson (1947) considère ces inégalités comme une application du principe de Le Châtelier à des systèmes économiques en équilibre. Lau (1976) en fournit une nouvelle démonstration en utilisant les égalités entre matrices hessiennes (équations (12) à (15) chap. I.4). La présence de facteurs fixes constitue donc une source de rigidité pour les élasticité de court terme.

Les rendements d'échelle.

Les rendements d'échelle sont habituellement mesurés par un coefficient qui correspond au degré d'homogénéité de la fonction de production  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ .  $\varepsilon$  est défini comme l'élasticité de la production à un accroissement  $\lambda$  proportionnel de tous les facteurs :

$$\varepsilon_1(x) = \left( \frac{\partial \log f(\lambda x)}{\partial \log \lambda} \right)_{\lambda=1} = \sum_i \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{f} \frac{f}{x_i}$$

Ce coefficient d'échelle correspond à l'élasticité de la production par rapport aux coûts, le long du rayon  $\lambda x$ . En effet, le coût (pas nécessairement minimal) de production de  $f(\lambda x)$  à  $x$  et  $p$  fixes est

$\bar{c} = \lambda \sum p_i x_i$  avec  $\partial \log \bar{c} / \partial \log \lambda = 1$  et donc :

$$\varepsilon(x) = \left( \frac{\partial \log f(\lambda x)}{\partial \log \bar{c}} \right)_{\lambda=1}$$

Cette mesure est en réalité peu utile car l'accroissement proportionnel des inputs (c'est-à-dire le long d'un rayon partant de l'origine) n'est intéressant que dans le cas où cet accroissement correspond à une suite de situations économiquement efficaces.

On peut déduire directement de la fonction de coût une mesure des rendements d'échelle le long du sentier d'expansion. La minimisation du coût sous contrainte de production donne une équation du sentier d'expansion de la forme :  $\alpha \cdot \partial f / \partial x_i = p_i$ , et le lemme de Shephard donne  $\partial c / \partial p_i = x_i$ ,  $\partial c / \partial y = \alpha$  d'où :

$$\varepsilon_p(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} = \sum_i \frac{p_i x_i}{\alpha y} = \frac{\sum_i p_i x_i}{y} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial \ln y}{\partial \ln c} \right)_p$$

En un point donné les deux concepts 1 et 2 correspondent. Cependant, pour qu'un accroissement proportionnel des inputs soit économiquement efficace, il faut d'une part que ces inputs soient variables et d'autre part que le rayon corresponde au sentier d'expansion, ce qui implique que la fonction de production soit homothétique. Il n'y a donc équivalence entre les deux concepts que dans le cas où la fonction de production est homothétique. Sinon, comme le montre HANOCH (1975), les changements des coefficients d'échelle ne sont pas équivalents lorsqu'ils sont mesurés par rapport au rayon ou au sentier d'expansion.

On retient donc comme mesure de rendements d'échelle :

$$\varepsilon = 1 \left/ \left( \frac{\partial \ln C}{\partial \ln Y} \right) \right.$$

### III.2. Modèle économétrique

Nous spécifions une forme translog pour la fonction de coût variable  $CV = C(y, p_i, z_h)$  qui s'écrit dans le cas d'une monoproduction avec trois facteurs variables ( $i = 1, 2, 3$ ) et deux facteurs fixes ( $h = 1, 2$ ) :

$$\begin{aligned} M_0 \\ (1) \quad \ln CV = a_0 + a_1 (\ln y) + a_2 (\ln y)^2 + \sum_{i=1}^3 b_i \ln p_i \ln y \\ + \sum_{i=1}^3 c_i \ln p_i + 1/2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 d_{ij} \ln p_i \ln p_j + \sum_{h=1}^2 f_h \ln z_h \\ + 1/2 \sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 g_{hk} \ln z_h \ln z_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{h=1}^2 k_{ih} \ln p_i \ln z_h \\ + \sum_{h=1}^2 \beta_h \ln y \ln z_h \end{aligned}$$

Les équations des parts de facteurs sont déduites du lemme de Shephard :

$$\frac{\partial CV}{\partial p_i} = X_i^* \text{ , aussi :}$$

$P_0$  :

$$(2) \quad M_i = C_i + b_i (\ln y) + 1/2 \sum_j (d_{ij} + d_{ji}) \ln p_j + \sum_{h=1}^2 k_{ih} \ln z_h$$

Nous testons les premières hypothèses du modèle à l'aide seulement du modèle  $P_0$  des parts de facteurs et posons :

$$d_{ij}^* = 1/2 (d_{ij} + d_{ji}).$$

Par construction,  $\sum_i M_i = 1$ , la contrainte d'additivité ne peut pas être testée, elle implique :

$$(3) \quad \sum_i C_i = 1 \quad \sum_i b_i = 0 \\ \sum_i d_{ij}^* = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad \sum_i k_{ih} = 0 \quad h = 1, 2.$$

Pour tester l'homogénéité linéaire de la fonction de coût par rapport à  $p$ , on pose au modèle  $P_0$  :

$$(4) \quad \sum_j d_{ij}^* = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

De même pour la symétrie :

$$(5) \quad d_{ij}^* = d_{ji}^* \quad \forall i, j ; \text{ la symétrie et l'additivité}$$

impliquent l'homogénéité linéaire.

Enfin pour tester l'hypothèse d'homothéticité de la fonction de production, à savoir :

$$(6) \quad b_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$k_h = 0 \quad h = 1, 2.$$

Il faut estimer conjointement les parts de facteurs et la fonction de coût. L'identifiabilité du modèle  $M_0$  nécessite les contraintes de symétrie :

$$(7) \quad d_{ij} = d_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \\ g_{hk} = g_{kh} \quad h, k = 1, 2.$$

La méthode d'estimation des moindres carrés ordinaires est suffisante pour le modèle  $p_0$  sous contraintes ou associée à la contrainte intra-équation (4) ; la contrainte inter-équation de symétrie (5), l'estimation conjointe des parts de facteurs avec la fonction de coût rendent ensuite nécessaire l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance, convergente et asymptotiquement efficace. La relation entre le terme d'erreur de la fonction de coût et ceux des parts de facteurs mériterait enfin d'être précisée. Les différentes formules relatives aux élasticités, sont détaillées en annexe.

### III.3. Résultats et commentaires

L'utilisation du test asymptotique du rapport des vraisemblances conduit aux résultats suivants :

test, $H_0/H_a$ : modèle additif, seul, p	R.M.V.	nombre de contraintes (p)	2 X (p) 5 %	2 X (p) 1 %	2 X (p) 1%
test $H_0/H_a$					
H : homogénéité linéaire	10,93	2		9,21	13,82
test H / $H_a$ , H : symétrie	11,58	3		11,34	16,27
test H / H : symétrie/homogénéité linéaire seule	0,65	1		6,63	
test d'homothéticité	7,136	4	9,49		

L'homogénéité linéaire de la fonction de coût et la symétrie des coefficients  $d_{ij}$  ne sont pas rejetées au seuil  $\alpha = 1\%$ , ce qui constitue un critère de bonne spécification de la fonction de coût, la symétrie des coefficients  $d_{ij}$  étant nécessaire pour déterminer la fonction de coût à partir des équations des parts de facteurs.

L'hypothèse d'homothéticité de la fonction de production est, quant à elle, acceptée au seuil  $\alpha = 5\%$

La non-significativité des paramètres (tableau III.1) apparaît principalement pour ceux associés à des termes croisés insérant des facteurs fixes. Les élasticités partielles de substitution de Allen sont significatives pour les couples (K, CI), (K, NS) et (K, K) ; le capital apparaît substituable avec les consommations intermédiaires et le travail salarié ; ces relations se vérifient également dans le long terme (tableau III.2) où les élasticités calculées se réfèrent à des



niveaux de facteurs fixes supposés optimaux. Le principe de Le Châtelier est vérifié pour le capital et le travail salarié ; le résultat quelque peu contradictoire concernant l'élasticité propre de long terme des consommations intermédiaires est à relier au peu de fiabilité de l'indice des prix associé qui n'inclut pas l'ensemble des prix. Les tableaux III.3 et III.4 présentent les résultats d'une nouvelle spécification qui insère deux consommations intermédiaires pour lesquels les prix sont connus : les engrais et les carburants.

Dans le court terme, les relations de substituabilité apparaissent significativement pour les couples : carburants-engrais, capital-travail salarié, capital-engrais ; celle entre les carburants et le capital se justifie dans la mesure où l'acquisition d'outils de traction plus puissants ou de matériels à largeur de travail plus grande permet de diminuer le nombre de passages, donc une économie de carburants. Dans le long terme, le principe de Le Châtelier est vérifié pour les quatre facteurs variables. Le travail familial apparaît substituable au carburant, avec le capital, le travail salarié et la terre ; le prix dual est inférieur au prix observé, ceci au point moyen, ce qui confirme l'écart au niveau d'équilibre de ce facteur. Nous notons enfin des relations de substituabilité entre la terre et, respectivement, les carburants, le capital.

Dans le cas d'une fonction de coût de long terme, l'hypothèse d'homothétie ayant été rejetée, les rendements d'échelle au point moyen, sur un échantillon de 208 observations sont de 1,72. On observe une décroissance du coefficient d'échelle avec la taille des entreprises.

Dans le cas d'une fonction de coût de court terme, où les facteurs terre et travail familial sont fixés, l'hypothèse d'homothétie de la fonction de production ayant été acceptée, on trouve des rendements d'échelle de 2,16. Là encore on observe que les rendements d'échelle sont plus importants dans les très petites entreprises.

Les coefficients d'échelle ainsi obtenus paraissent élevés, toutefois dans l'intervalle qui entoure la moyenne, on trouve une valeur de l'ordre de 1,5. Toutefois, il convient de prendre ces résultats avec prudence. Le coefficient d'échelle est directement dépendant de l'estimation du paramètre en  $\ln y$ . Or, ce paramètre ne peut être estimé par les équations de part de facteurs, mais doit être obtenu à l'aide d'une estimation conjointe de la fonction de coût et des parts de facteurs. Dès lors, des problèmes de multicollinéarité sont possibles, en particulier dans le cas d'une fonction de court terme où parmi les variables explicatives de la fonction de coût se trouvent le niveau de production, la terre et la main-d'oeuvre familiale, variables fortement corrélées.

Tableau III.1. Paramètres estimés de la fonction de coût variable translog homothétique avec 3 facteurs variables ( $i = 1$ (CI), 2 (capital), 3 (travail salarié) et 2 facteurs fixes ( $h = 1$  (travail familial), 2 (terre))

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
a	12,4425	d	0,008336782
0	(0,03602771)	23	(0,01509023)
a	0,4616211	d	0,09485233
1	(0,1273692)	33	(0,03148185)
a	0,09970215	f	-0,1059697
2	(0,1227675)	1	(0,08806357)
c	0,6585347	f	0,6510401
1	(0,01272562)	2	(0,1506128)
c	0,2341351	g	-0,07469612
2	(0,01015944)	11	(0,1434715)
c	0,1073303	g	0,05447697
3	(0,01109789)	12	(0,2137024)
d	0,2106951	g	-0,4236042
11	(0,04098567)	22	(0,3274507)
d	-0,1075059	k	0,06022636
12	(0,01903956)	11	(0,03145144)
d	-0,1031391	k	-0,01710114
13	(0,03278228)	12	(0,02868926)
d	0,09916918	k	0,01381399
22	(0,01527502)	21	(0,02522843)
k	-0,007404034	k	0,01866800
31	(0,02739624)	22	(0,02193885)
k	-0,001566865	LnL = 141,395 ; écarts-types	
32	(0,02512213)	entre parenthèses	

Tableau III.2. Elasticités partielles de substitution de Allen, élasticités-prix de court terme et long terme, les consommations intermédiaires étant réunies en un seul agrégat ; calcul effectué au point moyen

a) Elasticités partielles de substitution de Allen

	CI	K	N <sub>s</sub>
CI	- 0,032679 (0,35)	0,3027521 (2,45)	-0,45994 (0,99)
K	0,302752 (2,45)	- 1,4615 (5,25)	1,33055 (2,22)
N <sub>s</sub>	- 0,45994 (0,99)	1,33055 (2,22)	- 0,080533 (0,03)

b) Elasticités prix de court terme

	pCI	pK	pN <sub>s</sub>
CI	- 0,02152 (0,35)	0,0708849 (2,45)	-0,49365 (0,99)
K	0,199373 (2,45)	- 1,34218 (5,25)	1,142809 (2,22)
N <sub>s</sub>	- 0,30288 (0,99)	1,311529 (2,22)	- 0,0086457 (0,03)

c) Elasticités prix de long terme

	pCI	pK	pN <sub>s</sub>
CI	- 0,292478	0,097704	-0,14986
K	0,274804	- 0,35936	0,04788
N <sub>s</sub>	- 0,91948	0,104455	- 0,27407

Tableau III.3. Paramètres estimés de la fonction de coût variable translog homothétique avec 4 facteurs variables (i = 1 (carburants), 2 (capital), 3 (travail salarié), 4 (engrais) et 2 facteurs fixes (h = 1 (travail familial) 2 (terre)).

Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
a <sub>0</sub>	12,14558 (0,03482717)	d	0,1005711 (0,03344187)
a <sub>1</sub>	0,3793299 (0,1212113)	d	0,1448856 (0,03859726)
a <sub>2</sub>	0,05513792 (0,1170193)	f	-0,1365940 (0,08595319)
c <sub>1</sub>	0,1085640 (0,00405657)	f	0,7303893 (0,1442970)
c <sub>2</sub>	0,3059746 (0,01149534)	g	-0,07981067 (0,1364819)
c <sub>3</sub>	0,1385876 (0,01328975)	g	0,0112662 (0,2040716)
c <sub>4</sub>	0,4468738 (0,01263474)	g	-0,2280688 (0,3111958)
d <sub>11</sub>	0,02749783 (0,01497407)	k	0,003814087 (0,1000489)
d <sub>12</sub>	- 0,02598651 (0,006551195)	k	-0,001650160 (0,009229265)
d <sub>13</sub>	- 0,022050608 (0,01128360)	k	0,03473783 (0,02861285)
d <sub>1</sub>	0,01964475 (0,015030077)	k	0,03414380 (0,02478142)
d <sub>22</sub>	0,1069268 (0,01577427)	k	-0,09469805 (0,03283879)
d <sub>23</sub>	0,002087570 (0,01770917)	k	0,009312162 (0,0296138)
d <sub>24</sub>	- 0,08392780 (0,01773513)	k	0,0561461 (0,03110609)
d <sub>34</sub>	-0,08060259 (0,0312431)	k	-0,04180580 (0,02843314)

$L_n L = 253,429$  ;

écarts-types entre parenthèses.

Tableau III.4. Elasticités partielles de substitution de Allen, élasticités-prix de court terme et long terme, avec carburants et engrais comme consommations intermédiaires

a) Elasticités partielles de substitution de Allen

	carburants	K	N <sub>s</sub>	engrais
carburants	- 5,878 (4,63)	0,245 (1,24)	-0,466 (0,62)	1,404 (4,53)
K		- 1,126 (6,68)	1,04 (3,91)	0,386 (2,98)
N <sub>s</sub>			-0,979 (0,56)	-0,301 (0,60)
engrais				-0,512 (2,65)

b) Elasticités prix de court terme

	P carburants	pK	pN <sub>s</sub>	P engrais
carburants	- 0,638 (4,63)	0,0748 (1,24)	- 0,0645 (0,62)	0,628 (4,53)
K		0,026 (6,68)	- 0,344 (3,91)	0,173 (2,98)
N <sub>s</sub>			- 0,136 (0,56)	- 0,135 (0,60)
engrais			- 0,0418 (2,65)	- 0,23

c) Elasticités prix de long terme

	P carburants	p K	pN <sub>s</sub>	P engrais	pN <sub>f</sub>	pterre
carburants	-0,706	-0,047	-0,16	0,307	0,119	0,492
K		-0,0168	0,065	-0,0217	0,130	0,268
N <sub>s</sub>		-0,129	-0,496	-0,337	0,961	-0,143
engrais		0,0746	-0,1046	-0,634	-0,039	0,718
N <sub>f</sub>		0,034	0,355	0,0466	-1,09	0,0636
terre		0,170	-0,063	1,02	0,763	-2,156

(entre parenthèses : t de Student approximé)

## CONCLUSION

L'application de la théorie de la dualité associée à la fonction de coût translog présente donc, au vu des premiers résultats sur données micro-économiques, une certaine pertinence dans la caractérisation de la technologie céréalière. L'étude de la fonction de coût de long terme indique une relation de substituabilité entre les consommations intermédiaires et les autres facteurs (terre, travail, capital), de même pour le couple capital-travail ; par ailleurs, aucune complémentarité entre facteurs n'est significative. Ces résultats sont cohérents avec d'autres études (Bonnieux 86, Guyomard 87) menées sur données macroéconomiques.

La fonction de coût variable traduit, quant à elle, une technologie homothétique ; aucune complémentarité n'est, là encore significative, les relations de substituabilité se confirment dans le long terme de même que le principe de Le Châtelier, vérifié pour tout facteur variable ; notons enfin des économies d'échelle significatives.

La méthodologie développée ici devrait dès lors s'appliquer à d'autres systèmes (laitiers, bovins viande, ...). La prise en compte du caractère dynamique est également possible, la disponibilité des données du RICA permettant alors de raisonner sur plusieurs coupes : une étude économétrique sur données de panel ciblée sur des aspects tels que le progrès technique apparaît comme le prolongement logique de ce travail. Par ailleurs, la prise en compte de facteurs fixes nécessite la troncature de l'échantillon réduit ainsi à 58 observations : en effet ces dernières étaient les seules de l'échantillon initial à présenter une quantité positive de travail salarié ; cette réduction introduit un biais dans les estimations ce qui motive à considérer l'utilisation du travail salarié dans le processus de production comme le résultat d'un double choix : discret tout d'abord (utilisation ou non de main d'oeuvre salariée), puis portant sur le niveau désiré ; la formalisation peut s'appuyer alors sur un modèle tobit, les estimateurs étant obtenus par maximisation de la vraisemblance du modèle.

### Bibliographie

- ALLEN R. - G. - D., 1938.  
 "Mathematical analysis for economists".  
 London, Mc Graw Hill.
- ARROW K. J., INTRILIGATOR M. - D., 1982.  
 "Handbook of mathematical economics" (volume 2).  
 North-Holland Publishing Company.
- BARTEN A. - P., 1969.  
 "Maximum likelihood estimation of a complete system of demand equations".  
 European Economic Review, vol. 1, p. 7-73.
- BEATTIE B. - R., TAYLOR C. - R., 1985.  
 "The economics of production".  
 John Wiley et Sons, 1985, 258 p.
- BERNDT E. - R., CHRISTENSEN L. - R., 1973.  
 "The internal structure of fonctionnal relationships : separability, substitution and aggregation".  
 The Review of Economic Studies, vol. 40, p. 403-409.
- BERNDT E. - R., FIELD B. - C., (ed.), 1981.  
 "Modeling and measuring natural resource substitution".  
 Mit Press, Cambridge Mass, 314 p.
- BONNIEUX F., 1986.  
 "Etude économétrique des disparités de l'agriculture française sur la base de données départementales".  
 INRA, Rennes, Economie et Sociologie Rurales, 401 p.
- BROWN R. - S., CHRISTENSEN L. - R., 1981.  
 "Estimating elasticities of substitution in a model of partial static equilibrium : an application to U.S. agriculture, 1947 to 1974".  
 in Berndt et Field (ed.), chap. 10.
- CARLES R., CHITRIT J. - J., 1985.  
 "Le secteur grandes cultures : spécificités et essai de projective".  
 Série Notes et Documents, Grignon, oct. 1985, n° 9.
- DIEWERT W. - E., 1982.  
 "Duality approaches to microeconomic theory".  
 in Arrow, Intriligator, (ed.), chap. 12.
- FUSS M., Mc FADDEN D., (ed.), 1978.  
 "Production economics : dual approach to theory and application".  
 North-Holland Publishing Company, Volume 1, 482 p.
- GRILICHES Z., INTRILIGATOIR M. - D., 1986.  
 "Handbook of Econometrics", vol. 3.

- HALVORSON R., SMITH T. - R., 1986.  
 "Substitution possibilities for unpriced natural resources : restricted cost functions for the canadian metal mining industry".  
 Review of economics and statistics, août 1986, pp. 398-405.
- JORGENSEN D. - W., LAU L. - J., 1974.  
 "The duality of technology and economic behavior".  
 Review of Economic Studies, vol. 41, pp. 181-200.
- LAU L. - J., 1976.  
 "A characterization of the normalized restricted profit function".  
 Journal of economic Theory, vol. 12, n° 1, pp. 131-163.
- LAU L. - J., 1986.  
 "Functionnal Forms in econometric model building".  
 in Griliches Z., Intriligator M. - D., (ed.), vol. 3, chap. 26.
- MALINVAUD E., 1969.  
 "Méthodes statistiques de l'économétrie".  
 Dunod, Paris, 2è édition, 782 p.
- MALINVAUD E., 1982.  
 "Leçons de théorie microéconomique".  
 Paris, Dunod, 385 p.
- RAUSSER G. - C., 1982.  
 "New directions in econometric modeling and forecasting in U.S. agriculture."  
 North-Holland (1982), 830 p.
- SAMUELSON P. - A., 1947.  
 "Foundations of Economic Analysis".  
 Harvard univ. Press, Cambridge, Mass, 1947.
- SHEPHARD R. - W., 1970.  
 "Theory of cost and production functions".  
 Princeton University Press.
- TROGNON A., 1987.  
 Cours d'économétrie.  
 ENSAE, 1986-1987.
- UZAWA H., 1964.  
 "Duality principles in the theory of cost and production".  
 International economic review, vol. 5, n° 2, pp. 216-220;
- VARIAN H. - R., 1984.  
 "Microeconomic analysis (2è édition).  
 W. - W. Norton et Company, New-York, 348 p.
- WEAVERT R. - D., 1982  
 "Specification and estimation of consistent sets of choice functions in New directions in econometric modeling and forecasting in US Agriculture, North Holland, chap. 5.



- GUYOMARD H., 1987.  
Etude économétrique de la fonction d'investissement macro-économique en agriculture.  
Communication présentée au colloque SFER : Financement et capitalisation de l'agriculture, 1-2 avril 1987, 23 p.
- LAU L. - J., 1986.  
"Functional farms in econometric model building".  
in Griliches Z. and Intriligator M. - D., Handbook of econometrics, vol. III, Elsevier Science Publishers, BV, 1986.
- DIEWERT, 1974.  
Applications of duality theory.  
in Intriligator and Kendrick eds. Functions of quantitative economics. North Holland, vol. 2, 106-171.
- GALLANT R. - A., 1981.  
On the bias in flexible forms and an essentially unbiased form : the Power functional form. Journal of econometrics, 15, 211-245.
- CHRISTENSEN L. - R., JORGENSEN D. - W., LAU L. - J. (1973),  
Transcendental logarithmic production p .  
The Review of Economics and Statistics, 55.
- DIEWERT, 1971.  
An application of the shephard duality theorem. A generalized Leontieff production function.  
Journal of political Economy, 79, 481-507.
- DIEWERT W. - E., WALES T. - J. (1987).  
"Flexible functional forms and curvative conditions."  
Econometrica, vol. 55, n° 1, january 1987.
- MAGNUS J. - R. (1979).  
Substitution between energy and non energy inputs in the Netherlands 1950-1976.  
International Economic Review, june 20 (2), 465-484.
- BARNETT W. - A. (1982).  
The flexible laurent demand system.  
American Statistical Association Meetings, Business and Economic Statistic Session, 82-89.
- KHALED M. - S., 1978.  
Productivity analysis and functional specification : A parametric Approach.  
Univ. British Columbia, Vancouver, april 1978.
- BERNDT E. R., KHALED M., 1979.  
Parametric productivity measurement and choice among flexible farms.  
Journal of Political Economy, 1979, vol. 87, 1220-1245.

JORGENSEN D. - W., FRAUMENI B. M., 1981.  
Relative prices and technical change in Modelling and measuring natural resource substitution, ed. Berndt and Field, Cambridge, Massachussets, Mit press.

BARNETT W., LEE Y., WOLFE M., 1985.  
The three dimensional global properties of the Minflex Laurent, Generalized Leontieff and flexible fuctinal forms.  
Journal of Econometrics, 30 (1985), 3-31.

SHEPHARD, 1953.  
Cost and production functions.  
Princeton N. S., Princeton University Press.

JORGENSEN, 1986.  
Econometric methods for modelling producer behavior in Hardbook of Econometrics, vol. III, ed. Griliches and Intriligatoir, Elsevier Science Publisher.

FRISCH, 1965.  
Theory of production.  
Chicago, Rand Mc Nally.

GUILKEY, LOVELL C. - A., 1980.  
On the flexibility of the translog ap:proximation.  
International Economic Review, 21, 137-147.

HANOCH G., 1975.  
The elasticity of scale and the shape of average costs.  
American Economic Review, vol. 65, june 75, p. 492.

WEAVER R. D., 1983.  
Multiple input, multiple output production choices and technology in the US wheat Region.  
American Journal of Agricultural Economics, feb. 83, vol. 65, p. 45-56.

BINSWANGER HAMS P., 1974.  
"A cost function approach to the measurement of elasticities of factor demand and elasticities of substitution.  
AJAE, vol. 56, n° 2, may 74.

RAY Subhash C.  
"A translog cost function analysis of U.S. agriculture 1939-77".  
AJAE, vol. 64, n° 3 (august 82).

John M. ANTLE and ALI S. AITAH, 1983.  
"Price Technology, farmer rationality and Agricultural Policy in Egypt.  
AJAE, vol. 65, pp. 667-674.

## ANNEXE

Formules des élasticités de long terme dans le cas  
d'une technologie de court terme à deux facteurs fixes

Ces formules ont été établies moyennant l'utilisation des relations théoriques entre les dérivées de la fonction de coût variable et de la fonction de coût total (cf. chap. I) ; Brown et Christensen (1981), Halvorsen et Smith (1986) appliquent les résultats de Lau dans le cas d'un seul facteur fixe.

Soient :

N et T les quantités de deux facteurs fixes associées respectivement aux prix  $P_N$  et  $P_T$ .

$$MN = - \frac{P_N N}{CV} \quad MT = - \frac{P_T T}{CV}, \text{ CV étant le coût variable.}$$

$$M_i = \frac{P_i X_i}{CV} \quad : \text{ part du facteur } i \text{ dans le coût CV.}$$

$k_{iN}$ ,  $k_{iT}$ ,  $g_{NN}$ ,  $g_{TT}$ ,  $g_{NT}$  : les coefficients du logarithme de la fonction de coût variable associés respectivement à :

$$(\log p_i) (\log N), (\log p_i) (\log T), (\log N)^2, (\log T)^2, (\log N) (\log T)$$

$(E_{ij})_{CT}$  = élasticité croisée de court terme du facteur i relativement au prix  $p_j$  du facteur j :

$$A(i, j, N, T) = (M_i M_T + k_{iT}) \left[ (g_{NN} + MN^2 - MN) (M_j M_T + k_{jT}) - (g_{NT} + MT MN) (M_j MN + k_{jN}) \right]$$

$$(M_i MN + k_{iN}) \left[ (g_{TT} + MT^2 - MT) (M_j MN + k_{jN}) - (g_{NT} + MT MN) (M_j M_T + k_{jT}) \right]$$

$$B(N, T) = (g_{TT} + MT^2 - MT)(g_{NN} + MN^2 - MN) - (g_{NT} + MN \cdot MT)^2$$

$$C(i, N, T) = (g_{TT} + MT^2 - MT) (M_i MN + k_{iN}) - (g_{NT} + MN \cdot MT) (M_i MT + k_{iT})$$

Les élasticités de long terme s'écrivent alors de la manière suivante :

1) i et j facteurs variables

$$(E_{ij})_{LT} = (E_{ij})_{CT} + \frac{1}{M_i} \frac{A(i, j, N, T)}{B(N, T)}$$

2) i facteur variable, N facteur fixe

$$E_{iN} = \frac{M_N \cdot C(i, N, T)}{M_i \cdot B(N, T)}$$

$$E_{ni} = - \frac{C(i, N, T)}{B(N, T)}$$

$$E_{iT} = \frac{M_T \cdot C(i, T, N)}{M_i \cdot B(N, T)}$$

$$E_{Ti} = - \frac{C(i, T, N)}{B(N, T)}$$

3) N et T facteurs fixes

$$E_{NT} = \frac{-M_T (g_{NT} + M_T \cdot M_N)}{B(N, T)}$$

$$E_{TN} = \frac{-M_N (g_{NT} + M_T \cdot M_N)}{B(N, T)}$$

$$E_{NN} = \frac{M_N (g_{TT} + M_T^2 - M_T)}{B(N, T)}$$

$$E_{TT} = \frac{M_T (g_{NN} + M_N^2 - M_N)}{B(N, T)}$$