



HAL
open science

Quelques résultats sur les fonctions vectorielles à variation bornée d'une variable réelle

Jean Jacques Moreau, Michel Valadier

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau, Michel Valadier. Quelques résultats sur les fonctions vectorielles à variation bornée d'une variable réelle. 1984. hal-02309535

HAL Id: hal-02309535

<https://hal.science/hal-02309535>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1984, Exposé n° 16

QUELQUES RESULTATS SUR LES FONCTIONS VECTORIELLES
A VARIATION BORNEE D'UNE VARIABLE REELLE

J.J. MOREAU et M. VALADIER

INTRODUCTION.

Cet exposé donne trois types de résultats.

1) des propriétés de la mesure différentielle de γ o f où f est à variation bornée et γ convexe (théorème 6) ou de classe C^1 (th. 7) ou lipschitzienne (th. 8).

2) le théorème 9 : si f est réelle à variation bornée sur un intervalle et à valeurs ≥ 0 , on a

$(df)^+ (\{t \mid f^+(t) = 0\}) = 0$ où $(df)^+$ désigne la partie positive de la mesure différentielle df .

3) la formule $|df| = dv$ (où v est une fonction variation de f) pour f à "sauts alignés" (théorème 11) .

Les résultats évoqués en 1) étendent des résultats du premier

auteur ([14], [15]) qui a montré que, si f est à variation bornée sur un intervalle à valeurs dans un Hilbert, on a

$$2 \int f^- .df \leq \|f\|^2 \leq 2 \int f^+ .df$$

et $\|f\|^2 = (\int f^+ + \int f^-) .df$ (où $f^+(t)$ est la limite à droite de f en t , le point désigne le produit scalaire) ainsi qu'un lemme de Brézis ([1] lemme 3.3 p. 73) qui donne le cas $f \in W^{1,2}(0,T;H)$, γ convexe. Rappelons que l'inégalité $\|f\|^2 \leq 2 \int f^+ .df$ est la clé de la preuve de l'unicité dans le problème de rafle discontinu (Moreau [14], [15], voir références plus précises plus loin).

Les démonstrations des résultats 1) et 2) utilisent l'extension d'un théorème de Jeffery donnée au § 1. Ce théorème a fait l'objet d'un exposé précédent [16], mais ce qui est utile ici est dit dans le § 1. Pour le théorème 9 on donne aussi la démonstration originelle du premier auteur basée sur la technique du "déploiement" (technique présentée et déjà utilisée dans [16]).

Le dernier résultat (théorème 11) complète l'étude des fonctions vectorielles à variation bornée d'une variable réelle du premier auteur ([14], [15]) et une formule de Dinculeanu ([6]).

§ 1. UN RESULTAT DE DERIVATION D'UNE MESURE VECTORIELLE SUR UN INTERVALLE.

Théorème 1. - Soit I un intervalle réel, X un Banach, μ une mesure de Radon positive sur I , ν une mesure vectorielle sur I à valeurs dans X ayant une densité par rapport à μ , $\frac{d\nu}{d\mu}$, appartenant

à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, \mu; X)$. Alors en μ -presque tout t

$$\frac{d\nu}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\nu([t, t + \varepsilon])}{\mu([t, t + \varepsilon])} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\nu([t - \varepsilon, t])}{\mu([t - \varepsilon, t])}$$

(avec les conventions $\frac{0}{0} = 0$, $\mu([t, t + \varepsilon]) = \mu([t, t + \varepsilon] \cap I)$ et les trois autres formules avec ν et $[t - \varepsilon, t]$).

Commentaires. Pour ν réelle ce théorème est dû à Jeffery ([10] th. V p. 655 et aussi th. XI p. 662 ; pour un article plus récent et plus moderne voir Ellis-Jeffery [8] th. 3.2 p. 228). Pour une démonstration du théorème de Jeffery pour X ayant la propriété de Radon-Nikodym, donc en particulier pour $X = \mathbb{R}$, voir Moreau-Valadier [16] ; on y utilise la technique du déploiement. La preuve ci-dessous, calquée sur Dunford-Schwartz [7] th. 8 p. 217, utilise le théorème de Jeffery pour ν réelle.

Preuve. Notons $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$. Comme φ est fortement mesurable (φ est localement Bochner-intégrable), il existe un sous-espace vectoriel séparable Z de X tel que $\varphi(t) \in Z$ μ -p.p. Soit (z_n) une suite dense dans Z .

Appliquons le théorème de Jeffery évoqué ci-dessus à la mesure réelle positive ν_n qui a la densité

$$t \mapsto \|\varphi(t) - z_n\| \quad \text{par rapport à } \mu.$$

Il existe N_n négligeable tel que si $t \notin N_n$

$$\|\varphi(t) - z_n\| = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\nu_n([t, t + \varepsilon])}{\mu([t, t + \varepsilon])}.$$

Soit $N = \cup N_n \cup \{t \mid \varphi(t) \notin Z\}$.

Soit $t \notin N$. Fixons $\eta > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1) \quad \|\varphi(t) - z_n\| \leq \eta .$$

Comme $t \notin N_n$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ on ait

$$(2) \quad \left| \frac{v_n([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} - \|\varphi(t) - z_n\| \right| \leq \eta .$$

Comme

$$\begin{aligned} & \int_{[t, t+\varepsilon]} \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \mu(ds) \\ & \leq \int_{[t, t+\varepsilon]} (\|\varphi(s) - z_n\| + \|\varphi(t) - z_n\|) \mu(ds) \\ & \leq v_n([t, t+\varepsilon]) + \mu([t, t+\varepsilon]) \eta , \end{aligned}$$

on obtient, en divisant par $\mu([t, t+\varepsilon])$:

$$(3) \quad \frac{\int_{[t, t+\varepsilon]} \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \mu(ds)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \leq \frac{v_n([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} + \eta .$$

Compte tenu de (1)(2) et (3) , pour $t \notin N$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ on a

$$(4) \quad \frac{\int_{[t, t+\varepsilon]} \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \mu(ds)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \leq 3\eta .$$

Comme on a

$$\frac{v([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} - \|\varphi(t)\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\int_{[t, t+\varepsilon]} (\varphi(s) - \varphi(t)) \mu(ds)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \right\| \\
&\leq \frac{\int_{[t, t+\varepsilon]} \|\varphi(s) - \varphi(t)\| \mu(ds)}{\mu([t, t+\varepsilon])} ,
\end{aligned}$$

(4) implique la première formule de l'énoncé. La formule "à gauche" se justifie pareillement.

§ 2. MESURE DIFFERENTIELLE DE LA COMPOSEE D'UNE FONCTION CONVEXE ET D'UNE FONCTION vlb.

Hypothèses. Soit I un intervalle réel, X un Banach, $f \in \text{vlb}(I; X)$ (c'est à dire f est une fonction de I dans X à variation bornée sur tout sous-intervalle compact de I), Ω un ouvert convexe de X , $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. On suppose $\forall [a, b] \subset I$, $\overline{f([a, b])}$ est un compact contenu dans Ω .

Remarques. 1) L'hypothèse $f(I) \subset \Omega$ ne suffit pas à assurer " $\gamma \circ f$ est vlb". Exemple :

$$X = \mathbb{R}, \quad \Omega =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \gamma(x) = \operatorname{tg}^2 x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2}] ,$$

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{si } t = \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

2) Le simple fait " $f \in \text{vlb}(I; X)$ " implique que $\forall [a, b] \subset I$, $\overline{f([a, b])}$ est un compact de X . Le déploiement en fournit une démonstration simple : avec les notations du § 2 de Moreau-Valadier [16], on a

$$f = F \circ w \text{ et } f([a, b]) \subset F([w^-(a), w^+(b)])$$

et le dernier ensemble est compact car F est continue. Mais le compact $\overline{f([a, b])}$ peut sortir de Ω même si $f(I) \subset \Omega$, c'est ce qui se passe dans l'exemple précédent.

Proposition 2. - Pour tout compact K contenu dans Ω , γ est lipschitzienne sur K et la multiapplication $x \mapsto \partial\gamma(x)$ définie sur K est à valeurs non vides et de graphe compact dans $K \times X'_s$ (X'_s désignant X' muni de $\sigma(X', X)$).

Remarque. Pour $X = \mathbb{R}^d$ c'est le th. 24.7 de Rockafellar ([17] p. 237).

Preuve. Pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe V voisinage de x_0 tel que γ soit majorée sur V . Alors d'après Moreau ([12], [13] 11.2 p. 79 ; cf. aussi, pour la démonstration, Valadier [19] th. 10 p. 72)

$$\bigcup_{x \in V} \partial\gamma(x) \text{ est une partie équicontinue de } X'$$

et $x \mapsto \partial\gamma(x)$ est s.c.s. de V dans X'_s . Comme K peut être recouvert par un nombre fini de tels voisinages, $\bigcup_{x \in K} \partial\gamma(x)$ est une partie équicontinue, donc contenue dans une boule de X' de centre 0

de rayon C . Grâce à sa semi-continuité supérieure, $x \mapsto \partial\gamma(x)$ est de graphe compact dans $K \times X'_S$.

Si $(x, y) \in K^2$, on a, pour $x' \in \partial\gamma(x)$,

$$\gamma(y) \leq \gamma(x) + \langle x', y - x \rangle \leq \gamma(x) + C\|y - x\|.$$

Comme x et y jouent des rôles symétriques on a

$$|\gamma(y) - \gamma(x)| \leq C\|y - x\|.$$

Lemme 3. - Soit μ et λ des mesures réelles bornées sur $[a, b]$, μ étant positive. On suppose $\int C \in [0, \infty[$ tel que $\forall J$ intervalle semi-ouvert à gauche contenu dans $[a, b]$ on ait $|\lambda(J)| \leq C\mu(J)$ et que $|\lambda(\{a\})| \leq C\mu(\{a\})$. Alors $|\lambda| \leq C\mu$.

Preuve. La mesure $C\mu - \lambda$ (on peut faire le même raisonnement avec $C\mu + \lambda$) a, d'après les hypothèses, une fonction de répartition (cf. Moreau-Valadier [16] § 1 D) croissante, donc elle est ≥ 0 . De $\lambda \leq C\mu$ et $-\lambda \leq C\mu$ on déduit

$$|\lambda| \leq C\mu.$$

(La démonstration initiale du second auteur était laborieuse, l'idée de celle-ci est due à J. Saint-Pierre).

Proposition 4. - La fonction $\gamma \circ f$ appartient à $v_{lb}(I; \mathbb{R})$. De plus $d(\gamma \circ f) \ll |df|$.

Preuve. 1) Si $C \in [0, \infty[$ est tel que γ soit lipschitzienne de

rapport $\leq C$ sur $\overline{f([a,b])}$ on obtient aisément

$$\text{var}(\gamma \circ f; a,b) \leq C \text{var}(f; a,b) ,$$

ce qui établit $\gamma \circ f \in \text{vlb}(I; \mathbb{R})$.

2) Etant donné $[a,b] \subset I$, soit $[a',b']$ un voisinage de $[a,b]$ dans I et C une constante de lipschitz de γ sur $\overline{f([a',b'])}$. Si $J =]s,t[$ est contenu dans $[a,b]$ on a

$$\begin{aligned} |d(\gamma \circ f)(]s,t[)| &= |\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^+(s))| \\ &\leq C \|f^+(t) - f^+(s)\| \quad (\text{remarquer que } f^+(t) \in \overline{f([a',b'])}) \\ &= C \|df(]s,t[)\| \\ &\leq C |df|(]s,t[) . \end{aligned}$$

On montre pareillement

$$|d(\gamma \circ f)(\{a\})| \leq C |df|(\{a\}) .$$

D'après le lemme 3, on a pour les mesures induites sur $[a,b]$:

$$|d(\gamma \circ f)|_{|[a,b]} \leq C |df|_{|[a,b]} ,$$

ce qui prouve $|d(\gamma \circ f)| \ll |df|$.

Lemme 5. - Soit μ une mesure de Radon positive sur I telle que $|df| \ll \mu$. On suppose que df a une densité par rapport à μ , $\frac{df}{d\mu}$ (appartenant à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, \mu; X)$). Alors les deux fonctions réelles

$$\varphi_{\star} : t \mapsto \sup \{ \langle g, \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \mid g \in \partial\gamma(f^-(t)) \} \quad \text{et}$$

$$\varphi^* : t \mapsto \inf \{ \langle g, \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \mid g \in \partial\gamma(f^+(t)) \}$$

sont μ -mesurables (boréliennes si on prend $\frac{df}{d\mu}$ limite d'une suite de fonctions boréliennes étagées) et localement μ -intégrables.

Remarques. 1) Un bon moyen d'assurer l'existence de $\frac{df}{d\mu}$ serait de supposer que X a la propriété de Radon-Nikodym.

2) Dire que $\frac{df}{d\mu}$ appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, \mu; X)$ signifie que $\frac{df}{d\mu}$ est localement Bochner-intégrable, ce qui implique une propriété de mesurabilité assez forte.

3) Il est courant de supposer $\frac{df}{d\mu}$ μ -mesurable. Mais on peut prendre une fonction dans la même classe d'équivalence Borel-mesurable limite d'une suite de fonctions boréliennes étagées.

Preuve. 1) Supposons (cf. la remarque précédente) $\frac{df}{d\mu}$ limite d'une suite de fonctions boréliennes étagées. On va montrer que φ_\star est borélienne sur tout intervalle compact $[a, b]$ contenu dans I . Soit $K = \overline{f([a, b])}$. D'après la prop. 2 la multiapplication $x \mapsto \partial\gamma(x)$ définie sur K est s.c.s. et à valeurs dans une boule $B(0, C)$ de X' . Posons, pour $u \in X$, $x \in K$,

$$\phi(u, x) = \delta^\star(u \mid \partial\gamma(x)) .$$

Remarquons que

$$\varphi_\star(t) = \phi\left(\frac{df}{d\mu}(t), f^-(t)\right) .$$

Comme $\frac{df}{d\mu}$ et f^- sont limites de suites de fonctions boréliennes éta-

gées, la fonction

$$\left| \begin{array}{l} t \mapsto \left(\frac{df}{d\mu}(t), f^-(t) \right) \\]a, b] \rightarrow X \times K \end{array} \right.$$

est borélienne, et il nous suffit de montrer que ϕ est borélienne.

Or on a :

- (i) $\phi(u, x) \geq -C\|u\|$
- (ii) $\phi(\cdot, x)$ est continue
- (iii) $\phi(u, \cdot)$ est s.c.s.

Pour tous $v \in X$ et $k \in \mathbb{N}$ la fonction

$$(u, x) \mapsto \phi(v, x) + k\|v - u\| \text{ est s.c.s. sur } X \times K \text{ (grâce à (iii)).}$$

Par conséquent ϕ_k définie par

$$\phi_k(u, x) = \inf \{ \phi(v, x) + k\|v - u\| \mid v \in X \}$$

est s.c.s. , donc borélienne. Il est alors assez facile de vérifier (grâce à (i) et (ii)) que $\phi = \sup_{k \in \mathbb{N}} \phi_k$, ce qui prouve que ϕ est borélienne : une démonstration détaillée de ce résultat est donnée dans Castaing-Clauzure ([2] théorème 3 page 11) . On trouve déjà un résultat de ce type dans Hausdorff ([9] § 42 p. 282-283).

2) Avec les notations du 1) , on a sur $]a, b]$

$$|\varphi_{\star}(t)| \leq C \left\| \frac{df}{d\mu}(t) \right\| , \text{ ce qui prouve que}$$

φ_{\star} est localement μ -intégrable.

3) Des arguments analogues valent pour φ^\star .

Remarque. La technique du 1) permet d'éviter de supposer X séparable. Si X est séparable, on peut utiliser une représentation de Castaing de $x \mapsto \partial\gamma(x)$ (cf. Castaing-Valadier [3]) et en déduire la mesurabilité de φ_\star .

Théorème 6. - Soit I un intervalle, X un Banach, μ une mesure de Radon positive sur I , f une fonction appartenant à $\text{vlb}(I;X)$. On suppose que la mesure différentielle de f , df , a une densité $\frac{df}{d\mu}$ appartenant à $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(I, \mu; X)$. Soit Ω un ouvert convexe de X et $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue. On suppose que $\forall [a,b] \subset I$, $f([a,b])$ est contenu dans Ω .

Alors $\gamma \circ f$ appartient à $\text{vlb}(I; \mathbb{R})$, $d(\gamma \circ f)$ est absolument continue par rapport à μ et, φ_\star et φ^\star étant les fonctions définies dans le lemme 5 on a

$$\varphi_\star(t) \leq \frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \leq \varphi^\star(t) \quad \mu\text{-p.p.}$$

De plus, si $C = \{t \in I \mid df(\{t\}) = 0\}$, on a $\varphi_\star = \varphi^\star$ μ -p.p. sur C , autrement dit, μ -p.p. sur C $\partial\gamma(f^+(t))$ (égal à $\partial\gamma(f^-(t))$) est contenu dans un hyperplan affine de X' orthogonal à $\frac{df}{d\mu}(t)$.

Remarque. Si γ est Gâteaux-différentiable les expressions de φ_\star et φ^\star se réduisent à

$$\varphi_\star(t) = \langle \gamma'(f^-(t)), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle, \varphi^\star(t) = \langle \gamma'(f^+(t)), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle.$$

On peut observer que dans ce cas la continuité de γ résulte de la convexité et de la Gâteaux-différentiabilité (en effet X étant un Banach, γ s.c.i. $\Rightarrow \gamma$ continue).

Commentaires. Ce théorème est un résultat de "dérivation de fonction composée". Le cas où f est absolument continue et γ différentiable est élémentaire. Brézis ([1] lemme 3.3 p. 73) traite le cas où f (notée u) appartient à $W^{1,2}(0,T;H)$, γ (notée φ) convexe s.c.i. propre ; il suppose $f(t) \in \text{dom}(\partial\gamma)$ p.p. et $\exists g \in L^2(0,T;H)$ telle que $g(t) \in \partial\gamma(f(t))$ p.p. Moreau [14] traite le cas, rappelé dans l'exemple 3 ci-dessous, où X est un Hilbert, $\gamma(x) = \|x\|^2$ et $f \in \text{vlb}(I;X)$.

Avant de passer à la démonstration donnons trois exemples.

Exemple 1. Prenons $X = \mathbb{R}$, $t \in I$ tel que en t f saute de 0 à 1 (plus précisément $f^-(t) = 0$, $f^+(t) = 1$). Prenons μ telle que $\mu(\{t\}) = 1$, de sorte que $\frac{df}{d\mu}(t) = 1$. Alors $d(\gamma \circ f)(\{t\}) = \gamma(1) - \gamma(0)$. La formule d'encadrement du théorème signifie ici que

$$\gamma'_d(0) \leq \gamma(1) - \gamma(0) \leq \gamma'_g(1)$$

où $\gamma'_d(0)$ (resp. $\gamma'_g(1)$) est la dérivée à droite (resp. à gauche) en 0 (resp. 1). Cela se vérifie directement. De façon plus générale, la formule d'encadrement est élémentaire aux points t qui sont des atomes de μ .

Exemple 2. On prend $X = \mathbb{R}^2$, $I = [0,1]$, $f(t) = (0,t)$, μ

mesure de Lebesgue, $\gamma(x) = |x_1|$ (avec $x = (x_1, x_2)$). Ici en tout t , $\partial\gamma(f(t)) = [-1, 1] \times \{0\}$ et $\frac{df}{d\mu}(t) = (0, 1)$, ce qui illustre la dernière partie de l'énoncé.

Exemple 3. Pour X Hilbert et $\gamma(x) = \|x\|^2$, comme $\partial\gamma(x) = \{2x\}$, on a

$$\langle 2f^-(t), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \leq \frac{d\|f\|^2}{d\mu}(t) \leq \langle 2f^+(t), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \quad \mu\text{-p.p.},$$

ce qui équivaut à la formule de Moreau ([14] coroll. 5.c p. 33 et [15] prop. 2)

$$2f^-.df \leq d\|f\|^2 \leq 2f^+.df.$$

Rappelons que la seconde inégalité est la clé de l'unicité dans le problème de rafle discontinu (Moreau [14] prop. 6.b p. 36 et [15] prop. 3).

Preuve du théorème.

D'après le théorème 1 il existe N μ -négligeable tel que si $t \notin N$

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{d(\gamma \circ f)([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{d(\gamma \circ f)([t-\varepsilon, t])}{\mu([t-\varepsilon, t])}$$

et

$$\frac{df}{d\mu}(t) = \lim \frac{df([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} = \lim \frac{df([t-\varepsilon, t])}{\mu([t-\varepsilon, t])}$$

a) Si $t \notin N$ on a, pour tout $g \in \partial\gamma(f^-(t))$

$$\frac{d(\gamma \circ f)([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} = \frac{\gamma(f^+(t+\varepsilon)) - \gamma(f^-(t))}{\mu([t, t+\varepsilon])}$$

$$\geq \langle g, \frac{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \rangle .$$

En passant à la limite on a

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \geq \langle g, \frac{df}{d\mu}(t) \rangle$$

d'où, en prenant le sup en g

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \geq \varphi_{\star}(t)$$

b) Si $t \notin N$ on a, pour tout $g \in \partial\gamma(f^+(t))$

$$\frac{d(\gamma \circ f)([t-\varepsilon, t])}{\mu([t-\varepsilon, t])} = \frac{\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^-(t-\varepsilon))}{\mu([t-\varepsilon, t])}$$

$$\leq \langle g, \frac{f^+(t) - f^-(t-\varepsilon)}{\mu([t-\varepsilon, t])} \rangle .$$

En passant à la limite on a

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \leq \langle g, \frac{df}{d\mu}(t) \rangle$$

d'où, en prenant le inf en g

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \leq \varphi_{\star}(t) .$$

c) Si $t \in C$, on a $f^-(t) = f^+(t)$, d'où $\varphi_{\star}(t) \leq \varphi_{\star}(t)$.

Donc $\varphi_{\star} = \varphi^{\star}$ μ -p.p. sur C .

§ 3. FORMULE DE VOL'PERT.

Vol'pert ([20] § 13.2 p. 248) a donné une formule pour la dérivée au sens distributions de $\gamma \circ f$ où γ est réelle de classe C^1 sur \mathbb{R}^P et f est vlb, mais à plusieurs variables. Le cas plus simple où f est une fonction d'une seule variable permet d'appliquer notre méthode et de prendre f à valeurs dans un Banach.

Théorème 7. - Soit X un Banach, I un intervalle, $f \in \text{vlb}(I; X)$, γ réelle de classe C^1 sur X , μ une mesure de Radon positive sur I . On suppose que df a une densité $\frac{df}{d\mu}$ appartenant à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, \mu; X)$. On note

$\gamma' \hat{\circ} f$ la fonction sur I définie par

$$(\gamma' \hat{\circ} f)(t) = \int_0^1 \gamma'(rf^-(t) + (1-r)f^+(t)) dr .$$

Alors $\gamma \circ f \in \text{vlb}(I; \mathbb{R})$ et $d(\gamma \circ f)$ admet la densité suivante par rapport à μ :

$$t \mapsto \langle (\gamma' \hat{\circ} f)(t), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle .$$

Exemple. Si X est un Hilbert et $\gamma(x) = \|x\|^2$ on a

$$\begin{aligned} (\gamma' \hat{\circ} f)(t) &= \int_0^1 2(rf^-(t) + (1-r)f^+(t)) dr \\ &= f^-(t) + f^+(t) . \end{aligned}$$

Donc $\frac{d\|f\|^2}{d\mu}(t) = \langle f^+(t) + f^-(t), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle$, ce qui équivaut à la formule de Moreau ([14] prop. 5.b p. 30 et [15] prop. 1)

$$d\|f\|^2 = (f^+ + f^-) \cdot df .$$

Pour $X = \mathbb{R}$ cette formule semble connue depuis au moins 1918 (cf. Daniell [4] p. 362).

Preuve. On vérifie facilement que $d(\gamma \circ f) \ll |df|$. On peut faire la démonstration avec $\mu = |df|$. Soit $I_a = \{t \mid f^+(t) \neq f^-(t)\}$ et $I_c = I - I_a$.

1) Etablissons la formule sur I_c . On a d'après le théorème 1 μ -p.p.

$$\begin{aligned} \frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{d(\gamma \circ f)([t, t + \varepsilon])}{\mu([t, t + \varepsilon])} \\ &= \lim \frac{\gamma(f^+(t + \varepsilon)) - \gamma(f^-(t))}{\mu([t, t + \varepsilon])} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \frac{df}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{f^+(t + \varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t + \varepsilon])} .$$

On a, pour μ -presque tout t ,

$$\frac{f^+(t + \varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t + \varepsilon])} = \frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{d'où}$$

le "développement limité" :

$$f^+(t + \varepsilon) = f^-(t) + \mu([t, t + \varepsilon]) \left[\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\varepsilon) \right] .$$

Comme $\mu = |df|$ et $t \in I_c$,

$$\mu([t, t + \varepsilon]) \rightarrow |df|(\{t\}) = 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0 .$$

On a, en $x = f^-(t)$,

$$\gamma(x+h) = \gamma(x) + \langle \gamma'(x), h \rangle + \|h\| \zeta(h) \text{ avec } \zeta(h) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \gamma(f^+(t+\epsilon)) &= \gamma(f^-(t)) + \langle \gamma'(f^-(t)), \mu([t, t+\epsilon]) [\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)] \rangle \\ &+ \|\mu([t, t+\epsilon]) [\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)]\| \zeta(\mu([t, t+\epsilon]) [\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)]) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(f^+(t+\epsilon)) - \gamma(f^-(t))}{\mu([t, t+\epsilon])} &= \langle \gamma'(f^-(t)), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \\ &+ \langle \gamma'(f^-(t)), \eta(\epsilon) \rangle + \|\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)\| \zeta(\mu([t, t+\epsilon]) [\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)]) . \end{aligned}$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, $\frac{df}{d\mu}(t) + \eta(\epsilon)$ reste borné dans X et $\mu([t, t+\epsilon]) \rightarrow 0$, donc

$$\frac{\gamma(f^+(t+\epsilon)) - \gamma(f^-(t))}{\mu([t, t+\epsilon])} \rightarrow \langle \gamma'(f^-(t)), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle .$$

D'où presque partout sur I_c , $\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \langle \gamma'(f^-(t)), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle$

ce qui donne bien la formule de l'énoncé car, sur I_c ,

$$f^-(t) = f^+(t) \text{ donc } (\gamma' \circ f)(t) = \gamma'(f^-(t)) .$$

2) Considérons maintenant I_a . Pour $t \in I_a$ on a $\mu(\{t\}) > 0$ et

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \frac{d(\gamma \circ f)(\{t\})}{\mu(\{t\})} = \frac{\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^-(t))}{\mu(\{t\})} .$$

Or $\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^-(t)) = -[\gamma(rf^-(t) + (1-r)f^+(t))]_0^1$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 \frac{d}{dr} [\gamma(rf^-(t) + (1-r)f^+(t))] dr \\
&= - \int_0^1 \langle \gamma'(rf^-(t) + (1-r)f^+(t)), f^-(t) - f^+(t) \rangle dr \\
&= - \int_0^1 \gamma'(rf^-(t) + (1-r)f^+(t)) dr, f^+(t) - f^-(t) \rangle \\
&= \langle \gamma' \circ f(t), f^+(t) - f^-(t) \rangle
\end{aligned}$$

$$D'où \quad \frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \langle \gamma' \circ f(t), \frac{f^+(t) - f^-(t)}{\mu(\{t\})} \rangle = \langle \gamma' \circ f(t), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle .$$

Remarques. 1) Pour $X = \mathbb{R}$ on peut raccourcir la démonstration du 1):

$$\frac{d(\gamma \circ f)([t, t+\varepsilon])}{\mu([t, t+\varepsilon])} = \frac{\gamma(f^+(t+\varepsilon)) - \gamma(f^-(t))}{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)} \frac{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t+\varepsilon])}$$

converge, pour $t \in I_c$, t n'appartenant pas à un négligeable ad hoc, vers $\gamma'(f^-(t)) \frac{df}{d\mu}(t)$.

2) Le 2) de la démonstration pourrait donner encore une information pour γ convexe : $r \mapsto \gamma(rf^-(t) + (1-r)f^+(t))$ est primitive de sa dérivée à droite.

§ 4. MESURE DIFFERENTIELLE DE LA COMPOSEE D'UNE FONCTION LIPSCHITZIENNE ET D'UNE FONCTION vlb .

Théorème 8. - Soit X un Banach, I un intervalle, $f \in \text{vlb}(I; X)$, γ une fonction réelle sur X lipschitzienne sur tout borné de X , μ une mesure de Radon positive sur I . On suppose que df a une den-

sité $\frac{df}{d\mu}$ appartenant à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, \mu; X)$.

Alors $\gamma \circ f \in \text{vIb}(I; \mathbb{R})$, $d(\gamma \circ f)$ est absolument continue par rapport à μ et μ -presque partout

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) \in \cup \{ \langle \partial\gamma(x), \frac{df}{d\mu}(t) \rangle \mid x \in [f^-(t), f^+(t)] \}$$

(où $\partial\gamma(x)$ désigne le gradient généralisé de Clarke de γ en x , où $[f^-(t), f^+(t)]$ désigne le segment d'extrémités $f^-(t)$ et $f^+(t)$, et où $\langle \partial\gamma(x), y \rangle$ est l'ensemble $\{ \langle x', y \rangle \mid x' \in \partial\gamma(x) \}$).

Preuve. Distinguons $A = \{t \mid \mu(\{t\}) > 0\}$ et $C = I - A$.

1) Si $t \in A$

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \frac{\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^-(t))}{\mu(\{t\})}.$$

Or, d'après Lebourg ([11] th. 2.1 p. 796), si $f^+(t) \neq f^-(t)$ il existe $x \in]f^-(t), f^+(t)[$ et $x' \in \partial\gamma(x)$ tel que $\gamma(f^+(t)) - \gamma(f^-(t)) = \langle x', f^+(t) - f^-(t) \rangle$. Si $f^+(t) = f^-(t)$ la formule précédente est vraie avec n'importe quel x' de $\partial\gamma(f^-(t))$.

La formule de l'énoncé pour $t \in A$ en résulte aussitôt.

2) On a, d'après le théorème 1, μ -p.p. sur C

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\gamma(f^+(t+\varepsilon)) - \gamma(f^-(t))}{\mu([t, t+\varepsilon])}$$

Comme ci-dessus

$$\gamma(f^+(t+\varepsilon)) - \gamma(f^-(t)) = \langle x'_\varepsilon, f^+(t+\varepsilon) - f^-(t) \rangle$$

où $x'_\varepsilon \in \partial\gamma(x_\varepsilon)$ pour un x_ε appartenant à $[f^-(t), f^+(t+\varepsilon)]$.

On a donc

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \lim_{\varepsilon} \langle x'_\varepsilon, \frac{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \rangle .$$

On sait qu'en μ -presque tout t

$$\frac{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t+\varepsilon])} \text{ converge en norme vers } \frac{df}{d\mu}(t) .$$

Soit $[a, b]$ un voisinage compact de t dans I . Alors $K = \overline{f([a, b])}$ est un compact contenant $f^-(t)$ et, pour ε assez petit, $f^+(t+\varepsilon)$. La multiapplication $\partial\gamma$ étant à valeurs $\sigma(X', X)$ compactes et s.c.s. x'_ε a une valeur d'adhérence faible x' appartenant à $\partial\gamma(f^-(t))$ (ne pas oublier qu'on est sur C donc que $f^+(t+\varepsilon) \rightarrow f^+(t) = f^-(t)$). D'où $\frac{d(\gamma \circ f)}{d\mu}(t) = \langle x', \frac{df}{d\mu}(t) \rangle$.

§ 5. UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS vlb REELLES.

Théorème 9. - Soit $f \in \text{vlb}(I; \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$. Alors

$$(df)^+(\{t \mid f^+(t) = 0\}) = 0 \text{ et}$$

$$(df)^-(\{t \mid f^-(t) = 0\}) = 0$$

(ici $(df)^+$ désigne la partie positive de la mesure df).

Ce théorème est dû au premier auteur. On commencera par le démontrer en utilisant le théorème 1 puis on donnera la démonstration originelle du premier auteur.

Première démonstration.

Soit μ une mesure (de Radon) ≥ 0 telle que $|df| \ll \mu$.
On sait que $(\frac{df}{d\mu})^+$ est une densité de $(df)^+$ par rapport à μ (cf. Rudin [18] th. 6.13 et 6.14).

1) D'après le théorème 1 on a μ -p.p.

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mu}(t) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{df([t-\varepsilon, t])}{\mu([t-\varepsilon, t])} \\ &= \lim \frac{f^+(t) - f^-(t-\varepsilon)}{\mu([t-\varepsilon, t])} \end{aligned}$$

Si de plus $f^+(t) = 0$, on a $\frac{df}{d\mu}(t) \leq 0$.

Ainsi sur $\{t \mid f^+(t) = 0\}$ on a $\frac{df}{d\mu}(t) \leq 0$ p.p. donc $(\frac{df}{d\mu})^+(t) = 0$
d'où $(df)^+(\{t \mid f^+(t) = 0\}) = 0$.

2) Comme en 1)

$$\frac{df}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{f^+(t+\varepsilon) - f^-(t)}{\mu([t, t+\varepsilon])}.$$

Sur $\{t \mid f^-(t) = 0\}$, $\frac{df}{d\mu}(t)$ est ≥ 0 μ -p.p. d'où $(\frac{df}{d\mu})^-(t) = 0$ p.p. et

$$(df)^-(\{t \mid f^-(t) = 0\}) = 0.$$

Deuxième démonstration.

On utilise les notations du § 2 de Moreau-Valadier [16].
On suppose, quitte à remplacer f par f^+ sur $\text{int}(I)$, que f est c.à.d. sur $\text{int}(I)$. Soit $f = F \circ w$ la factorisation de f . Par construction F est à valeurs ≥ 0 . Comme df est l'image de dF par p , $(df)^+$ est majorée par l'image de $(dF)^+$. L'ensemble

$\{t \mid f(t) = 0\} = f^{-1}(0)$ est réunion des deux boréliens $C = \{t \in f^{-1}(0) \mid w$
est continue en $t\}$ et $A = f^{-1}(0) - C$.

a) Montrons que $p^{-1}(C)$ est $(dF)^+$ négligeable ce qui entraînera
 $(df)^+(C) = 0$. Comme pour $t \in C$, $p^{-1}(t) = \{w(t)\}$ et
 $F(w(t)) = f(t) = 0$, on a $p^{-1}(C) \subset F^{-1}(0)$. Or si $s \in F^{-1}(0)$ et
si $F'(s)$ existe on a $F'(s) = 0$ (puisque $F \geq 0$). Comme $|F'(s)|$
est une densité de $|dF|$ par rapport à ds , $F^{-1}(0)$ est $|dF|$ -
négligeable donc a fortiori $(dF)^+$ -négligeable.

b) A est un ensemble dénombrable (éventuellement fini). Si $t \in A$,
 f est discontinue en t et

$$df(\{t\}) = f(t) - f^-(t) = -f^-(t) \leq 0,$$

d'où $(df)^+(\{t\}) = 0$ et $(df)^+(A) = 0$.

Variante de b. Si $t \in A$, $p^{-1}(t) = [w^-(t), w(t)]$ et, comme
 $F(w(t)) = 0$, $F(w^-(t)) \geq 0$ et que F est affine sur $[w^-(t), w(t)]$,
 $F'(s)$ est ≤ 0 , donc dF induit une mesure négative sur cet inter-
valle et $(dF)^+(p^{-1}(t)) = 0$, d'où, comme en a), $(df)^+(\{t\}) = 0$.

§ 6. FONCTIONS vb A SAUTS ALIGNÉS.

Définition. On dit que $f \in \text{vlb}(I; X)$ est à sauts alignés si

$$\forall t \in I, f(t) \in [f^-(t), f^+(t)].$$

Lemme 10. - Soit X un espace normé strictement convexe, a, b, c des points de X tels que $c \notin [a, b]$. Alors

$$\|a - c\| + \|c - b\| > \|a - b\| .$$

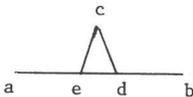
Preuve. Si $\|a - c\| > \|a - b\|$ ou $\|c - b\| > \|a - b\|$ le résultat est vrai. Supposons donc $\|a - c\| \leq \|a - b\|$ et $\|c - b\| \leq \|a - b\|$. La sphère $S(a, \|a - c\|)$ coupe $[a, b]$ en un point d et la sphère $S(b, \|c - b\|)$ coupe $[a, b]$ en un point e . Si $\|a - d\| > \|a - e\|$ le résultat est vrai. Supposons donc $\|a - d\| \leq \|a - e\|$. On va aboutir à une contradiction. Compte tenu de l'inégalité triangulaire

$$\|a - c\| + \|c - b\| \geq \|a - b\| \quad \text{on a } d = e .$$

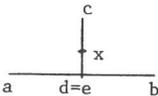
Soit alors x le milieu de $[c, d]$. La norme étant strictement convexe, on a

$$\begin{aligned} \|a - b\| &\leq \|a - x\| + \|x - b\| \\ &< \|a - d\| + \|d - b\| , \quad \text{ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

Illustration :



cas $\|a - d\| > \|a - e\|$



cas (impossible) $d = e$.

Théorème 11. - Soit I un intervalle de \mathbb{R} , X un Banach,
 $f \in \text{vlb}(I; X)$, v une fonction variation de f .

1) On a $|df| \leq dv$

2) Si $\forall t \in \text{int } I$, $\|f^+(t) - f^-(t)\| = \|f^+(t) - f(t)\| + \|f(t) - f^-(t)\|$
(ce qui a lieu si f est à sauts alignés) on a $|df| = dv$.

3) Si X est strictement convexe et si en t , $f(t) \notin [f^-(t), f^+(t)]$,
alors $|df|(\{t\}) < dv(\{t\})$.

4) Par conséquent si X est strictement convexe on a équivalence de
" $|df| = dv$ " et de " f est à sauts alignés".

Commentaires. Le 2) est donné par Dinculeanu ([6] § 17 remark 5 p. 362-363) pour f continue à droite sur $\text{int } I$. Le 1) a été démontré par Moreau ([14] p. 17) en référant à la théorie de l'intégration de Bourbaki ; il est contenu dans la preuve de l'existence de df par Dinculeanu.

Preuve. Il suffit de démontrer le théorème pour I compact. Pour 1) et 2) cela évitera de se battre avec les boréliens relativement compacts. Supposons donc $I = [a_0, b_0]$.

1) Soit $C = \{[a, b] \mid a \in I, b \in I, a < b\} \cup \{a_0\}$.

L'algèbre A engendrée par C est formée des unions finies disjointes d'éléments de C . On sait que A engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(I)$ et y est dense pour l'écart de Nikodym $(A, B) \mapsto dv(A \Delta B)$ (d'après Dunford-Schwartz [7] III.7 lemme 1 p. 158 l'adhérence de A dans $\mathcal{B}(I)$ est une tribu, c'est donc $\mathcal{B}(I)$).

Pour $]a, b] \subset I$ on a

$$df(]a, b]) = f^+(b) - f^+(a)$$

$$dv(]a, b]) = v^+(b) - v^+(a) .$$

Or, $\forall s \leq t$, on a $\|f(t) - f(s)\| \leq v(t) - v(s)$, d'où en prenant les limites à droite en a et b :

$$\|f^+(b) - f^+(a)\| \leq v^+(b) - v^+(a) ,$$

c'est à dire

$$\|df(]a, b])\| \leq dv(]a, b]) .$$

Pour $\{a_0\}$ on a

$$\begin{aligned} \|df(\{a_0\})\| &= \|f^+(a_0) - f(a_0)\| \\ &\leq v^+(a_0) - v(a_0) \\ &= dv(\{a_0\}) . \end{aligned}$$

Par additivité on a, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\|df(A)\| \leq dv(A)$.

Par continuité relativement à l'écart de Nikodym on a

$$\forall B \in \mathcal{B}(I), \quad \|df(B)\| \leq dv(B) .$$

On en déduit aisément $|df| \leq dv$.

2) a) Soit $a \in I$ point de continuité de v et $b \in I$, $b > a$ avec : soit b point de continuité de v , soit $b = b_0$. On va montrer $|df|(]a, b]) \geq dv(]a, b])$. On a $dv(]a, b]) = v(b) - v(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision (t_0, \dots, t_n) de $]a, b]$ telle

que $\sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \geq v(b) - v(a) - \varepsilon$. La difficulté vient du fait que certains t_i peuvent être points de discontinuité (à droite - on omettra cette précision dans la suite) de f . Soit k le nombre de ces points. Si t_i est un tel point, il existe $\eta_i > 0$ tel que

$$(i) \quad \eta_i < \frac{1}{2} \min \{ |t_\ell - t_{\ell-1}| \mid 1 \leq \ell \leq n \}$$

$$(ii) \quad \|f(t_i - \eta_i) - f^-(t_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{et} \quad \|f(t_i + \eta_i) - f^+(t_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2k}$$

(iii) $t_i - \eta_i$ et $t_i + \eta_i$ sont points de continuité de f .

Soit $(\theta_0, \dots, \theta_m)$ la subdivision de $[a, b]$ formée des points t_0, \dots, t_n augmentée des $t_i - \eta_i$ et $t_i + \eta_i$. On a

$$\sum_{j=1}^m \|f(\theta_j) - f(\theta_{j-1})\| \geq v(b) - v(a) - \varepsilon.$$

Parmi les termes $f(\theta_j) - f(\theta_{j-1})$ certains sont de la forme $f(t_i) - f(t_i - \eta_i)$ ou $f(t_i + \eta_i) - f(t_i)$, où t_i est un point de discontinuité de f ; pour les autres θ_j et θ_{j-1} sont points de continuité de f et le terme vaut $df(\theta_{j-1}, \theta_j)$. Remarquons que

$$\begin{aligned} & \|f(t_i) - f(t_i - \eta_i)\| + \|f(t_i + \eta_i) - f(t_i)\| \\ & \geq \|f(t_i) - f^-(t_i)\| + \|f^+(t_i) - f(t_i)\| - \frac{\varepsilon}{k} \\ & = \|f^+(t_i) - f^-(t_i)\| - \frac{\varepsilon}{k} \quad (\text{cf. l'hypothèse de l'énoncé}). \\ & = \|df(\{t_i\})\| - \frac{\varepsilon}{k}. \end{aligned}$$

On a donc un nombre fini d'intervalles disjoints de $]a, b]$: certains $] \theta_{j-1}, \theta_j]$ et les $\{t_i\}$ (t_i point de discontinuité) tels que la

somme des normes de leurs df-mesures soit

$\geq v(b) - v(a) - \varepsilon - k \frac{\varepsilon}{K} = v(b) - v(a) - 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|df|(]a,b]) \geq v(b) - v(a) = dv(]a,b]) .$$

b) Définissons C_0 comme l'ensemble des intervalles $]a,b]$ considérés en a) union le singleton $\{a_0\}$. Pour $\{a_0\}$ on a

$$|df|(\{a_0\}) = \|df(\{a_0\})\| = \|f^+(a_0) - f(a_0)\| .$$

D'après Moreau ([14] prop. (2.b) et Scholie, page 7)

$$\|f^+(a_0) - f(a_0)\| = v^+(a_0) - v(a_0) ,$$

donc $|df|(\{a_0\}) = dv(\{a_0\})$. On a donc $\forall A \in C_0$, $|df|(A) \geq dv(A)$.

c) Compte tenu de a), b) et du 1) , $\forall A \in C_0$, $|df|(A) = dv(A)$. Cela implique que, si F et G sont des fonctions de répartition continues à droite sur $]a,b[$ (cf. [16] § 1D) de respectivement $|df|$ et dv , choisies de façon à coïncider en un point de continuité de v , elles coïncident en tout point de continuité de v et en b . Comme ces points sont denses, F et G sont égales sur $]a,b]$ et aussi en a (grâce au b) d'où $|df| = dv$.

3) D'après Moreau ([14] prop. (2.b) et Scholie p. 7) on a

$$v^+(t) - v(t) = \|f^+(t) - f(t)\|$$

et $v(t) - v^-(t) = \|f(t) - f^-(t)\|$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } dv(\{t\}) &= v^+(t) - v(t) + v(t) - v^-(t) \\ &= \|f^+(t) - f(t)\| + \|f(t) - f^-(t)\| \\ &> \|f^+(t) - f^-(t)\| \quad (\text{cf. lemme 10}) \\ &= \|df(\{t\})\| \\ &= |df|(\{t\}) . \end{aligned}$$

4) Si f est à sauts alignés on a $|df| = dv$ d'après 2). S'il existe un saut non aligné on a $|df| \neq dv$ d'après 3).

Remarque. La technique utilisée en 1) offre une possibilité d'établir l'existence de df (connaissant l'existence de dv !) en n'utilisant que les mesures "abstraites" : le passage de A à $\mathcal{B}(I)$ serait justifié par le théorème de Klivanek (Diestel-Uhl [5] p. 27) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREZIS, H. Opérateurs maximaux monotones. North Holland (1973).
- [2] CASTAING, C. et CLAUZURE, P. Semi-continuité des fonctionnelles intégrales. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1981, n° 15.
- [3] CASTAING, C. et VALADIER, M. Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes n° 580 Springer (1977).
- [4] DANIELL, P.J. Differentiation with respect to a function of limited variation. Trans. A.M.S. 19(1918) 353-362.
- [5] DIESTEL, J. et UHL, J.J. Vector measures. Am. Math. Soc. Math. Surveys n° 15 (1977).
- [6] DINCULEANU, N. Vector measures. Pergamon (1967).
- [7] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J.T. Linear operators, Part. I. Interscience (1964).
- [8] ELLIS, H.W. et JEFFERY, R.L. Derivatives and integrals with respect to a base function of generalized bounded variation. Canad. J. Math. 19(1967) 225-241.
- [9] HAUSDORFF, F. Set theory. Chelsea (1957) (traduction de la 3e édition de Mengenlehre, 1937).
- [10] JEFFERY, R.L. Non-absolutely convergent integrals with respect to functions of bounded variation. Trans. A.M.S. 34(1932)645-675.

- [11] LEBOURG, G. Valeur moyenne pour gradient généralisé. C.R. Acad. Sci. Paris 281 (1975) 795-797.
- [12] MOREAU, J.J. Semi-continuité du sous gradient d'une fonctionnelle, C.R. Acad. Sci. Paris 260 (1965) 1067-1070.
- [13] MOREAU, J.J. Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris (1967) (multigraphié 108 p.).
- [14] MOREAU, J.J. Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée. Séminaire d'An. Convexe, Montpellier, 1975, exposé n° 17.
- [15] MOREAU, J.J. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution. C.R. Acad. Sci. Paris 282 (1976) 837-840.
- [16] MOREAU, J.J. et VALADIER, M. Dérivée d'une mesure vectorielle sur un intervalle. Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1984, n° 1.
- [17] ROCKAFELLAR, R.T. Convex analysis. Princeton Univ. Press (1970).
- [18] RUDIN, W. Real and complex analysis. Mc Graw-Hill (1966).
- [19] VALADIER, M. Sous-différentiabilité de fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné. Math. Scandinavica 30-1 (1972) 65-74.
- [20] VOL'PERT, A.I. The space BV and quasilinear equations. Math. USSR-Sbornik 2-2(1965) 225-267 (traduit du russe).