



**HAL**  
open science

# Isotropie et convexité dans l'espace des tenseurs symétriques

M. D. P. M. Marques, Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

M. D. P. M. Marques, Jean Jacques Moreau. Isotropie et convexité dans l'espace des tenseurs symétriques. 1982. hal-02309532

**HAL Id: hal-02309532**

**<https://hal.science/hal-02309532>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1982, Exposé n° 6

ISOTROPIE ET CONVEXITE  
DANS L'ESPACE DES TENSEURS SYMETRIQUES

M.D.P.M. MARQUES et J.J. MOREAU

0. INTRODUCTION.

Soit  $X$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , identifié à son dual. On note  $\mathcal{L}_S(X)$  ou, simplement,  $\mathcal{L}_S$  l'espace vectoriel des applications linéaires autoadjointes (on dit aussi symétriques) de  $X$  dans  $X$  et  $\mathcal{L}_S^+(X)$  ou simplement  $\mathcal{L}_S^+$  le cône convexe fermé de  $\mathcal{L}_S$  formé par les applications linéaires autoadjointes semi-définies positives. Dans [1], théor. 5.1.(i) p. 363, J.M. Ball prouve le résultat suivant : si  $\psi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction symétrique, la fonction  $g$  définie sur  $\mathcal{L}_S^+(X)$  par  $g(V) = \psi(v_1, \dots, v_n)$ , où les  $v_i \geq 0$  sont les valeurs propres de  $V$ , est convexe si et seulement si  $\psi$  est convexe.

Nous observons d'abord que la positivité, qui est cruciale dans les démonstrations de Ball, peut être évacuée du résultat :

THEOREME 1. Soit  $\varphi$  une fonction symétrique sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs

Reçu le 20 avril 1982

dans  $\mathbb{R}$  (ou plus généralement dans  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ) et posons  
 $f(S) = \varphi(s_1, \dots, s_n)$ , où les  $s_i$  sont les valeurs propres de  $S \in \mathcal{L}_S(X)$ .  
 Alors  $f : \mathcal{L}_S(X) \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $\overline{\mathbb{R}}$ ) est convexe si (et seulement si)  $\varphi$   
 est convexe.

En effet, étant donnés  $S, T \in \mathcal{L}_S$  on peut prendre  $k \in \mathbb{R}$  assez grand pour que  $S+kI$  et  $T+kI$  soient dans  $\mathcal{L}_S^+$  ( $I$  désigne l'application identique de  $X$ ) ; d'après le résultat de Ball, la fonction  $\psi(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} \varphi(x_1-k, \dots, x_n-k)$  (qui est convexe et symétrique puisque  $\varphi$  l'est par hypothèse) définit une fonction convexe  $g : \mathcal{L}_S^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et il vient pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$

$$f(\lambda S + (1-\lambda)T) = g(\lambda(S+kI) + (1-\lambda)(T+kI)) \leq \\ \leq \lambda g(S+kI) + (1-\lambda)g(T+kI) = \lambda f(S) + (1-\lambda)f(T), \quad \square$$

L'application principale de ce théorème concerne la théorie de la plasticité :  $S$  est alors un tenseur de contraintes et ses valeurs propres ne sont pas en général positives.

Le propos de ce rapport est double : d'une part (§ 1), prouver ce théorème sans faire appel à la positivité des valeurs propres (essentielle dans la méthode de J.M. Ball) ; d'autre part (§ 2), exhiber une preuve aussi simple que possible pour la dimension  $n = 3$ , ce cas particulier étant de loin le plus important dans la pratique.

On va reformuler d'abord le théorème 1 dans un autre langage. On fixe une base orthonormée  $(b_i)$  dans  $X$  et on note  $\mathfrak{B}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}_S(X)$  identifiable à  $\mathbb{R}^n$  constitué par les  $S \in \mathcal{L}_S$  représentés sur  $(b_i)$  par une matrice diagonale (i.e.  $S \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow$  les  $b_i$

sont des vecteurs propres de  $S$ ). Si  $S \in \mathcal{L}_S$  et  $R \in \mathcal{O}(X)$  (groupe orthogonal de  $X$ ;  $R^* = R^{-1}$ ) l'élément  $R(S) = R^{-1}SR$  est dans  $\mathcal{L}_S$ ; ainsi  $\mathcal{O}$  opère dans  $\mathcal{L}_S$ . On appelle orbite de  $S$  l'ensemble, noté  $\mathcal{O}(S)$ , des  $R^{-1}SR$  pour  $R \in \mathcal{O}$ . C'est aussi bien  $\mathcal{O}^+(S)$  ( $\mathcal{O}^+$  groupe orthogonal positif de  $X$ ), car tout produit d'un élément de  $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^+$  par une réflexion appartient à  $\mathcal{O}^+$  et il existe visiblement des réflexions laissant  $S$  invariant. On montre facilement que l'orbite de  $S \in \mathcal{L}_S$  est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{L}_S$  ayant les mêmes valeurs propres que  $S$  avec les mêmes ordres de multiplicité respectifs. En particulier,  $B \in \mathcal{O}(S) \cap \mathcal{B}$  ssi sa matrice par rapport à  $(b_i)$  se réduit à une diagonale constituée de ces valeurs propres avec les multiplicités requises. On dit d'une fonction  $f : \mathcal{L}_S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  qu'elle est isotrope si elle est constante sur chaque orbite (i.e. si elle ne dépend que des valeurs propres). Il est clair que le théorème 1 équivaut à :

**THEOREME 2.** Soit  $f : \mathcal{L}_S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction isotrope ; alors  $f$  est convexe sur  $\mathcal{L}_S$  si (et seulement si, bien sûr) sa restriction à  $\mathcal{B}$  est convexe.

**COROLLAIRE .** Soit  $\mathcal{K}$  une partie isotrope de  $\mathcal{L}_S$ , i.e. une réunion d'orbites. Alors  $\mathcal{K}$  est convexe si et seulement si  $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}$  est convexe.

Autrement dit, l'ensemble des  $S \in \mathcal{L}_S$  dont les valeurs propres appartiennent à un convexe symétrique de  $\mathbb{R}^n$  donné est une partie convexe de  $\mathcal{L}_S$ .

## 1. PREUVE DU THEOREME 2.

Deux lemmes seront nécessaires. Sur  $\mathcal{L}_S$  on considère le produit scalaire euclidien  $S : T = \text{tr } ST$ .

LEMME 1. Pour tout élément  $B$  de  $\mathfrak{B}$ , la restriction de la forme linéaire  $T \rightarrow B : T$  à une orbite  $\mathcal{O}(S)$  atteint son sup en un point appartenant à  $\mathfrak{B}$ .

PREUVE. L'orbite étant compacte, la restriction en question, soit  $b$ , atteint son sup en un point au moins, soit  $T_0 \in \mathcal{O}(S)$ . On sait (cf. J.J. Moreau [2], p. 12.44, th. 1) que  $\mathcal{O}(S) = \mathcal{O}_+(S)$  est une sous-variété de  $\mathcal{L}_S$  et que l'espace tangent à cette sous-variété au point  $T_0$  est l'orthogonal du commutant de  $T_0$ . L'application linéaire tangente à  $b$  au point  $T_0$  est nulle ; or c'est la restriction à l'espace tangent de la forme linéaire  $dT \rightarrow B : dT$ . Bref on a  $dT \in (\text{com } T_0)^\perp \Rightarrow B : dT = 0$  ; donc  $B \in \text{com } T_0$ .

Cela terminerait la démonstration dans le cas où  $B$  a toutes ses valeurs propres distinctes ; dans le cas général, on observe que, puisque  $B$  et  $T_0$  commutent, il existe une base  $(b'_i)$  de  $X$  les diagonalisant tous les deux ; il existe par ailleurs  $R \in \mathcal{O}$  tel que  $R(B) = B$  et transformant  $(b_i)$  et  $(b'_i)$  l'une dans l'autre. Alors  $T_1 = R(T_0) \in \mathfrak{B}$  et  $B : T_1 = R(B) : R(T_0) = B : T_0 = \text{sup } b$   $\square$

LEMME 2. Pour tout  $T \in \mathcal{L}_S$  la projection orthogonale de  $T$  sur  $\mathfrak{B}$  appartient à l'enveloppe convexe de  $\mathfrak{B} \cap \mathcal{O}(T)$ .

PREUVE. En effet  $B \cap \mathcal{O}(T)$  est un ensemble fini ; par ailleurs toute forme linéaire sur  $\mathfrak{B}$  peut s'écrire  $A \mapsto B : A$  avec  $B \in \mathfrak{B}$ . Donc

si  $H = \text{proj}_{\mathcal{B}} T$  n'appartenait pas à  $\text{co}(\mathcal{B} \cap \mathcal{O}(T))$  il existerait  $B \in \mathcal{B}$  tel que

$$\forall A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(T) \quad B : A < B : H = B : T$$

ce qui contredit le lemme 1. □

Soit alors  $f : \mathcal{L}_S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction isotrope et  $S = \alpha T + \alpha' T'$  une combinaison convexe de  $T$  et  $T' \in \mathcal{L}_S$ . Il existe  $R \in \mathcal{O}$  tel que  $S_1 = R(S) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(S)$ ; on pose  $T_1 = R(T), T'_1 = R(T')$ . Alors  $S_1 = \alpha T_1 + \alpha' T'_1 = \alpha A + \alpha' A'$ , où  $A$  et  $A'$  sont les projections orthogonales de  $T_1$  et  $T'_1$  sur  $\mathcal{B}$ . D'après le lemme 2,  $A = \sum \beta_i A_i$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\sum \beta_i = 1$ ,  $A_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(T)$  et de même pour  $A'$ . Si la restriction de  $f$  à  $\mathcal{B}$  est convexe, on a  $f(A) \leq \sum \beta_i f(A_i) = f(T)$  et de même  $f(A') \leq f(T')$ , d'où  $f(S) = f(S_1) \leq \alpha f(A) + \alpha' f(A') \leq \alpha f(T) + \alpha' f(T')$  ce qui prouve la convexité de  $f$  et donc le théorème 2. □

Le corollaire s'obtient en posant

$$f(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } S \in \mathcal{K} \\ +\infty & , \text{ sinon} \end{cases}$$

La méthode utilisée fournit en outre le résultat géométrique suivant :

PROPOSITION. Soit  $\mathcal{E}$  l'enveloppe convexe de l'orbite de  $S$ ; alors

$$\text{proj}_{\mathcal{B}} \mathcal{E} = \mathcal{E} \cap \mathcal{B} = \text{co}(\mathcal{O}(S) \cap \mathcal{B}) .$$

PREUVE. Il est clair que  $\text{co}(\mathcal{O}(S) \cap \mathcal{B}) \subset \mathcal{E} \cap \mathcal{B} \subset \text{proj}_{\mathcal{B}} \mathcal{E}$ . La projection orthogonale sur  $\mathcal{B}$  étant une opération linéaire, on a

$$\text{proj } \mathcal{C} = \text{proj co } \mathcal{C}(S) \subset \text{co}(\text{proj } \mathcal{C}(S)) \subset \text{co co}(\mathcal{C}(S) \cap \mathcal{B}) = \text{co}(\mathcal{C}(S) \cap \mathcal{B})$$

puisque d'après le lemme 2, si  $T \in \mathcal{C}(S)$  alors

$$\text{proj } T \in \text{co}(\mathcal{C}(T) \cap \mathcal{B}) = \text{co}(\mathcal{C}(S) \cap \mathcal{B}) \quad . \quad \square$$

## 2. UNE METHODE SPECIALE AU CAS $n = 3$ .

On considère ici  $X = \mathbb{R}^3$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction convexe et symétrique :  $\varphi(P\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ ,  $\forall P \in \mathcal{P}_3$  (permutation de  $\mathbb{R}^3$ ).

Prouver que la fonction  $f(S)$ , obtenue en appliquant  $\varphi$  aux valeurs propres de  $S \in \mathcal{L}_S$ , est convexe sur  $\mathcal{L}_S(\mathbb{R}^3)$ . Prenons  $S, T \in \mathcal{L}_S$  et  $U = \lambda S + (1-\lambda)T$  avec  $0 < \lambda < 1$ . Pour fixer les idées, on notera  $\vec{s}, \vec{t}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$  les vecteurs de composantes  $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ,  $t_1 \geq t_2 \geq t_3$  et  $u_1, u_2, u_3$  où les  $s_i, t_i$  et  $u_i$  sont les valeurs propres de  $S, T$  et  $U$  resp. ; on pose  $\vec{c} = \lambda \vec{s} + (1-\lambda)\vec{t}$ .

Il suffit d'établir que  $\vec{u} \in A = \text{co} \{P \vec{c} \mid P \in \mathcal{P}_3\}$ ; il s'en-suivra que :

$$f(U) = \varphi(\vec{u}) \leq \sum \lambda_i \varphi(P_i \vec{c}) = \varphi(\vec{c}) \leq$$

$$\leq \lambda \varphi(\vec{s}) + (1-\lambda) \varphi(\vec{t}) = \lambda f(S) + (1-\lambda) f(T)$$

On remarque d'abord que  $\text{tr } U = \lambda \text{tr } S + (1-\lambda) \text{tr } T = \sum_{i=1}^3 \lambda s_i + (1-\lambda) t_i$   
i.e.

$$(*) \quad u_1 + u_2 + u_3 = c_1 + c_2 + c_3 .$$

En outre, la fonction  $M(S) = \max s_i = \sup_{\|\vec{x}\|=1} S \vec{x} \cdot \vec{x}$  est

convexe sur  $\mathcal{L}_S$  et  $m(S) = \min s_i = -M(-S)$  est concave, d'où en particulier

$$M(U) \leq \lambda M(S) + (1-\lambda)M(T) = \lambda s_1 + (1-\lambda)t_1 = c_1$$

et

$$m(U) \geq \lambda m(S) + (1-\lambda)m(T) = \lambda s_3 + (1-\lambda)t_3 = c_3 .$$

Autrement dit,  $\vec{u}$  appartient au cube  $C = [c_3, c_1]^3$ . Or l'intersection  $B$  de ce cube avec le plan d'équation (\*) n'est rien d'autre que l'ensemble  $A$  défini plus haut (un hexagone, un triangle ou un point selon les cas). En effet, tout point extrémal  $\vec{x}$  de  $B$  se trouvant sur une arête de  $C$ , trois cas peuvent se présenter :

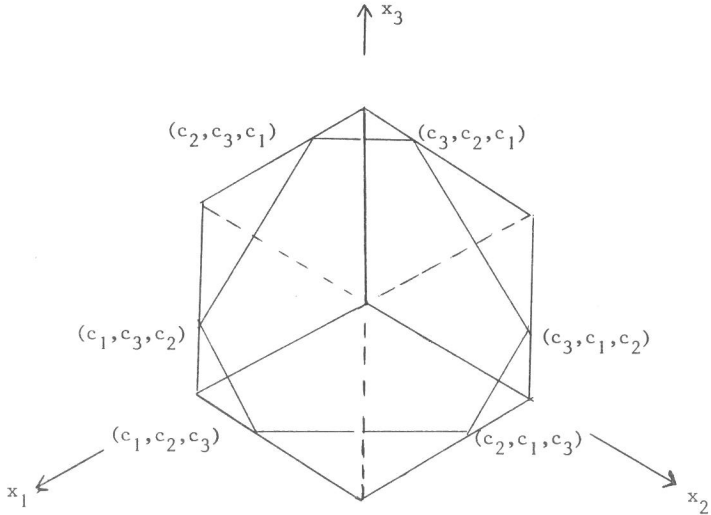
1)  $x_p = c_1$ ,  $x_q = c_3$ ,    2)  $x_p = x_q = c_1$     ou    3)  $x_p = x_q = c_3$   
où  $\{p, q, r\}$  est une certaine permutation de  $\{1, 2, 3\}$ . Dans le

premier cas, il vient  $x_r = c_1 + c_2 + c_3 - (x_p + x_q) = c_2$  ; dans le deuxième, on a  $x_r = c_3$  (sinon  $\Sigma c_i = 2c_1 + x_r > 2c_1 + c_3 \geq \Sigma c_i$ ) et donc  $c_2 = c_1$  ; de même, dans le troisième cas  $x_r = c_1$ ,  $c_2 = c_3$ . Dans tous les cas,  $\vec{x}$  est donc une permutation de  $\vec{c}$ , i.e.  $\vec{x}$  est un sommet de  $A$ .

Un raisonnement semblable, plus simple s'applique au cas  $n = 2$ .     $\square$

On peut visualiser la situation par un dessin montrant le cube  $C$  vu de l'infini dans la direction  $(1, 1, 1)$ . Le commentaire





suisant donne à ce dessin une valeur de démonstration :

Le groupe  $\mathcal{P}_3$  des permutations de  $\mathbb{R}^3$  laisse invariante la forme linéaire

$$L(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

Le cube  $C$  est stable par  $\mathcal{P}_3$  ; on peut classer ses huit sommets par les valeurs qu'ils donnent à  $L$  :

- 1° Le sommet maximal  $(c_1, c_1, c_1)$  donne  $L = 3c_1$  .
- 2° Le sommet minimal  $(c_3, c_3, c_3)$  donne  $L = 3c_3$  .
- 3° Les trois sommets "sous maximaux", i.e.  $(c_1, c_1, c_3)$  et deux autres, donnent  $L = 2c_1 + c_3$  .
- 4° Les trois sommets "sus-minimaux", i.e.  $(c_1, c_3, c_3)$  et deux autres, donnent  $L = c_1 + 2c_3$  .

Le plan  $P = \{x : L(x) = c_1 + c_2 + c_3\}$  rencontre les six arêtes du cube joignant des sommets sous-maximaux à des sommets sus-minimaux.

Comme ces six arêtes se déduisent de l'une d'entre elles par les transformations de  $\mathcal{P}_3$ , les intersections en question constituent une orbite de  $\mathcal{P}_3$ . L'intersection du plan  $P$  avec le cube est le polygone convexe ayant ces six points pour sommets (cet hexagone devient un triangle si  $c_2 = c_1$  ou  $c_2 = c_3$  et se réduit à un point pour  $c_1 = c_2 = c_3$ ).

## REFERENCES

- [1] J.M. BALL "Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 63(1976-77) p. 337-403.
- [2] J.J. MOREAU "Lois d'élasticité en grande déformation", Sémin. d'An. Convexe, Montpellier, 1979, exposé n° 12 .