



HAL
open science

Dérivation d'une mesure vectorielle sur un intervalle

Jean Jacques Moreau, Michel Valadier

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau, Michel Valadier. Dérivation d'une mesure vectorielle sur un intervalle. 1984.
hal-02309533

HAL Id: hal-02309533

<https://hal.science/hal-02309533>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier, 1984, Exposé n° 1

DERIVATION D'UNE MESURE VECTORIELLE
SUR UN INTERVALLE

J.J. MOREAU et M. VALADIER

§ 0. Introduction.

Le but de cet exposé est d'établir une extension d'un théorème de Jeffery ([7] théorème V p. 655, voir aussi le th XI p. 662 et pour un texte plus moderne Ellis-Jeffery [6]) à une mesure sur un intervalle réel à valeurs dans un Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym. Ce théorème sera utilisé dans un travail ultérieur.

Il est possible d'établir ce théorème en montrant que presque tout point est "point de Lebesgue" à gauche et à droite d'une fonction Bochner-intégrable, relativement à une mesure générale (pas forcément la mesure de Lebesgue). Dans le présent exposé on va déduire ce théorème du résultat classique suivant (ou plutôt de sa extension à une fonction vectorielle) : si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, $f'(t)$ existe Lebesgue p.p. et, si μ est la mesure admettant f pour fonction de répartition (autrement dit, μ est la mesure différentielle de f),

Reçu le 23 Février 1984

μ admet f' comme densité de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. La méthode va consister à "déployer" les fonctions de répartition afin de les transformer en fonctions lipschitziennes. La technique du déploiement, ramenant certains résultats concernant des mesures générales à des résultats sur la mesure de Lebesgue est due au premier auteur ([10]).

§ 1. Rappels sur les liens entre mesures et fonctions de répartition.

(A) Soit I un intervalle de \mathbb{R} , X un espace de Banach et $f : I \rightarrow X$. Pour tout $[a,b] \subset I$ on note $\text{var}(f ; a,b)$ la variation de f sur $[a,b]$.

On note $\mathcal{V}^b(I ; X)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : I \rightarrow X$ à variation localement bornée (au sens $\forall [a,b] \subset I, \text{var}(f ; a,b) < \infty$). En tout $t \in I$ distinct de l'extrémité (éventuelle) droite (resp. gauche) de I , la limite à droite (resp. gauche) de f existe, on la note $f^+(t)$ (resp. $f^-(t)$).

(B) On note $\mathcal{M}_b^b(I;X)$ l'espace vectoriel des fonctions d'ensembles définies sur les boréliens relativement compacts de I à valeurs dans X qui sont des mesures à variation localement bornée au sens suivant :

$\forall [a,b] \subset I, |m|([a,b]) < \infty$ (où $|m|([a,b])$ est la variation de m sur $[a,b]$ définie par

$$|m|([a,b]) = \sup_n \left\{ \sum \|m(A_n)\| \mid (A_n) \text{ partition de } [a,b] \text{ en boréliens} \right\}$$

(C) Dinculeanu ([4] §17) et Moreau ([11] prop.3.a p. 12, noter que Moreau réfère à la théorie de l'intégration selon Bourbaki) ont montré

qu'à $f \in \mathcal{V}^b(I; X)$ correspond $m \in \mathcal{M}^b(I; X)$ telle que $\forall [a, b] \subset I$, $m([a, b]) = f^+(b) - f^-(a)$ (avec les conventions : si I contient $a = \inf I$, $f^-(a) = f(a)$, si I contient $b = \sup I$, $f^+(b) = f(b)$).

On peut appeler m mesure de Stieltjes ou, comme Moreau ([11], [12]), mesure différentielle de f (notation df).

Ⓓ Inversement si $m \in \mathcal{M}^b(I; X)$ est donnée, si $a_0 \in \text{int}(I)$ est fixé et si on pose

$$f(t) = \begin{cases} m(]a_0, t]) & \text{si } t \geq a_0 \\ -m(]t, a_0]) & \text{si } t \leq a_0, t > \inf I \\ -m([t, a_0]) & \text{si } t = \inf I, \end{cases}$$

f appartient à $\mathcal{V}^b(I; X)^{(*)}$ et $m = df$. De plus f est continue à droite (en abrégé c.à.d) sur $\text{int}(I)$. Il y a correspondance biunivoque entre les $m \in \mathcal{M}^b(I; X)$ et les classes d'équivalence (pour la relation $f-g$ est constante) des fonctions $f \in \mathcal{V}^b(I; X)$ qui sont c.à.d. sur $\text{int}(I)$.

Remarques. 1) Si I contient son extrémité gauche $e = \inf I$, on a $m(\{e\}) = f^+(e) - f(e)$, donc pour que m puisse avoir une masse en e , il faut laisser à f la possibilité de ne pas être c.à.d. en e . Pour certains problèmes d'évolution Moreau [11] [14] a montré l'intérêt de la continuité à droite (y compris à l'instant initial).

2) Si I est ouvert, df est la dérivée au sens distributions de f (plus précisément de la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue).

Ⓔ A $f \in \mathcal{V}^b(I; X)$ on associe une fonction variation indéfinie en posant, après avoir fixé $a_0 \in I$,

(*) On dit que f est une fonction de répartition continue à droite dem.

$$v(t) = \begin{cases} \text{var}(f ; a_0, t) & \text{si } t \geq a_0 \\ -\text{var}(f ; t, a_0) & \text{si } t \leq a_0 \end{cases}$$

alors $|df| \leq dv$ (Moreau [11] p. 17), mais, si f est c.à.d. sur $\text{int}(I)$ on a

$$|df| = dv \text{ (Dinculeanu [4] § 17.2 remark 5 p. 362).}$$

§ 2. Rappels sur le déploiement.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , X un Banach, $f \in \mathcal{V}b(I; X)$.

Soit v une fonction variation indéfinie de f et $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $w(t) = t + v(t)$.

Alors il existe $F : w(I) \rightarrow X$, lipschitzienne de rapport ≤ 1 , telle que $f = F \circ w$. En fait $w(I)$ risque de ne pas être un intervalle : si f est discontinue en t , les trois valeurs $w^-(t)$, $w(t)$, $w^+(t)$ ne sont pas égales. Soit $J = \text{co}(w(I))$ le plus petit intervalle contenant $w(I)$. On prolonge F à J en interpolant de façon affine sur ceux des intervalles

$$[w^-(t), w(t)] \text{ et } [w(t), w^+(t)] \text{ qui sont non vides}$$

Si on complète le graphe de w en lui ajoutant les segments $\{t\} \times [w^-(t), w^+(t)]$, on obtient un graphe monotone maximal dans $I \times J$; son image par $(t, s) \mapsto (s, t)$ est le graphe d'une fonction lipschitzienne de rapport ≤ 1 :

$$p : J \rightarrow I$$

On a $p^{-1}([a, b]) = [w^-(a), w^+(b)]$ et

$$p^{-1}(]a, b]) =]w^+(a), w^+(b)].$$

Il en résulte que df est l'image de dF par p .

Précisons que l'image de dF par p , $dF \circ p^{-1}$, a un sens en tant que fonction d'ensemble définie sur les boréliens relativement compacts de I : si B est un tel borélien, $p^{-1}(B)$ est relativement compact dans J . Reste à montrer que df et $dF \circ p^{-1}$ admettent une même fonction de répartition. En effet on a, si $a_0 \in \text{int}(I)$,

$$\begin{aligned} \text{a) si } t \geq a_0, \quad df([a_0, t]) &= f^+(t) - f^+(a_0) \\ &= F(w^+(t)) - F(w^+(a_0)) \\ &= dF(p^{-1}([a_0, t])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) si } t \leq a_0 \text{ et } t > \inf I, \\ df(]t, a_0]) &= f^+(a_0) - f^+(t) \\ &= F(w^+(a_0)) - F(w^+(t)) \\ &= dF(p^{-1}(]t, a_0])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) si } t = \inf I, \\ df([t, a_0]) &= dF(p^{-1}([t, a_0])). \end{aligned}$$

§ 3. Dérivation par rapport à la mesure de Lebesgue.

Lemme 1. - Soit I un intervalle, X un Banach, $f : I \rightarrow X$ localement absolument continue (au sens $\forall [a, b] \subset I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie de sous-intervalles disjoints $]a_i, b_i[$ ($i = 1, \dots, n$) de $[a, b]$ l'inégalité $\sum (b_i - a_i) \leq \delta$ entraîne $\sum_{i=1}^n \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \epsilon$). Alors $f \in v\mathcal{L}_b(I; X)$ et sa variation indéfinie v est localement absolument continue.

Par conséquent $|df| = dv \ll dt$.

Preuve. 1) Montrons $f \in v\mathcal{L}b(I;X)$. Soit $[a,b] \subset I$ et δ associé à $[a,b]$ et $\epsilon = 1$ (cf. la parenthèse de l'énoncé). Soit k le plus petit entier $\geq \frac{b-a}{\delta}$. Etant donné une subdivision quelconque de $[a,b]$ on peut lui rajouter ceux des points $a + \delta, a + 2\delta, \dots, a + (k-1)\delta$ qu'elle ne contient pas déjà, de façon à obtenir une subdivision plus fine. Notons la nouvelle subdivision (t_0, \dots, t_n) et

$$t_{i_0} = t_0 = a, t_{i_1} = a + \delta, \dots, t_{i_{k-1}} = a + (k-1)\delta, t_{i_k} = t_n = b$$

Les intervalles $[t_{i_{l-1}}, t_{i_l}]$ étant de longueurs $\leq \delta$

$$\text{on a } \sum_{j=i_{l-1}+1}^{i_l} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq \epsilon = 1$$

$$\text{et } \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \leq k. \quad \text{D'où } v(f; a, b) \leq k.$$

2) Montrons que v est absolument continue. Soit $[a, b] \subset I$, $\epsilon > 0$ et un $\delta > 0$ qui leur corresponde. Soit des $]a_i, b_i[$ disjoints contenus dans $[a, b]$ tels que $\sum (b_i - a_i) \leq \delta$. Alors $v(b_i) - v(a_i)$ est le sup des

$$\sum_j \|f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})\|$$

où $(\tau_i^0, \dots, \tau_i^{n_i})$ parcourt l'ensemble des subdivisions de $[a_i, b_i]$.

Or, si on prend une subdivision de chacun des $[a_i, b_i]$, les $]\tau_i^j, \tau_i^{j-1}[$ sont des intervalles disjoints dont la somme des longueurs est $\leq \delta$.

Par conséquent

$$\sum_i \sum_j \|f(\tau_i^j) - f(\tau_i^{j-1})\| \leq \epsilon$$

et, en passant à la borne supérieure,

$$\sum_i (v(b_i) - v(a_i)) \leq \epsilon.$$

3) Comme f est continue, on a $|df| = dv$ (§1 E).

On sait (Dunford-Schwartz [5] dernier alinéa de la page 337 ou Rudin [15] th. 8. 16) que l'absolue continuité de v implique $dv \ll dt$.

Proposition 2. - Soit X un Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym, $f : I \rightarrow X$ localement absolument continue. Alors f est Lebesgue, presque partout dérivable et, si on note $\frac{df}{dt}$ une densité de Radon-Nikodym de df par rapport à la mesure de Lebesgue, on a, Lebesgue presque partout,

$$\frac{df}{dt}(t) = f'(t).$$

Commentaire. La proposition est classique pour $X = \mathbb{R}$ (d'où $X = \mathbb{R}^d$). Le cas X Banach réflexif semble avoir été traité pour la première fois par Komura ([8] appendice), puis par Brezis ([1] Prop. A.3 p. 145). Voir aussi Diestel Uhl [3] ch IV § 3 p. 107 et p. 217 (5).

Preuve. 1) Par définition de la propriété de Radon-Nikodym (Diestel-Uhl [3]), comme df est à variation localement bornée et qu'elle est absolument continue par rapport à dt , elle a une densité $\frac{df}{dt}$ (qui appartient à $\mathcal{L}_{loc}^1(I, dt; X)$).

2) D'après Dunford-Schwartz ([5] th. 8 p. 217), Lebesgue presque tout point t_0 de I est point de Lebesgue de $\frac{df}{dt}$ au sens suivant :

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{\substack{C \ni t_0 \\ dt(C) \rightarrow 0}} \frac{1}{dt(C)} \int_C \frac{df}{dt}(t) dt$$

(C désignant un intervalle fermé de longueur > 0).

En particulier

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t_0) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{1}{\epsilon} \int_{[t_0, t_0 + \epsilon]} \frac{df}{dt}(t) dt \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{1}{\epsilon} df([t_0, t_0 + \epsilon]) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{f(t_0 + \epsilon) - f(t_0)}{\epsilon} . \end{aligned}$$

On a la même chose à gauche d'où, en un tel point t_0 , l'existence de $f'(t_0)$ et $\frac{df}{dt}(t_0) = f'(t_0)$.

§ 4. Le théorème de Jeffery généralisé.

Théorème 3. - Soit I un intervalle, X un Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym, μ une mesure réelle positive sur I finie sur les compacts ou "de Radon", ν une mesure appartenant à $\mathcal{M}^{db}(I; X)$ absolument continue par rapport à μ . Alors la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\nu}{d\mu}$ vérifie μ presque partout

$$\frac{d\nu}{d\mu}(t) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{\nu([t, t + \epsilon])}{\mu([t, t + \epsilon])} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{\nu([t - \epsilon, t])}{\mu([t - \epsilon, t])}$$

(avec les conventions $\frac{0}{0} = 0$, $\mu([t, t + \epsilon]) = \mu([t, t + \epsilon] \cap I)$ etc ...).

Remarque. Si μ est la mesure de Lebesgue, on est ramené à la proposition 2. En effet, si f est une fonction de répartition continue de ν , f est absolument continue et

$$\begin{aligned} \nu([t, t + \epsilon]) &= df([t, t + \epsilon]) \\ &= f(t + \epsilon) - f(t) , \end{aligned}$$

ce qui fait que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v([t, t+\epsilon])}{\mu([t, t+\epsilon])}$, si elle existe, est la dérivée à droite de f en t .

Commentaire. Pour v réelle le résultat est dû à Jeffery [7]. Les deux expressions ci-dessus de $\frac{dv}{d\mu}(t)$ sont "unilatérales", ce qui est essentiel pour le travail ultérieur à paraître dans ce volume. La version préliminaire de Daniell [2], où la formule est

$$\frac{dv}{d\mu}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v([t-\epsilon, t+\epsilon])}{\mu([t-\epsilon, t+\epsilon])},$$

ne nous suffirait pas.

Preuve. 1) Soit $I_a = \{t \mid \mu(\{t\}) > 0\}$.

$$\text{Si } t \in I_a, \text{ on a } \frac{dv}{d\mu}(t) = \frac{v(\{t\})}{\mu(\{t\})}.$$

$$\text{Comme } 0 \neq \mu(\{t\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu([t, t+\epsilon])$$

$$\text{et } v(\{t\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v([t, t+\epsilon]),$$

$$\text{on a } \frac{dv}{d\mu}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v([t, t+\epsilon])}{\mu([t, t+\epsilon])}$$

2) Reste à montrer la formule sur $I_c = I - I_a$.

Pour éviter des difficultés de pure forme, on va supposer I compact. Cela ne perd pas en généralité car un I quelconque est la réunion d'une suite croissante d'intervalles compacts. L'avantage est que v est définie sur $\mathcal{B}(I)$ (tribu borélienne de I).

Soit f et g des fonctions de répartition de μ et ν respectivement, continues à droite sur $\text{int}(I)$ (cette hypothèse évite que g présente un saut quand f n'en présente pas).

Soit v une fonction variation indéfinie de $t \mapsto (f(t), g(t))$ (on prendra sur $\mathbb{R} \times X$ une norme usuelle) et, comme dans le § 2, $w(t) = t + v(t)$, $J = \alpha(w(I))$. Il existe $(F, G) : J \rightarrow \mathbb{R} \times X$ lipschitzienne de rapport ≤ 1 (donc F et G le sont aussi) telle que $(f, g) = (F, G) \circ w$.

a) Notons $H = \bigcup_{t \in I} \{t\} \times [w^-(t), w^+(t)]$, c'est le graphe de w complété par les segments verticaux ad hoc. Si on retire à H les segments $\{t\} \times [w^-(t), w^+(t)]$ pour $t \in I_a$, il reste le graphe G d'une bijection entre les deux projections de G . La projection sur I est I_c . Notons J_c la projection sur J . On a $J_c = w(I_c) = I - p^{-1}(I_a) = p^{-1}(I_c)$.

La bijection est
$$\left| \begin{array}{l} t \mapsto w(t) \\ I_c \rightarrow J_c \end{array} \right.$$

et son inverse est
$$\left| \begin{array}{l} s \mapsto p(s) \\ J_c \rightarrow I_c \end{array} \right.$$

Observons que tout point $t \in I$ de discontinuité de w est point de discontinuité de (f, g) , donc forcément de f , donc appartient à I_a . Par conséquent

$$\left| \begin{array}{l} t \mapsto w(t) \\ I_c \rightarrow J_c \end{array} \right.$$

est continue. Et l'application inverse est continue car p est lipschitzienne sur J entier. Ainsi la bijection entre I_c et J_c est un isomorphisme d'espaces topologiques et aussi d'ensembles ordonnés (remarquer que I_c risque de ne pas être localement compact).

b) Soit μ_c (resp. ν_c) la mesure induite par μ (resp. ν) sur I_c . Alors pour tout B borélien de I_c on a

$$v_c(B) = v(B) = \int_B \frac{dv}{d\mu} d\mu = \int_B \frac{dv}{d\mu_c} d\mu_c,$$

d'où $v_c \ll \mu_c$ et $\frac{dv_c}{d\mu_c} = \frac{dv}{d\mu} \Big|_{I_c}$.

c) Montrons $dG \ll dF$. Notons dF_c (resp. dG_c) la mesure induite par dF (resp. dG) sur J_c . Vérifions que μ_c et dF_c se correspondent dans l'isomorphisme de I_c et J_c (il en va de même pour v_c et dG_c). Si $B \in \mathcal{B}(I_c)$ on a $\mu_c(B) = \mu(B) = dF(p^{-1}(B)) = dF_c(p^{-1}(B))$ or $p^{-1}(B)$ correspond à B .

Par isomorphisme $v_c \ll \mu_c$ implique $dG_c \ll dF_c$. Reste à montrer l'absolue continuité des mesures induites sur $J - J_c$. Or $J - J_c$ est formé des $p^{-1}(t) = [w^-(t), w^+(t)]$, t parcourant I_a . Or sur un tel intervalle G et F sont affines (car $w(t) = w^+(t)$, f et g étant c.à.d.) et F n'est pas constante puisque $F(w^+(t)) - F(w^-(t)) = df(\{t\}) = \mu(\{t\}) > 0$.

d) Montrons que $\frac{dG}{dF}(s) = \frac{G'(s)}{F'(s)} dF - p.p.$

La dérivée de F , $F'(s)$ existe sauf sur un borélien N_1 ds-négligeable donc dF -négligeable. On peut aussi supposer que $G'(s)$ existe sur $J - N_1$. Comme F est croissante, $F'(s)$ est ≥ 0 . L'ensemble $\{s \in J - N_1 \mid F'(s) = 0\}$ qui est dF -négligeable est contenu dans un borélien dF -négligeable N_2 . Alors $N = N_1 \cup N_2$ est un borélien dF -négligeable en dehors duquel $F'(s)$ existe et est > 0 et $G'(s)$ existe.

Si $B \in \mathcal{B}(J)$ on a

$$\begin{aligned}
 dG(B) &= dG(B \cap N^c) \\
 &= \int_{B \cap N^c} \frac{dG}{ds}(s) ds \\
 &= \int_{B \cap N^c} G'(s) ds \\
 &= \int_{B \cap N^c} \frac{G'(s)}{F'(s)} F'(s) ds
 \end{aligned}$$

(observons que $\frac{G'}{F'} \in \mathfrak{L}^1(J, F'(s) ds ; X)$)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{B \cap N^c} \frac{G'}{F'} dF \\
 &= \int_B \frac{G'}{F'} \chi_{N^c} dF
 \end{aligned}$$

e) On suppose maintenant que $\frac{dG}{dF}$ est choisie telle que $\frac{dG}{dF}(s) = \frac{G'(s)}{F'(s)}$ sur $J-N$. Comme $N \cap J_c$ est dF -négligeable,

$N_3 = p(N \cap J_c)$ est μ_c -négligeable, donc μ -négligeable.

Pour $t \in I_c - N_3$, on a, $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{v([t, t+\epsilon])}{\mu([t, t+\epsilon])} &= \frac{dG([w(t), w^+(t+\epsilon)])}{dF([w(t), w^+(t+\epsilon)])} \\
 &= \frac{G(w^+(t+\epsilon)) - G(w(t))}{F(w^+(t+\epsilon)) - F(w(t))}.
 \end{aligned}$$

Comme w est continue en t et comme $w(t) \notin N$, cela converge, quand $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon > 0$, vers

$$\frac{G'(w(t))}{F'(w(t))} \text{ qui est égal à } \frac{dG}{dF}(w(t)), \text{ donc à } \frac{dG_c}{dF_c}(w(t)) \text{ (cf. b)}$$

qui est valable sur J comme sur I) qui, par l'isomorphisme entre I_c et J_c , est égal à $\frac{dv}{d\mu_c}(t)$ donc (cf. b) égal à $\frac{d\mu}{dv}(t)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREZIS, H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland (1973).
- [2] DANIELL, P.J. Differentiation with respect to a function of limited variation. Trans. A.M.S. 19 (1918) 353-362.
- [3] DIESTEL, J. et UHL, J.J. Vector measures. Am. Math. Soc. Math. Surveys n° 15 (1977).
- [4] DINCULEANU, N. Vector measures. Pergamon (1967).
- [5] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J.T. Linear operators. Part I. Interscience (1964).
- [6] ELLIS, H.W. et JEFFERY, R.L. Derivatives and integrals with respect to a base function of generalized bounded variation. Canad. J. Math. 19 (1967) 225-241.
- [7] JEFFERY, R.L. Non-absolutely convergent integrals with respect to function of bounded variation. Trans. A.M.S. 34 (1932) 645-675.
- [8] KOMURA, Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space. J. of Math. Soc. of Japan. 19 (1967) 493-507.
- [9] MOREAU, J.J. Multiapplications à rétraction finie. Annali Sc. N. Sup. Pisa ser. IV-1 (1974) 169-203.
- [10] MOREAU, J.J. Factorisation d'un processus de rafle discontinu. Séminaire d'An. Convexe, Montpellier, 1974 exposé n° 15.
- [11] MOREAU, J.J. Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée. Séminaire d'An. Convexe, Montpellier, 1975, exposé n° 17.
- [12] MOREAU, J.J. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution. C.R. Acad. Sci. Paris 282 (1976) 837-840.

- [13] MOREAU, J.J. Solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles. Séminaire d'An. Convexe, Montpellier 1976 exposé n° 1.
- [14] MOREAU, J.J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. J. Diff. Eq. 26 (1977) 347-374.
- [15] RUDIN, W. Real and complex analysis. Mc. Graw-Hill (1966).