



HAL
open science

Cinématique de variétés C^1 et transport de mesures scalaires

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Cinématique de variétés C^1 et transport de mesures scalaires. 1982. hal-02309531

HAL Id: hal-02309531

<https://hal.science/hal-02309531>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1982, Exposé n° 4

CINEMATIQUE DE VARIETES C^1 ET TRANSPORT
DE MESURES SCALAIRES

J.J. MOREAU

1. INTRODUCTION

La propriété suivante de l'opérateur divergence d'un champ vectoriel est, plus ou moins directement, à l'origine du terme : Supposons que le champ vectoriel \vec{u} , dépendant éventuellement du temps et suffisamment régulier, soit le champ de vitesses d'un milieu continu Λ en mouvement dans l'espace euclidien affine \mathcal{L} , usuellement de dimension 3. Soit Δ une portion de Λ et soit D^t la portion de \mathcal{L} occupée par Δ à l'instant t . Si cette portion est assez régulière pour que soit défini

$$\text{Vol } D^t = \int_D dx$$

(dx : mesure de Lebesgue dans \mathcal{L}), ledit volume est fonction dérivable

de t et

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \text{vol } D^t = \int_D \text{div } \vec{u} \, dx.$$

Plus généralement, soit φ une fonction réelle définie sur Λ indépendamment du temps et soit f^t son image dans \mathcal{I} à chaque instant t : on dit que f^t , fonction ainsi construite sur une partie de \mathcal{I} dépendant a priori de t , est convectée par le milieu continu. Alors, si tout est assez régulier, (1.1) se généralise en

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt} \int_D f^t \, dx = \int_D f^t \text{div } \vec{u} \, dx.$$

De façon équivalente, appelons $d\xi^t$ la mesure induite sur le milieu Λ à l'instant t par la mesure de Lebesgue de \mathcal{I} (on précisera ce concept au § 4) ce qui veut dire que

$$\int_D f^t \, dx = \int_\Lambda \varphi \, d\xi^t.$$

Une formulation de (1.2) consiste à énoncer que l'application $t \rightarrow d\xi^t$ de l'intervalle de temps considéré dans l'espace des mesures scalaires sur Λ est, pour une topologie convenable, dérivable, et que l'élément dérivé est la mesure induite sur Λ par la mesure $\text{div } \vec{u} \, dx$. On observe par ailleurs que cette dernière mesure constitue la divergence, au sens des distributions, de la mesure vectorielle $\vec{u} \, dx$.

La motivation première du présent rapport est de faire voir que ce résultat n'est nullement lié à la mesure de Lebesgue, mais qu'il s'étend à toute mesure indépendante du temps dans \mathcal{I} . Les démonstrations classiques de (1.1), basées sur la dérivation d'un déterminant jacobien ou sur des formules de flux, dissimulent donc la nature intime du résultat qui consiste simplement en ceci : pour des dualités naturelles, l'application linéaire $f \rightarrow \text{grad } f$ (f : fonction réelle, $\text{grad } f$: champ de

covecteurs) et l'application linéaire $\vec{d}v \rightarrow -\operatorname{div} \vec{d}v$ ($\vec{d}v$: mesure vectorielle, $-\operatorname{div} \vec{d}v$: distribution scalaire d'ordre ≤ 1 , éventuellement une mesure) sont transposées l'une de l'autre.

La relation (1.1) est classiquement utilisée en mécanique des milieux continus pour établir l'équation de conservation de la masse. Il s'agit cette fois d'une mesure $d\mu$, définie indépendamment du temps sur le milieu Λ ; son image dm^t dans \mathcal{Y} dépend de t et, dans le cas élémentaire, possède une densité ρ^t par rapport à la mesure dx . La situation est la même que ci-dessus, à l'échange près des rôles de \mathcal{Y} et de Λ : soit D un domaine fixe dans \mathcal{Y} et soit m^t la masse de la matière contenue dans D à l'instant t ; on trouve

$$(1.3) \quad \frac{dm^t}{dt} = - \int_D \operatorname{div} (\rho^t \vec{u}) dx$$

Or la mesure $\operatorname{div} (\rho^t \vec{u}) dx$ constitue la divergence, au sens des distributions, de la mesure vectorielle $\rho^t \vec{u} dx = \vec{u} dm^t$.

Pour faire ressortir cette symétrie des rôles de \mathcal{Y} et Λ , on met donc d'abord en place, au § 2, la cinématique mutuelle de deux variétés \mathcal{C}^1 , notées L et Λ , à champ de vitesses continu. Un mouvement de Λ dans L , sur un intervalle de temps T est une chaîne de difféomorphismes de Λ dans L , indexée par le réel $t \in T$. Les besoins usuels obligent à une légère dissymétrie des rôles des deux variétés : ces difféomorphismes ne sont pas supposés surjectifs. Précisons tout de suite certaines notations : On désigne respectivement par L'_ℓ et Λ'_λ les espaces vectoriels tangents en des points ℓ et λ à L et Λ . Le mouvement est, par définition, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, noté

$$(t, \lambda) \rightarrow (t, p(t, \lambda)),$$

de la variété $T \times \Lambda$ sur un ouvert P de la variété $T \times L$. L'application

linéaire tangente envoie $\mathbb{R} \times \Lambda'_\lambda$ sur $\mathbb{R} \times L'_{p(t,\lambda)}$; on l'écrit

$$(dt, d\lambda) \rightarrow (dt, \dot{p}(t, \lambda)dt + p'(t, \lambda)d\lambda) ,$$

avec $\dot{p}(t, \lambda) = \frac{\partial p}{\partial t} \in L'_{p(t,\lambda)}$ et $p'(t, \lambda) : \Lambda'_\lambda \rightarrow L'_{p(t,\lambda)}$.

Classiquement, le champ eulérien des vitesses de Λ par rapport à L est

$$s(t, \ell) = \dot{p}(t, \pi(t, \ell)) \in L'_\ell$$

où $\pi(t, \cdot)$ désigne l'application réciproque de $p(t, \cdot)$. Symétriquement $(t, \lambda) \rightarrow \sigma(t, \lambda) \in \Lambda'_\lambda$, champ eulérien des vitesses de L par rapport à Λ est défini pour tout $(t, \lambda) \in T \times \Lambda$ et on trouve

$$s(t, p(t, \lambda)) + p'(t, \lambda) \sigma(t, \lambda) = 0.$$

Le présent rapport étant destiné à servir de document de travail, le § 3 développe accessoirement le cas de mouvements stationnaires, i.e. σ constant par rapport à t , bien que cela n'intervienne pas dans les paragraphes suivants. Le fait que, à l'égard de cette propriété, les variétés L et Λ jouent des rôles localement symétriques est classique dans divers contextes ; il est établi ici moyennant des hypothèses plus faibles que d'habitude.

Les mesures scalaires ou vectorielles sur une variété C^1 telle que L sont introduites au § 4 : on note $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur L , à support compact. Les mesures scalaires sont les éléments du dual $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, pour une topologie classique. Est introduit aussi le sous-espace $\mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R})$ constitué par les éléments de $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ qui sont C^1 ; son dual $\mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R})$ est l'espace des distributions scalaires d'ordre ≤ 1 , dans lequel $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$ s'injecte. De même,

on note $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$ l'espace des champs de covecteurs de L , continus à support compact ; son dual $\mathcal{D}'^0(L, L')$ est l'espace des mesures vectorielles sur L . A l'application $\text{grad} : \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}^0(L, L'^*)$ correspond alors, par transposition, l'application

$$- \text{div} : \mathcal{D}'^0(L, L') \rightarrow \mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R})$$

La divergence d'une mesure vectorielle est, de la sorte, une distribution scalaire d'ordre ≤ 1 , éventuellement une mesure. La fin du paragraphe examine comment un difféomorphisme de la variété dans une autre opère sur ces divers objets.

La cinématique reparaît au § 5 avec la considération d'une mesure scalaire m^t sur la variété L , dépendant du temps $t \in T$. Un résultat typique est la Proposition 5.F : si l'application $t \rightarrow m^t$ de T dans $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$ est vaguement continûment dérivable, de dérivée $\dot{m}^t \in \mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, alors pour tout compact K de L , la fonction réelle $t \rightarrow m^t(K)$ est localement lipschitzienne et la fonction $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$, borélienne localement bornée, constitue sa dérivée dans les sens usuels : au sens des distributions sur l'intervalle ouvert T , au sens Lebesgue-presque partout, au sens enfin que $t \rightarrow m^t(K)$ est intégrale indéfinie de $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$. Ce même paragraphe développe aussi un point de vue concurrent : sur un ouvert P de la variété produit $\tilde{L} = T \times L$, on considère une mesure scalaire $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$. Comme l'application $-\frac{\partial}{\partial t}$ est linéaire continue de $\mathcal{D}'^1(P, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$, il est classique de définir par transposition l'objet $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \in \mathcal{D}'^1(P, \mathbb{R})$: cette distribution scalaire d'ordre ≤ 1 est nulle si et seulement si \tilde{m} est, en un sens bien connu en théorie des distributions, localement constante par rapport à t . La liaison entre les deux points de vue s'effectue moyennement l'hypothèse que \tilde{m} pos-

sède une désintégration selon la mesure de Lebesgue de T , i.e. il existe une correspondance $t \rightarrow m^t \in \mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$ (P^t désigne l'ouvert $\{l \in L : (t, l) \in P\}$) telle que pour toute $\tilde{f} \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$, on ait

$$\langle \tilde{m}, \tilde{f} \rangle = \int_T \langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle dt$$

Tout est alors en place pour exécuter au § 6 le programme annoncé : on considère une variété Λ en mouvement \mathcal{C}^1 dans la variété L , sur l'intervalle de temps T , avec les notations indiquées plus haut.

On trouve que la mesure $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ est localement constante par rapport à t (ce qui a lieu notamment si \tilde{m} est la restriction à P d'une mesure définie sur $T \times L$ comme le produit de la mesure de Lebesgue de T par une mesure sur L) si et seulement si son image $\tilde{\mu} \in \mathcal{D}'^0(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ vérifie, au sens de $\mathcal{D}'^1(T \times \Lambda, \mathbb{R})$,

$$(1.4) \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + \operatorname{div} [(0, \sigma) \tilde{\mu}] = 0.$$

S'il en est ainsi, on trouve une désintégration de la mesure $\tilde{\mu}$: il existe une application $t \rightarrow \mu^t$ de T dans $\mathcal{D}'^0(\Lambda, \mathbb{R})$, vaguement continue, telle que pour tout $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}^0(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ on ait

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{\varphi} \rangle = \int_T \langle \mu^t, \tilde{\varphi}(t, \cdot) \rangle dt$$

On considère alors pour chaque t la mesure vectorielle $\sigma(t, \cdot) \mu^t \in \mathcal{D}'^0(\Lambda, \Lambda')$. Sa divergence est un élément de $\mathcal{D}'^1(\Lambda, \mathbb{R})$, dépendant de $t \in T$, qui permet, si on veut, d'écrire des formules de désintégration pour les deux termes de (1.4). Le cas naturellement le plus intéressant est celui où $\operatorname{div} [\sigma(t, \cdot) \mu^t]$ se trouve être une mesure, dépendant de t de manière vaguement continue. Alors les résultats formulés plus haut s'appliquent : cette mesure constitue (au signe près) la dérivée vague de $t \rightarrow \mu^t$; pour tout compact K de Λ elle permet d'exprimer

la dérivée de la fonction localement lipschitzienne $t \mapsto \mu^t(K)$. Telle est la généralisation attendue des formules (1.1) ou (1.3).

2. CINEMATIQUE DE DEUX VARIETES C^1

Soient L et Λ deux variétés C^1 (sans bord) de même dimension finie n . On dit que Λ est en mouvement C^1 dans L s'il est donné un intervalle réel ouvert T , dit intervalle de temps, et une application C^1 de $T \times \Lambda$ dans L , soit $(t, \lambda) \mapsto p(t, \lambda)$ vérifiant la condition suivante : pour chaque $t \in T$, l'application $p(t, \cdot)$ de Λ dans L est injective et d'inverse C^1 .

On notera concurremment p_t l'application $p(t, \cdot)$, dite placement de Λ dans L à l'instant t . L'image $p_t(\Lambda) = P^t$ est un ouvert de L ; l'inverse $p_t^{-1} : P^t \rightarrow \Lambda$ sera désignée par π_t , ce qui établit une symétrie entre les rôles joués par les lettres grecques et latines. On écrira concurremment $\pi(t, \ell)$ pour $\pi_t(\ell)$. La symétrie entre les deux variétés est toutefois entachée par ceci : les applications p_t ne sont pas supposées surjectives. On recupère la symétrie à titre local grâce à la remarque suivante :

L'application $p : T \times \Lambda \rightarrow L$ est de rang constant n , donc l'ensemble

$$(2.1) \quad P = \{(t, \ell) \in T \times \Lambda : \ell \in P^t\}$$

est ouvert dans $T \times \Lambda$ et l'application $(t, \ell) \mapsto p_t^{-1}(\ell) = \pi(t, \ell)$ est C^1 de P dans Λ , de rang constant n . Par suite, pour tout $(t_0, \ell_0) \in P$, il existe un sous-intervalle ouvert T_0 de T contenant t_0 et un sous-ouvert L_0 de P tel que $T_0 \times L_0 \subset P$ et que la restriction de π à

$T_0 \times L_0$ constitue un mouvement \mathcal{C}^1 de L_0 dans Λ .

Evidemment, dans le cas particulier où P^t se trouve indépendant de t , on peut prendre cet ouvert pour L_0 et $T_0 = T$: il y a dans ce cas symétrie complète entre les deux variétés L_0 et Λ .

Pour $\ell \in L$ et $\lambda \in \Lambda$, on note respectivement L'_ℓ et Λ'_λ les espaces vectoriels tangents aux deux variétés en ces points. Si $\ell = p_t(\lambda)$, l'application linéaire tangente à l'application p_t au point λ , notée classiquement $p'_t(\lambda)$ ou ici, par abus d'écriture, $p'(t, \lambda)$, est un isomorphisme de Λ'_λ sur L'_ℓ . L'isomorphisme réciproque est l'application linéaire tangente à l'application $\pi_t = p_t^{-1}$ au point ℓ , notée $\pi'_t(\ell)$ ou ici, abusivement, $\pi'(t, \ell)$.

Une application différentiable $t \rightarrow a(t)$ d'un intervalle de temps dans une de ces variétés est appelée point mobile dans la variété ; pour chaque t la dérivée da/dt , notée $\dot{a}(t)$ est un élément de l'espace vectoriel tangent au point $a(t)$, appelé vitesse du point mobile à l'instant considéré.

En particulier, pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $t \rightarrow p(t, \lambda)$ de T dans L est un point mobile dans L . La vitesse de ce mobile à l'instant t constitue la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial t}(t, \lambda)$, notée plus commodément $\dot{p}(t, \lambda)$; c'est un élément de L'_ℓ où $\ell = p(t, \lambda)$.

Pour $\ell \in p_t(\Lambda)$, on notera

$$(2.2) \quad s(t, \ell) = \dot{p}(t, \pi(t, \ell)) .$$

Pour chaque $t \in T$, la sélection (ou section du fibré tangent à L)

$$\ell \rightarrow s(t, \ell) \in L'_\ell$$

est un champ vectoriel de la sous-variété P^t de L , continu, puisque p est \mathcal{C}^1 . On dit que s est le champ des vitesses de Λ dans L à ;

l'instant t .

Symétriquement, pour tout $t \in T$ et tout $\lambda \in \Lambda$ on note $\dot{\pi}(t, \lambda)$ la dérivée partielle de π par rapport à son premier argument et on pose

$$(2.3) \quad \sigma(t, \lambda) = \dot{\pi}(t, p(t, \lambda)) \in \Lambda'_\lambda,$$

champ des vitesses de L sur Λ à l'instant t ; c'est un champ vectoriel continu sur la variété Λ tout entière.

Vient alors la règle de comparaison des vitesses.

Une application $\alpha : T \rightarrow \Lambda$ est différentiable si et seulement si l'application

$$a : t \rightarrow p(t, \alpha(t))$$

de T dans L est différentiable. Par les règles usuelles du calcul différentiel, on a

$$(2.4) \quad \dot{a}(t) = \dot{p}(t, \alpha(t)) + p'(t, \alpha(t)) \dot{\alpha}(t).$$

Abréviativement, pour la valeur de t considérée, soit $\alpha(t) = \lambda$, $a(t) = p(t, \lambda) = \ell$; (2.4) s'écrit, avec la notation (2.2),

$$(2.5) \quad \dot{a} = s(t, \ell) + p'(t, \lambda) \dot{\alpha}.$$

Par l'application linéaire $\pi'(t, \ell)$ cette relation équivaut à

$$(2.6) \quad \pi'(t, \ell) \dot{a} = \pi'(t, \ell) s(t, \ell) + \dot{\alpha}.$$

Quitte à remplacer, comme plus haut, la variété L par un ouvert L_0 convenable, on peut échanger dans (2.5) les rôles de L et Λ , ce qui donne

$$(2.7) \quad \dot{\alpha} = \sigma(t, \lambda) + \pi'(t, \ell) \dot{a}$$

En rapprochant (2.6) et (2.7), il vient

$$(2.8) \quad \sigma(t, \lambda) = -\pi'(t, \ell) s(t, \ell)$$

et, symétriquement,

$$(2.9) \quad s(t, \ell) = -p'(t, \lambda) \sigma(t, \lambda) .$$

Bref, $\ell \rightarrow s(t, \ell)$, champ vectoriel de la variété $P^t = p(t, \Lambda) \subset L$ est l'image par l'application continûment différentiable $p_t = p(t, \cdot)$ du champ vectoriel $\lambda \rightarrow -\sigma(t, \lambda)$ de la variété Λ .

La cinématique élémentaire est caractérisée par l'abus de langage suivant : pour chaque t l'injection p_t de Λ dans L est interprétée comme une identification de Λ à un sous-ensemble de L (peu importe ici qu'en cinématique élémentaire les variétés L et Λ soient plus fortement structurées : ce sont usuellement des espaces euclidiens affines ; pour l'usage du langage de la cinématique élémentaire dans le cas des variétés, voir [1]). Alors les applications linéaires tangentes sont des identifications des espaces vectoriels correspondants et (2.8) ou (2.9) se lisent $s + \sigma = 0$: dans ce langage, le champ des vitesses de Λ par rapport à L et le champ des vitesses de L par rapport à Λ sont, à chaque instant, opposés.

3. MOUVEMENTS STATIONNAIRES

DEFINITION 3.A. On dit que le mouvement de Λ dans L est stationnaire sur l'intervalle T (ou permanent) si le champ vectoriel σ définie en

(2.3) est constant par rapport à $t \in T$.

La proposition ci-dessous formule que, au moins à titre local, les deux variétés jouent des rôles symétriques à l'égard de cette propriété.

PROPOSITION 3.B. On suppose que le mouvement de Λ dans L est stationnaire sur T . Alors si ℓ est une point de L et si T_ℓ est un sous-intervalle de T tel que $\ell \in p(t, \Lambda)$ pour tout $t \in T_\ell$, le vecteur $s(t, \ell) \in L'_\ell$ défini en (2.2) est constant lorsque t décrit T_ℓ .

COROLLAIRE 3.C. Comme au paragraphe 2, on appelle T_0 un sous-intervalle ouvert de T et L_0 un ouvert de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$. Si le mouvement de Λ dans L est stationnaire sur T , le mouvement de L_0 dans Λ est stationnaire sur T_0 .

A priori, la partie $P^t = p(t, \Lambda)$ de L varie avec t . Dans le cas particulier où P^t est une partie constante, soit L_0 , de L on prend $T = T_0$; alors les variétés L_0 et Λ jouent des rôles exactement symétriques : le mouvement de Λ dans L_0 est stationnaire sur T si et seulement le mouvement de L_0 dans Λ est stationnaire sur T .

Preuve de la Proposition 3.B. Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $T_\ell \cap (T-u)$ soit non vide. Montrons que le mobile dans L

$$t \rightarrow a(t) = p(u+t, \pi(t, \ell)),$$

défini sur cet intervalle de temps, est fixe dans L .

De fait, le mobile dans Λ

$$t \rightarrow \alpha(t) = \pi(t, \ell)$$

a pour vitesse

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\pi}(t, \ell) = \sigma(t, \alpha(t)) \in L'_{\alpha(t)}$$

Par les règles usuelles du calcul différentiel il vient donc

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{p}(u+t, \alpha(t)) + p'(u+t, \alpha(t)) \sigma(t, \alpha(t))$$

Comme le champ vectoriel σ est supposé indépendant du temps dans Λ , on a en appliquant (2.9) à l'instant $u+t$, avec $\lambda = \alpha(t)$,

$$p'(u+t, \alpha(t)) \sigma(\cdot, \alpha(t)) = -s(u+t, p(u+t, \alpha(t))) = -\dot{p}(u+t, \alpha(t))$$

d'où la nullité de $\dot{\alpha}$.

Soit $\epsilon > 0$; notons T_ϵ l'intervalle obtenu en "réduisant T_ℓ de ϵ à chaque bout", intervalle non vide si ϵ est assez petit. Alors

$$u \in]-\epsilon, +\epsilon[, \quad t \in T_\epsilon \Rightarrow t \in T_\ell \cap (T-u)$$

On vient d'établir que l'application

$$(u, t) \rightarrow p(u+t, \pi(t, \ell))$$

de $]-\epsilon, +\epsilon[\times T_\epsilon$ dans L est constante par rapport à t c'est-à-dire que

$$p(u+t, \pi(t, \ell)) = b(u)$$

avec $b :]-\epsilon, +\epsilon[\rightarrow L$, application dont on calcule comme suit la dérivée

$$\frac{d}{du} p(u+t, \pi(t, \ell)) = \dot{p}(u+t, \pi(t, \ell))$$

Le second membre est un élément de $L'_{b(u)}$ indépendant de la valeur de $t \in T_\epsilon$. Si on fait en particulier $u = 0$, on conclut que

$\dot{p}(t, \pi(t, \ell)) = s(t, \ell)$ est constant par rapport à $t \in T_\epsilon$. D'ailleurs ϵ peut être pris arbitrairement petit; la réunion des T_ϵ est l'intérieur de T_ℓ . Cela démontre la proposition 3.B, même si l'intervalle T_ℓ n'est pas ouvert, vu la continuité de s . \square

REMARQUE 1. Dans les conditions de la Proposition 3.B., il peut exister pour un $\ell \in L$ plusieurs intervalles tels que T_ℓ , disjoints, et qu'à chacun d'eux correspondent des valeurs distinctes de $s(t, \ell)$, comme le montre l'exemple suivant :

On prend pour Λ le rectangle ouvert

$$\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \lambda_1 < 2, h < \lambda_2 < k\}$$

avec $0 < h < k$. On prend $L = \mathbb{R}^2$ et on définit $\ell = p(t, \lambda)$ comme le couple (ℓ_1, ℓ_2) suivant

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \ell_1 &= \lambda_1 \cos(\lambda_2 e^t) \\ \ell_2 &= \lambda_1 \sin(\lambda_2 e^t) . \end{aligned}$$

Autrement dit, ℓ est le point de \mathbb{R}^2 dont des coordonnées polaires sont

$$(3.2) \quad r = \lambda_1, \quad \theta = \lambda_2 e^t .$$

L'application p_t est injective si $(k-h)e^t < 2\pi$. On prend pour T l'intervalle $]-\infty, \text{Log} \frac{2\pi}{k-h}[$. Les composantes de $\dot{p}(t, \lambda)$ sont

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \ell_1}{\partial t} &= -\lambda_1 \lambda_2 e^t \sin(\lambda_2 e^t) = -r\theta \sin\theta \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial t} &= \lambda_1 \lambda_2 e^t \cos(\lambda_2 e^t) = r\theta \cos\theta . \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, les composantes du vecteur $\sigma(t, \lambda)$ sont les valeurs des dérivées $\dot{\lambda}_1$ et $\dot{\lambda}_2$ lorsque le mobile $t \rightarrow (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$

donne par p une image fixe dans L ; d'où, en utilisant (3.2)

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad \dot{\lambda}_2 e^t + \lambda_2 e^t = 0 .$$

Donc $\sigma(t, \lambda)$ a pour composantes $(0, -\lambda_2)$; il est constant par rapport à t ; le mouvement de Λ dans L est stationnaire.

Soit ℓ fixé dans L par des coordonnées polaires $r \in]1, 2[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Vu (3.2), une manière d'assurer $\ell \in p(t, \Lambda)$ est de prendre t tel que $\theta e^{-t} \in]h, k[$ c'est-à-dire t dans l'intervalle $]\text{Log } \frac{\theta}{k}, \text{Log } \frac{\theta}{h}[$; l'intersection de cet intervalle avec T (non vide si $\theta < 2\pi k / k-h$) constitue un T_ℓ conforme à l'énoncé. De fait pour t dans cet intervalle, les composantes (3.3) de $s(t, \ell)$ ont les valeurs constantes $-r\theta \sin\theta$ et $r\theta \cos\theta$.

Mais, pour tout n entier positif, r et $\theta + 2n\pi$ sont aussi des coordonnées polaires du même ℓ de sorte qu'on a encore $\ell \in p(t, \Lambda)$ si t décrit l'intervalle $]\text{Log } \frac{\theta + 2n\pi}{k}, \text{Log } \frac{\theta + 2n\pi}{h}[$ (supposé d'intersection non vide avec T , discussion facile). Dans ce cas $s(t, \ell)$ possède les composantes $-r(\theta + 2n\pi) \sin\theta$, $r(\theta + 2n\pi) \cos\theta$, différentes des précédentes.

REMARQUE 2. Tout mouvement peut être ramené au cas stationnaire par ^{des} artifices d'augmentation de dimension comme le suivant. Soit Λ en mouvement \mathcal{C}^1 quelconque dans L sur un intervalle T , avec les notations du paragraphe 2. Soient X et Ξ deux copies de l'intervalle T ; on considère les deux variétés $\tilde{\Lambda} = \Xi \times \Lambda$ et $\tilde{L} = X \times L$. Un mouvement de $\tilde{\Lambda}$ dans \tilde{L} est défini par l'application \tilde{p} suivante de $T \times \tilde{\Lambda}$ dans \tilde{L} :

$$\tilde{p}(t; \xi, \lambda) = \left(\frac{t+\xi}{\ell}, p\left(\frac{t+\xi}{\ell}, \lambda\right) \right)$$

L'application inverse s'écrit

$$\tilde{\pi}(t; x, \ell) = (2x - t, \pi(x, \ell))$$

définie sur

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \{(t, \mathcal{X}) \in T \times \tilde{L} : \mathcal{X} \in \tilde{p}(t, \tilde{\Lambda})\} \\ &= \{(t, x, \ell) \in T \times X \times L : \exists \xi \in \Xi, \exists \lambda \in \Lambda, x = \frac{t+\xi}{2}, \ell = p(\frac{t+\xi}{2}, \lambda)\} \\ &= \{(t, x, \ell) \in T \times X \times L : 2x-t \in T, (x, \ell) \in P\} . \end{aligned}$$

L'espace vectoriel tangent au point (ξ, λ) de $\tilde{\Lambda}$ est $\mathbb{R} \times \Lambda'_\lambda$ et on a

$$\tilde{\pi}(t; x, \ell) = (-1, 0) .$$

Donc $\sigma(\xi, \lambda) = (-1, 0)$, indépendant de t : le mouvement de $\tilde{\Lambda}$ dans \tilde{L} est stationnaire. D'ailleurs l'espace vectoriel tangent au point (x, ℓ) de \tilde{L} est $\mathbb{R} \times L'_\ell$ et

$$\tilde{p}(t; \xi, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} p\left(\frac{t+\xi}{2}, \lambda\right)\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t; x, \ell) &= \tilde{p}(t; 2x(t, \pi(x, \ell))) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} p\left(\frac{t+2x-t}{2}, \pi(x, \ell)\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} s(x, \ell)\right) \end{aligned}$$

indépendant de t dans l'intervalle $T_\mathcal{X} = T \cap (2x-T)$.

4. MESURES SCALAIRES OU VECTORIELLES SUR UNE VARIÉTÉ \mathbb{C}^1

Soit L une variété \mathbb{C}^1 (sans bord). On note $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues dans L , à support compact. Son dual topologique $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, pour une topologie classique [2] est, par définition, l'espace des mesures scalaires sur L . On peut éviter la construction explicite de la topologie de $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$ (limite inductive) en disant simplement que tout élément m de $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$ est une application linéaire de $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} possédant la propriété suivante : pour tout compact K de L , la restriction de m au sous-espace $\mathcal{D}^0_K(L, \mathbb{R})$ constitué

par les éléments de $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ à support contenu dans K est continue pour la norme uniforme.

La structure de variété \mathcal{C}^1 permet également de définir le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$, constitué par les éléments de $\mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ qui sont \mathcal{C}^1 . Pour K compact de L , on note $\mathcal{D}_K^1 = \mathcal{D}^1 \cap \mathcal{D}_K^0$; sur ce dernier sous-espace vectoriel on définit la norme

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in K} \{|f(x)|, |f_{,1}(x)|, \dots, |f_{,n}(x)|\}$$

La définition des dérivées partielles premières $f_{,i}$ de la fonction $f \in \mathcal{D}_K^1$ est subordonnée au choix de cartes de la variété L . Mais puisque'il s'agit d'une variété \mathcal{C}^1 , les changements de cartes sont, par hypothèse, des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes; les matrices jacobiniennes de ces transformations sont donc bornées et d'inverses bornées sur K ; par suite, changer de carte remplace $\|f\|_1$ par une norme équivalente. On notera $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$ l'espace des distributions scalaires d'ordre ≤ 1 sur L : par définition un élément de $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$ dont la restriction à chaque \mathcal{D}_K^1 est continue pour la norme ci-dessus.

Pour toute mesure $m \in \mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, la restriction de m au sous-espace $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$ constitue visiblement un élément de $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$; on constate par densité que l'application linéaire de \mathcal{D}'^0 dans \mathcal{D}^1 ainsi définie est injective: on convient donc d'identifier m à cet élément de \mathcal{D}^1 , ce qui revient à déclarer que les mesures, ou distributions d'ordre zéro, soit des cas particuliers de distribution d'ordre ≤ 1 .

Un champ de vecteurs (resp. de covecteurs) sur L est une correspondance associant à tout $\ell \in L$ un élément de l'espace tangent L'_ℓ (resp. de l'espace cotangent L'^*_ℓ). On notera $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$ l'ensemble des champs de covecteurs continus à support compact: continuité et support

sont a priori des notions définies par le moyen de cartes, mais on observe comme plus haut que les changements de cartes sont indifférents (l'écriture L'^* utilisée ici est un peu abusive : elle n'implique pas que les différents L'_ℓ^* soient identifiés à un unique espace vectoriel, ce qui signifierait une trivialisation du fibré cotangent à L). Pour tout compact K de L on note $\mathcal{D}_K^0(L, L'^*)$ le sous-espace de $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$ constitué par les champs à support contenu dans K . Sur ce sous-espace, la norme du sup des valeurs absolues des composantes est subordonnée au choix de cartes, mais, là-encore, un changement de carte la remplace par une norme équivalente. Une mesure vectorielle sur L est, par définition, une forme linéaire sur $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$ dont la restriction à chaque $\mathcal{D}_K^0(L, L'^*)$ est continue. On notera $\mathcal{D}'^0(L, L')$ l'ensemble de ces mesures vectorielles et, comme d'habitude, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire de la dualité.

Une manière évidente d'exhiber un élément de $\mathcal{D}'^0(L, L')$ est de choisir une mesure scalaire m sur L et un champ de vecteurs v'_m localement intégrable pour cette mesure. On note alors $v'_m m$ la mesure vectorielle v dont la valeur pour tout $c \in \mathcal{D}^0(L, L'^*)$ est

$$\langle v, c \rangle = \langle m, v'_m \cdot c \rangle ;$$

le \cdot se rapporte, pour chaque $\ell \in L$, à la dualité entre L'_ℓ et L'^*_ℓ : la fonction scalaire $\ell \rightarrow v'_m(\ell) \cdot c(\ell)$ est bien intégrable pour la mesure m . Une variante multidimensionnelle du théorème de Lebesgue-Nikodym ([2], chap. VI, § 2, proposition 9) permet d'affirmer que toute mesure vectorielle est représentable de cette manière et même que, plus précisément, on peut prendre m positive et $v'_m \in \mathcal{L}^\infty(L, L')$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$, le champ des covecteurs $\text{grad } \varphi$ est un élément de $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$. A cette application linéaire continue

$$\text{grad} : \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}^0(L, L'^*)$$

correspond, par transposition relativement aux dualités définies plus haut, l'application

$$- \text{div} : \mathcal{D}'^0(L, L') \rightarrow \mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R}) .$$

Autrement dit, pour toute mesure vectorielle v , on note $\text{div } v$ la distribution scalaire d'ordre ≤ 1 , appelée divergence de v , telle

$$(4.1) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) : \langle \text{div } v, \varphi \rangle = - \langle v, \text{grad } \varphi \rangle .$$

Il reste à préciser comment les notions qu'on vient d'introduire se comportent à l'égard des difféomorphismes.

Comme précédemment, appelons L et Λ deux variétés \mathcal{C}^1 (sans bord) de même dimension et p un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de L dans Λ ; on note $\pi : p(\Lambda) \rightarrow \Lambda$ le difféomorphisme inverse.

L'application linéaire $\varphi \mapsto \varphi \circ \pi$ de $\mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}^1(p(\Lambda), \mathbb{R})$ est bijective et bicontinue. Par ailleurs, vu que tout élément de $\mathcal{D}^1(p(\Lambda), \mathbb{R})$ a pour support dans l'ouvert $p(\Lambda) \subset L$ un compact, son prolongement avec la valeur 0 hors de $p(\Lambda)$ est un élément de $\mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$ que nous noterons $\overline{\varphi \circ \pi}$. Pour tout $a \in \mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R})$, la fonctionnelle

$$\alpha : \varphi \mapsto \langle a, \overline{\varphi \circ \pi} \rangle$$

est donc un élément de $\mathcal{D}'^1(\Lambda, \mathbb{R})$: nous dirons que c'est la distribution induite par a sur Λ dans le placement $p : \Lambda \rightarrow L$ ou image réciproque de a par p (un cas particulier classique est celui où Λ est une partie ouverte de L et où on prend pour p l'injection canonique : alors la distribution induites'appelle aussi restriction de a à l'ouvert Λ ; si a est une mesure, la locution mesure induite sur Λ est classique). Bref, les applications linéaires

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R}) &\longrightarrow \overline{\varphi \circ \pi} \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) \\ \alpha \in \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R}) &\longleftarrow a \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

sont transposées l'une de l'autre. On peut dire que α est l'image, par le difféomorphisme π , de la restriction de la distribution a à l'ouvert $p(\Lambda)$; nous écrivons

$$(4.2) \quad \alpha = p^{-1}(a)$$

Si a est une mesure, il en est de même de α .

Noter que si on donne inversement $\alpha \in \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R})$, on ne peut pas, a priori, lui associer une "image par p " car pour $f \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R})$, la fonction $f \circ p : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas nécessairement un support compact dans Λ (fait corrélatif : une distribution sur le sous-ouvert $f(\Lambda)$ de L n'est pas nécessairement prolongeable en une distribution sur L). Toutefois dans le cas particulier où α est une mesure bornée sur Λ , il existe classiquement une mesure image $p(\alpha)$ sur L définie pour tout $f \in \mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ par

$$\langle p(\alpha), f \rangle = \langle \alpha, f \circ p \rangle$$

vu que $f \circ p$ est continue et bornée sur Λ ; naturellement dans ce cas $p^{-1}[p(\alpha)] = \alpha$.

Nous définissons maintenant l'action de difféomorphismes sur les champs de covecteurs et sur les mesures vectorielles. Si $\gamma \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda^* \otimes \mathbb{R})$, on associe à tout $\ell \in p(\Lambda)$ l'élément $\lambda = \pi(\ell)$ de Λ et l'élément $p'^*(\lambda) \gamma(\lambda)$ de $L_\ell^* \otimes \mathbb{R}$, où $p'^*(\lambda) : \Lambda_\lambda^* \otimes \mathbb{R} \rightarrow L_\ell^* \otimes \mathbb{R}$ désigne l'inverse transposée (ou application contragrédiente) de l'application linéaire tangente $p'(\lambda) : \Lambda_\lambda^* \otimes \mathbb{R} \rightarrow L_\ell^* \otimes \mathbb{R}$. Le champ de covecteurs $p(\gamma)$ ainsi défini sur la variété $p(\Lambda)$ est continu à support compact : son prolongement avec la valeur zéro

hors de l'ouvert $p(\Lambda)$ constitue un élément de $\mathcal{D}^0(L, L'^*)$ que nous noterons $\bar{p}(\gamma)$. Visiblement $\bar{p} : \mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda'^*) \rightarrow \mathcal{D}^0(L, L'^*)$ est linéaire continue ; on définit donc sa transposée $\mathcal{D}'^0(L, L') \rightarrow \mathcal{D}'^0(\Lambda, \Lambda')$: par définition, pour tout mesure vectorielle v sur L , la mesure vectorielle induite sur Λ par p , ou image réciproque de v par p , est $p^{-1}(v)$ caractérisée par

$$(4.3) \quad \forall \gamma \in \mathcal{D}'^0(\Lambda, \Lambda'^*) : \langle p^{-1}(v), \gamma \rangle = \langle v, \bar{p}(\gamma) \rangle .$$

Observons maintenant :

PROPOSITION 4.A. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi \in \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{grad } \varphi \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda'^*) \\ \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ \overline{\varphi \circ \pi} \in \mathcal{D}^1(L, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{grad } \overline{\varphi \circ \pi} \in \mathcal{D}^0(L, L'^*) \end{array}$$

commute.

Démonstration. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ & \searrow p & \nearrow \overline{\varphi \circ \pi} \\ & & L \end{array}$$

d'où, pour les applications linéaires tangentes, avec $\ell = p(\lambda)$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'_\lambda & \xrightarrow{\text{grad } \varphi(\lambda)} & \mathbb{R} \\ & \searrow p'(\lambda) & \nearrow \text{grad } \overline{\varphi \circ \pi}(\ell) \\ & & L'_\ell \end{array}$$

Autrement dit en notant par . les dualités entre espaces tangents et cotangents,

$$\forall d\lambda \in \Lambda_{\lambda}^1 : d\lambda \cdot \text{grad } \varphi(\lambda) = (p'(\lambda)d\lambda) \cdot \overline{\text{grad } \varphi \circ \pi}(\lambda)$$

c'est-à-dire,

$$\text{grad } \varphi(\lambda) = (p'(\lambda))^T \overline{\text{grad } \varphi \circ \pi}(\lambda)$$

ou encore, avec la notation posée plus haut pour l'inverse transposée de $p'(\lambda)$,

$$p'^*(\lambda) \text{ grad } \varphi(\lambda) = \overline{\text{grad } \varphi \circ \pi}(\lambda).$$

Pour $\lambda \notin p(\Lambda)$, le second membre est nul ; par définition cela veut bien dire que le champ de covecteurs $\overline{\text{grad } \varphi \circ \pi}$ est l'image de $\text{grad } \varphi$ par \bar{p} . \square

Il n'y a plus qu'à passer aux applications transposées pour obtenir :

PROPOSITION 4.B. L'action de \bar{p}^{-1} étant définie par (4.2) et (4.3), le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R}) & \xleftarrow{\text{div}} & \mathcal{D}'^0(\Lambda, \Lambda') \\ \bar{p}^{-1} \uparrow & & \uparrow \bar{p}^{-1} \\ \mathcal{D}'^1(L, \mathbb{R}) & \xleftarrow{\text{div}} & \mathcal{D}'^0(L, L') \end{array}$$

Enfin :

PROPOSITION 4.C. Soit $m \in \mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$ et $\mu = \bar{p}^{-1}(m) \in \mathcal{D}'^0(\Lambda, \mathbb{R})$; soit $b \in \mathcal{C}^0(L, L')$ (i.e. champ de vecteurs continu sur L) et soit $\beta \in \mathcal{C}^0(\Lambda, \Lambda')$ son image réciproque par p c'est-à-dire, en posant $\lambda = p(\lambda)$,

$$\forall \lambda \in \Lambda : \beta(\lambda) = \pi'(\lambda) b(\lambda).$$

Alors la mesure vectorielle $bm \in \mathcal{D}'^0(L, L')$ a pour image réciproque par p la mesure vectorielle $\beta \mu \in \mathcal{D}'^0(\Lambda, \Lambda')$.

Démonstration. Soit $\gamma \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda^{1*})$ et soit $g = \bar{p}(\gamma)$ c'est-à-dire, pour $\mathcal{L} = p(\lambda)$,

$$g(\mathcal{L}) = p^{1*}(\lambda) \gamma(\lambda)$$

Par définition

$$\langle \beta \mu, \gamma \rangle = \langle \mu, \beta \cdot \gamma \rangle$$

$$\langle b m, g \rangle = \langle m, b \cdot g \rangle$$

et

$$p(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) = [\pi^1(\mathcal{L}) b(\mathcal{L})] \cdot \gamma(\lambda) = b(\mathcal{L}) \cdot [p^{1*}(\lambda) \gamma(\lambda)] = b(\mathcal{L}) \cdot g(\mathcal{L})$$

d'où l'assertion. \square

5. L'OPERATION $\frac{\partial}{\partial t}$

Soit T un intervalle réel ouvert et soit L une variété \mathcal{C}^1 ; soit P un ouvert de la variété $\tilde{L} = T \times L$. L'usage dans ce qui suit de partitions de l'unité (cf. [5], [6]) conduit à faire l'hypothèse usuelle que P possède une base dénombrable d'ouverts.

Soit $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$; conformément aux notations de la théorie des distributions, écrivons $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}$ la fonctionnelle définie pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R})$ par

$$(5.1) \quad \left\langle \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle = - \left\langle \tilde{m}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right\rangle .$$

Cette fonctionnelle est un élément de $\mathcal{D}'^1(P, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 5.A. Soit $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$; la distribution $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \in \mathcal{D}'^1(P, \mathbb{R})$ est nulle si et seulement si la mesure \tilde{m} est localement constante par rapport à t dans le sens suivant : pour tout sous-intervalle ouvert T_0 de T et tout ouvert L_0 de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$, la restriction de

\tilde{m} à $T_0 \times L_0$ est égale au produit de la mesure de Lebesgue sur T_0 par une mesure sur L_0 .

Démonstration. Si \tilde{m} est supposée localement constante par rapport à t et si T_0 et L_0 sont conformes à l'énoncé, il existe $m_0 \in \mathcal{D}'^0(L_0, \mathbb{R})$ telle que, pour $\tilde{f} \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R})$ à support dans $T_0 \times L_0$, on ait

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle &= - \left\langle \tilde{m}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right\rangle \\ &= - \left\langle m_0, \int_{T_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \cdot) dt \right\rangle ; \end{aligned}$$

or

$$\int_{T_0} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \cdot) dt = 0.$$

Donc la distribution $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}$ a une restriction nulle à l'ouvert $T_0 \times L_0$; sa nullité dans P en résulte par recollement des morceaux.

Inversement, supposons $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} = 0$; soient T_0 et L_0 conformes à l'énoncé. Si $h \in \mathcal{D}^1(T_0, \mathbb{R})$, de dérivée h' , et $f \in \mathcal{D}^1(L_0, \mathbb{R})$, on a d'après la définition de $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}$,

$$(5.2) \quad \langle \tilde{m}, h' \otimes f \rangle = 0.$$

Lorsque f est fixé, la fonctionnelle définie pour tout $g \in \mathcal{D}^0(T_0, \mathbb{R})$ par

$$(5.3) \quad g \rightarrow \langle \tilde{m}, g \otimes f \rangle$$

est un élément de $\mathcal{D}'^0(T_0, \mathbb{R})$. En effet, si le support de g est contenu dans un compact H de T_0 on a

$$|\langle \tilde{m}, g \otimes f \rangle| \leq \sup |g| M(f, H)$$

où $M(f, H)$ désigne l'intégrale de la mesure positive $|(\mathbb{1} \otimes f) \tilde{m}|$ sur le compact $H \times \text{supp } f$. Or g est de la forme h' si et seulement si

$\int_{T_0} g(t) dt = 0$; donc, en notant θ_0 la mesure de Lebesgue sur T_0 , (5.2) établit l'implication

$$\langle \theta_0, g \rangle = 0 \Rightarrow \langle \tilde{m}_g \otimes f \rangle = 0.$$

La mesure définie en (5.3) est donc, au sens de la dualité $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}'_0$, bi-orthogonale à la mesure de Lebesgue θ_0 ; d'après le théorème algébrique des multiplicateurs de Lagrange (i.e. si une dualité entre deux espaces vectoriels X et Y est séparante dans X , tout sous-espace vectoriel de dimension finie de X est égal à son biorthogonal) il existe alors un réel $m_0(f)$ tel que

$$(5.4) \quad \forall g \in \mathcal{D}^0(T_0, \mathbb{R}) : \langle \tilde{m}_g \otimes f \rangle = m_0(f) \langle \theta_0, g \rangle.$$

L'application linéaire $f \rightarrow m_0(f)$ de $\mathcal{D}^1(L_0, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} ainsi construite se prolonge en une mesure ; en effet, si on choisit g tel que $\langle \theta_0, g \rangle = 1$ on a, dès que le support de f est contenu dans un compact K de L_0 ,

$$|m_0(f)| \leq \sup |f| N(g, K)$$

où $N(g, K)$ désigne l'intégrale de la mesure positive $|g \otimes \tilde{m}|$ sur le compact $\text{supp } g \times K$. L'égalité (5.4) exprime alors que les mesures \tilde{m} et $\theta_0 \otimes m_0$ donnant la même intégrale pour tout $g \otimes f$, $g \in \mathcal{D}^0(T_0, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$. Cela achève la démonstration, puisque les $g \otimes f$ engendrent une partie dense de $\mathcal{D}^0(T_0 \times L_0, \mathbb{R})$. \square

REMARQUE 5.B. Un cas usuel d'application de la proposition précédente est celui où P est un cylindre, c'est-à-dire lui-même de la forme $T_0 \times L_0$. Pour le cas général, observer qu'il peut exister un ouvert L_0 de L et des sous-intervalles disjoints T_0 et T'_0 de T tels que $T_0 \times L_0$ et $T'_0 \times L_0$ soient contenus dans P . Les mesures m_0 et m'_0 sur L_0 que la

proposition leur fait correspondre peuvent être différentes.

Pour tout $t \in T$, on notera

$$(5.5) \quad P^t = \{\ell \in L : (t, \ell) \in P\}$$

ensemble ouvert dans L , éventuellement vide.

DEFINITION 5.C. On dit qu'une correspondance $t \rightarrow m^t$, de T vers les $\mathcal{D}^0(P^t, \mathbb{R})$ est localement vaguement continue si, pour tout sous-intervalle ouvert T_0 de T et tout ouvert L_0 de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$, la restriction de la mesure m^t à L_0 est un élément de $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$ dépendant de $t \in T_0$ de manière vaguement continue.

Pour toute fonction \tilde{f} définie sur P , on notera f^t la fonction $\ell \rightarrow \tilde{f}(t, \ell)$, définie sur P^t .

PROPOSITION 5.D. Si $t \rightarrow m^t \in \mathcal{D}^0(P^t, \mathbb{R})$ est une correspondance localement vaguement continue, pour toute $\tilde{f} \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$, la fonction $t \rightarrow \langle m^t, f^t \rangle$, définie sur l'ouvert $T_P = \{t \in T : P^t \neq \emptyset\}$ est continue à support compact.

Démonstration. Prouvons la continuité de cette fonction en un point $t_0 \in T$. En utilisant une partition de l'unité, on se ramène au cas où \tilde{f} a son support dans un produit $T_0 \times L_0$, avec L_0 ouvert de L et T_0 intervalle ouvert de T_P , contenant t_0 . Alors, pour tout $t \in T_0$, la fonction f^t a son support dans un compact de L_0 , image du compact $\text{supp } \tilde{f}$ par l'application continue $(t, \ell) \rightarrow \ell$. Donc, vu la continuité uniforme de \tilde{f} , si t tend vers t_0 , l'élément f^t tend vers f^{t_0} au sens

de $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$. Par ailleurs, soit H un voisinage compact de t_0 dans T_0 ; l'image de H par l'application vaguement continue $t \rightarrow m^t|_{L_0}$ est vaguement compacte dans $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$, donc équivcontinue (cf. [2], chap. III, proposition 15), d'où la continuité de $t \rightarrow \langle m^t, f^t \rangle$. Visiblement cette fonction a son support dans le compact image de $\text{supp } \tilde{f}$ par l'application continue $(t, \ell) \rightarrow t$. \square

DEFINITION 5.E. On dit que $\dot{m} \in \mathcal{D}^0(P_0^t, \mathbb{R})$ est dérivée vague de la correspondance $t \rightarrow m^t$ au point t_0 si, pour tout ouvert T_0 de T contenant t_0 et tout ouvert L_0 de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$, l'application $t \rightarrow m^t|_{L_0}$ de T_0 dans $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$ admet $\dot{m}|_{L_0}$ comme dérivée au point t_0 au sens de la topologie vague.

Noter que, pour toute $f \in \mathcal{D}^0(P_0^t, \mathbb{R})$, il existe un voisinage T_0 de t_0 dans T tel que $\text{supp } f \subset P^t$ pour tout $t \in T_0$. La définition précédente équivaut donc à dire^{que} pour tout couple (f, T_0) ainsi choisi, l'application $t \rightarrow \langle m^t, f \rangle$ de T_0 dans \mathbb{R} possède une dérivée au point t_0 égale à $\langle \dot{m}, f \rangle$.

Visiblement $t \rightarrow m^t$ admet pour tout $t \in T_P$ une dérivée vague égale à la mesure nulle si et seulement cette correspondance est localement constante par rapport à t , i.e. pour tout sous-intervalle T_0 de T et tout ouvert L_0 de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$, l'application $t \rightarrow m^t|_{L_0}$ est constante de T_0 dans $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$. C'est le cas, en particulier, si m^t est la restriction à P^t d'une mesure sur L indépendante de t ; mais une situation semblable à celle de la Remarque 5.B. est également possible.

PROPOSITION 5.F. Dans les conditions de la Définition 5.E, pour toute

$\tilde{f} \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$ admettant une dérivée partielle $\tilde{\partial f}/\partial t$ continue dans P , la fonction $t \rightarrow \langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle$ admet une dérivée au point t_0 égale à

$$(5.6) \quad \frac{d}{dt} \langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle = \langle m^{t_0}, \tilde{f}(t_0, \cdot) \rangle + \langle m^{t_0}, \frac{\tilde{\partial f}}{\partial t}(t_0, \cdot) \rangle.$$

Démonstration. Supposons d'abord que \tilde{f} ait son support dans un $T_0 \times L_0$; on écrit

$$\begin{aligned} \frac{\langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle - \langle m^{t_0}, \tilde{f}(t_0, \cdot) \rangle}{t - t_0} &= \left\langle \frac{m^t - m^{t_0}}{t - t_0}, \tilde{f}(t_0, \cdot) \right\rangle \\ &+ \left\langle m^{t_0}, \frac{\tilde{f}(t, \cdot) - \tilde{f}(t_0, \cdot)}{t - t_0} \right\rangle + \left\langle \frac{m^t - m^{t_0}}{t - t_0}, \tilde{f}(t, \cdot) - \tilde{f}(t_0, \cdot) \right\rangle. \end{aligned}$$

Par hypothèse, si t tend vers t_0 , le premier terme du second membre a pour limite $\langle m^{t_0}, \tilde{f}(t_0, \cdot) \rangle$. D'autre part, si on appelle K le compact image de $\text{supp } \tilde{f}$ par l'application $(t, l) \rightarrow l$, l'élément

$\tilde{f}(t, \cdot) - \tilde{f}(t_0, \cdot) / t - t_0$ a pour limite $\tilde{\partial f}(t_0, \cdot) / \partial t$ au sens de la norme de $\mathcal{D}_K^0(L_0, \mathbb{R})$ d'après le théorème des accroissements finis et la continuité

de $\tilde{\partial f} / \partial t$; donc le second terme du second membre a pour limite

$\langle m^{t_0}, \tilde{\partial f}(t_0, \cdot) / \partial t \rangle$ si t tend vers t_0 . Pour ce qui est du dernier terme,

supposons que t prenne une suite de valeurs tendant vers zéro; alors

les $m^t - m^{t_0} / t - t_0$ forment une suite vaguement convergente dans $\mathcal{D}'^0(L_0, \mathbb{R})$

donc vaguement relativement compacte, donc équicontinue, tandis que les

$\tilde{f}(t, \cdot) - \tilde{f}(t_0, \cdot)$ tendent fortement vers zéro dans $\mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$; on en conclut

que ce dernier terme tend vers zéro quelle que soit la suite considérée,

donc aussi bien lorsque t tend vers t_0 au sens de la topologie de T_0 ,

d'après l'argument usuel de dénombrabilité d'un système fondamental de voisinages.

Ayant établi (5.6) dans le cas $\text{supp } \tilde{f} \subset T_0 \times L_0$, on y ramène le cas général en considérant un recouvrement de P par des $T_i \times L_i$ et une partition de l'unité par des $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R}^+)$, $\text{supp } \tilde{\alpha}_i \subset T_i \times L_i$, tels que sur tout compact de P , les $\tilde{\alpha}_i$ sont identiquement nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle &= \sum_i \frac{d}{dt} \langle m^t, \tilde{\alpha}_i(t, \cdot) \tilde{f}(t, \cdot) \rangle \\ &= \sum_i \langle m^{t_0}, \tilde{\alpha}_i(t_0, \cdot) \tilde{f}(t_0, \cdot) \rangle \\ &\quad + \sum_i \langle m^{t_0}, \frac{\partial \tilde{\alpha}_i}{\partial t}(t_0, \cdot) \tilde{f}(t_0, \cdot) + \tilde{\alpha}_i(t_0, \cdot) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t_0, \cdot) \rangle. \end{aligned}$$

Cela donne (5.6) puisque

$$\sum_i \alpha_i(t_0, \cdot) = 1, \quad \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t_0, \cdot) = 0. \quad \square$$

Nous établissons maintenant que toute correspondance localement vaguement continue possède des primitives :

PROPOSITION 5.G. Soit $t \rightarrow m^t$ une correspondance localement vaguement continue d'un intervalle ouvert T vers les $\mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$. Alors il existe une correspondance $t \rightarrow m^t \in \mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$ (définie à l'addition près d'une correspondance localement constante par rapport à t arbitraire) dont m^t est dérivée vague pour tout $t \in T$.

Démonstration. Soient T_0 un sous-intervalle de T et L_0 un ouvert de L tels que $T_0 \times L_0 \subset P$. Soit $f \in \mathcal{D}'^0(L_0, \mathbb{R})$; la fonction réelle $t \rightarrow \langle m^t, f \rangle$ est continue d'après l'hypothèse. Choisissons $t_0 \in T_0$ et posons

$$(5.7) \quad \langle n^t, f \rangle = \int_{t_0}^t \langle \dot{m}^\tau, f \rangle d\tau .$$

Pour chaque $t \in T_0$ la forme linéaire $f \rightarrow \langle n^t, f \rangle$ est une mesure sur L_0 . En effet, lorsque τ parcourt l'intervalle d'intégration ci-dessus, les $\dot{m}^\tau|_{L_0}$ décrivent une partie vaguement compacte de $\mathcal{D}'^0(L_0, \mathbb{R})$, donc équi-continue ; pour K compact de L_0 , il existe ainsi une constante $M(t, K)$ telle que pour tout τ dans l'intervalle en question

$$\text{supp } f \subset K \Rightarrow |\langle \dot{m}^\tau, f \rangle| \leq M(t, K) \sup |f|$$

Par suite

$$\text{supp } f \subset K \Rightarrow |\langle n^t, f \rangle| \leq M(t, K) |t - t_0| \sup |f| .$$

Il résulte de (5.7) que, pour tout $t \in T_0$,

$$(5.8) \quad \frac{d}{dt} n^t = \dot{m}^t|_{L_0}$$

au sens de la topologie vague de $\mathcal{D}'^0(L_0, \mathbb{R})$.

On a supposé que l'ouvert $P \subset T \times L$ possédait une base dénombrable d'ouverts ; il existe donc (cf. [6]) un recouvrement de P par des ouverts de la forme $T_i \times L_i$, avec T_i sous-intervalle ouvert de T et L_i ouvert de L , et une famille de fonctions ≥ 0 , soit $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$, telles que $\text{supp } \tilde{\alpha}_i \subset T_i \times L_i$, que sur tout compact de P un nombre fini seulement d'entre elles soient non identiquement nulles et que $\sum_i \tilde{\alpha}_i = 1$. Pour chaque indice i on construit par le procédé ci-dessus une application $t \rightarrow n_i^t$ de T_i dans $\mathcal{D}'^0(L_i, \mathbb{R})$ admettant $\dot{m}^t|_{L_i}$ comme dérivée vague.

Définissons la fonctionnelle m^t , pour tout $f \in \mathcal{D}^0(P^t, \mathbb{R})$, par

$$\langle m^t, f \rangle = \sum_i \langle n_i^t, \tilde{\alpha}_i(t, \cdot) f \rangle .$$

Si K_t est un compact de P^t et $\text{supp } f \subset K_t$, les termes non nuls de cette somme correspondent à $i \in I(t, K_t)$, partie finie de l'ensemble d'indices. On en conclut que m^t est une mesure scalaire sur P^t . Pour établir que \dot{m}^t est la dérivée vague de $t \rightarrow m^t$, on considère t_0, T_0, L_0 comme dans la Définition 5.E. Soit $f \in \mathcal{D}^0(L_0, \mathbb{R})$; soit H un voisinage compact de t_0 dans T_0 . Sur le compact $H \times \text{supp } f$, un nombre fini des α_i est non identiquement nul, d'où l'existence de la dérivée au point t_0 .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle m^t, f \rangle &= \sum_i \frac{d}{dt} \langle n_i^t, \alpha_i(t, \cdot) f \rangle \\ &= \sum_i \langle \dot{m}_i^{t_0}, \alpha_i(t_0, \cdot) f \rangle + \langle n_i^{t_0}, \frac{\partial \alpha_i}{\partial t}(t_0, \cdot) f \rangle \\ &= \langle \dot{m}^{t_0}, f \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Le programme décrit dans l'Introduction nous conduit maintenant à considérer l'intégrale, par rapport à m^t , d'une fonction $L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ non nécessairement continue. Limitons-nous ici à la fonction caractéristique d'un compact K ; on note classiquement

$$\langle m^t, \chi_K \rangle = m^t(K),$$

mesure du compact K relativement à m^t .

Si $t \rightarrow m^t$ est une correspondance de T vers les $\mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$ et si K est un compact de P^{t_0} , il existe un voisinage ouvert L_0 de K dans L et un voisinage ouvert de T_0 de t_0 dans T tels que $T_0 \times L_0 \subset P$. Alors l'étude, au voisinage de t_0 , de la fonction réelle $t \rightarrow m^t(K)$ relève de la Proposition suivante:

PROPOSITION 5.H. Soit $t \rightarrow m^t$ une application de l'intervalle ouvert T dans $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, continûment dérivable au sens de la topologie vague, de dérivée \dot{m}^t . Alors, pour tout compact K de L , la fonction réelle $t \rightarrow m^t(K)$ est continue et localement lipschitzienne ; la fonction réelle $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$ est borélienne, localement bornée et constitue la dérivée de la précédente dans les sens usuels suivants : au sens presque partout pour la mesure de Lebesgue de T , au sens des distributions sur T et au sens que $t \rightarrow m^t(K)$ est une intégrale indéfinie de $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$.

Démonstration. Soit K un compact de L ; il existe une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$, à support dans un voisinage compact K' de K , à valeurs dans $[0, 1]$, convergeant simplement vers la fonction caractéristique χ_K . Par le théorème de convergence dominée, on a, pour chaque t

$$(5.9) \quad \lim \langle \dot{m}^t, f_n \rangle = \dot{m}^t(K)$$

$$(5.10) \quad \lim \langle m^t, f_n \rangle = m^t(K) .$$

Soit $[u, v]$ un sous-intervalle compact de T ; d'après les hypothèses, la fonction $t \rightarrow \langle \dot{m}^t, f_n \rangle$ est continue et

$$(5.11) \quad \int_u^v \langle \dot{m}^t, f_n \rangle dt = \langle m^v, f_n \rangle - \langle m^u, f_n \rangle$$

En vertu de la continuité vague, les (\dot{m}^t) , $t \in [u, v]$, forment une partie vaguement compacte de $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$; les f_n sont dans une boule de $\mathcal{D}'^0(L, \mathbb{R})$. On voit donc par (5.9) que la fonction $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$ est borélienne et localement bornée et qu'on peut appliquer au premier membre de (5.11) le théorème de convergence dominée : bref

$$\int_u^v \dot{m}^t(K) dt = m^v(K) - m^u(K)$$

Cela prouve que $t \rightarrow m^t(K)$ est lipschitzienne et constitue une intégrale indéfinie de $t \rightarrow \dot{m}^t(K)$. Que cette dernière fonction soit dérivée de la première, au sens des distributions et au sens presque partout, en résulte classiquement. \square

EXEMPLE 5.K. Prenons $L = \mathbb{R}^2$, $T = \mathbb{R}$ et prenons comme mesure \dot{m}^t la mesure ponctuelle de masse 1 au point $(t, 0)$. Alors $t \rightarrow m^t$ est vaguement continue ; une primitive est $t \rightarrow m^t$, définie pour tout $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par

$$\langle m^t, f \rangle = \int_{-\infty}^t \langle \dot{m}^\tau, f \rangle d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau, 0) d\tau.$$

C'est-à-dire que m^t est la mesure distribuée sur l'intervalle $]-\infty, t]$ de l'axe des x^1 avec la densité 1 par rapport à la mesure de Lebesgue. On constate que, pour tout compact K de \mathbb{R}^2 , la fonction $t \rightarrow m^t(K)$ est la fonction caractéristique de

$$H = \{t \in \mathbb{R} : (t, 0) \in K\}$$

ensemble compact de \mathbb{R} . Et $m^t(K)$ s'exprime comme la mesure de Lebesgue de $]-\infty, t] \cap H$.

Il reste enfin à établir le lien entre les correspondances $t \rightarrow m^t$ et les mesures \tilde{m} sur P considérées au début de ce paragraphe. Ce lien repose sur la notion de désintégration ; la définition ci-dessous est cohérente avec un sens général de ce mot (cf. [2], chap. VI, § 3) :

DEFINITION 5.L. On dira que $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ possède une désintégration selon la mesure de Lebesgue de T s'il existe pour chaque $t \in T$ une mesure $m^t \in \mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ on ait, en notant f^t la fonction $\ell \rightarrow \tilde{f}(t, \ell)$

$$(5.12) \quad \langle \tilde{m}, \tilde{f} \rangle = \int_T \langle m^t, f^t \rangle dt.$$

Cette écriture implique l'hypothèse que, pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$, la fonction réelle $t \rightarrow \langle m^t, f^t \rangle$ est Lebesgue-intégrable sur T . Vu la Proposition 5.D., c'est ce qui a lieu si $t \rightarrow m^t$ est une correspondance localement vaguement continue (cf. Définition 5.C.), auquel cas nous dirons que la désintégration est localement vaguement continue.

Inversement d'ailleurs, si une correspondance localement vaguement continue $t \rightarrow m^t \in \mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$ est donnée, la fonctionnelle définie pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ par

$$\tilde{f} \rightarrow \int_T \langle m^t, f^t \rangle dt$$

est une mesure. On le voit par le même type de raisonnement que dans la démonstration de la Proposition 5.G., en utilisant, là encore, une partition de l'unité si \tilde{f} n'a pas son support dans un $T_0 \times L_0$.

PROPOSITION 5.M. Soit $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$; on suppose que la distribution $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}$ est une mesure sur P admettant une désintégration selon la mesure de Lebesgue, localement vaguement continue, écrite

$$(5.13) \quad \left\langle \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle = \int_T \langle m^t, f^t \rangle dt .$$

Alors \tilde{m} possède une désintégration localement vaguement continue de la forme (5.12) et la correspondante $t \rightarrow m^t$ admet pour tout $t \in T$ la mesure m^t comme dérivée vague (cf. Définition 5.E).

Démonstration. D'après la Proposition 5.G., la correspondance $t \rightarrow m^t$ possède une primitive ; notons-la $t \rightarrow n^t \in \mathcal{D}'^0(P^t, \mathbb{R})$. Définissons $\tilde{n} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ par

$$\langle \tilde{n}, \tilde{f} \rangle = \int_T \langle n^t, f^t \rangle dt .$$

La distribution $\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}$ est définie pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R})$ par

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle = - \left\langle \tilde{n}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right\rangle = - \int_T \langle n^t, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \cdot) \rangle dt$$

Or, d'après la Proposition 5.F.,

$$\langle n^t, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(t, \cdot) \rangle = \frac{d}{dt} \langle n^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle - \langle m^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle .$$

Comme $t \rightarrow \langle n^t, \tilde{f}(t, \cdot) \rangle$ a un support compact dans T , il reste, vu (5.13),

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle = \int_T \langle m^t, f^t \rangle dt = \left\langle \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t}, \tilde{f} \right\rangle .$$

La différence $\tilde{p} = \tilde{m} - \tilde{n}$ est donc localement constante par rapport à t (cf. Proposition 5.A). Il reste à prouver que cela implique l'existence d'une désintégration

$$\langle \tilde{p}, \tilde{f} \rangle = \int_T \langle p^t, f^t \rangle dt$$

où la correspondance $t \rightarrow p^t \in \mathcal{D}'(P^t, \mathbb{R})$ est localement constante. De fait, on invoque, comme dans les démonstrations antérieures, un recouvrement localement fini de P par des $T_i \times L_i$ et une partition de l'unité $\tilde{\alpha}_i$ subordonnée. Sur le support de \tilde{f} , seul un nombre fini des $\tilde{\alpha}_i$ est non nul. La restriction de \tilde{p} à $T_i \times L_i$ ayant la forme $\theta_i \otimes p_i$, avec θ_i mesure de Lebesgue de T_i et $p_i \in \mathcal{D}'(L_i, \mathbb{R})$, on écrit

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}, \tilde{f} \rangle &= \langle \tilde{p}, \sum_i \tilde{\alpha}_i \tilde{f} \rangle \\ &= \sum_i \int_{T_i} \langle p_i, \alpha_i^t f^t \rangle dt \\ &= \sum_i \int_{T_i} \langle \alpha_i^t p_i, f^t \rangle dt \end{aligned}$$

La mesure $\alpha_i^t p_i \in \mathcal{D}'(L_i, \mathbb{R})$ ayant un support compact dans L_i se prolonge en un élément de $\mathcal{D}'(P^t, \mathbb{R})$ de même support, et cela pour tout $t \in T$ (pour t tel que la fonction α_i^t soit nulle, $\alpha_i^t p_i$ est la mesure zéro sur P^t). On écrit donc

$$\langle \tilde{p}, \tilde{f} \rangle = \int_T \langle \sum_i \alpha_i^t p_i, f^t \rangle dt$$

ce qui est la désintégration attendue, avec

$$p^t = \sum_i \alpha_i^t p_i.$$

La correspondance $t \rightarrow p^t \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$ a bien une dérivée vague nulle car, si on considère un $T_0 \times L_0 \subset P$, la restriction de \tilde{p} à $T_0 \times L_0$ a la forme $\theta_0 \otimes p_0$ c'est-à-dire que pour toute $\tilde{f} \in \mathcal{D}^0(T_0 \times L_0, \mathbb{R})$

$$\int_{T_0} \langle p^t, f^t \rangle dt = \int_{T_0} \langle p_0, f^t \rangle dt$$

Donc pour tout $t \in T_0$, la restriction de p^t à L est égale à p_0 .

Bref, on a bien (5.12) avec $m^t = n^t + p^t$ et la dérivée vague de $t \rightarrow m^t$ est égale à \dot{m}^t . \square

6. CINEMATIQUE DES MESURES SCALAIRES

Dans tout ce qui suit, la situation et les notations sont celles du § 2 : la variété Λ est en mouvement \mathcal{C}^1 dans la variété L sur l'intervalle de temps T .

Voici d'abord une propriété simple dont la démonstration n'exige pas la machinerie du § 5 :

PROPOSITION 6.4. Soit $m \in \mathcal{D}^0(L, \mathbb{R})$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}^1(\Lambda, \mathbb{R})$, éléments constants par rapport à t . Pour chaque $t \in T$ on note

$$(6.1) \quad \mu^t = p_t^{-1}(m) \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \mathbb{R})$$

$$(6.2) \quad f^t = \varphi \circ \pi \in \mathcal{D}^1(p_t^{-1}(\Lambda), \mathbb{R}).$$

Alors, la fonction réelle

$$t \rightarrow \langle \mu^t, \varphi \rangle = \langle m, f^t \rangle$$

est \mathcal{C}^1 sur T ; sa dérivée au point t a pour valeur

$$(6.3) \quad -\langle \text{div}(\sigma^t \mu^t), \varphi \rangle = \langle \text{div}(s^t m), f^t \rangle$$

où $s^t \in \mathcal{C}^1(P^t, L^t)$ et $\sigma^t \in \mathcal{C}^1(\Lambda, \Lambda^t)$ sont les champs de vitesses $\ell \rightarrow s(t, \ell)$ et $\lambda \rightarrow \sigma(t, \lambda)$ définis en (2.2) et (2.3).

Autrement dit, l'application $t \rightarrow \mu^t$ de T dans $\mathcal{D}'(\Lambda, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'^1(\Lambda, \mathbb{R})$ est dérivable au sens de la topologie faible de $\mathcal{D}'^1(\Lambda, \mathbb{R})$; l'élément dérivé au point t est $-\text{div}(\sigma^t \mu^t) \in \mathcal{D}'^1(\Lambda, \mathbb{R})$.

Démonstration. Les règles usuelles du calcul différentiel donnent, pour chaque $\ell \in P^t$, avec $\lambda = \pi_t(\ell)$,

$$(6.4) \quad \frac{d}{dt} f^t(\ell) = \frac{d}{dt} \varphi(\pi_t(\ell)) = \dot{\pi}_t(\ell) \cdot \text{grad} \varphi(\pi_t(\ell)) = \sigma(t, \lambda) \cdot \text{grad} \varphi(\lambda),$$

où le point se rapporte à la dualité entre Λ_λ^t et Λ_λ^{t*} . D'après la Proposition 4.A et la relation (2.8), le dernier membre s'écrit aussi bien $-\sigma(t, \ell) \cdot \text{grad} f^t(\ell)$, ce qui constitue une fonction réelle continue sur l'ouvert

$$(6.5) \quad P = \{(t, \ell) \in T \times L : \ell \in P^t\}.$$

Soit K un voisinage compact d'un point t_0 de T . L'application continue $(t, \lambda) \rightarrow P_t(\lambda)$ donne du compact $K \times \text{supp} \varphi$ une image compacte dans L qui, pour tout $t \in K$ contient le support de f^t . On invoque alors la formule des accroissements finis pour la fonction $t \rightarrow f^t(\ell)$, avec l'expression (6.4) de sa dérivée, puis la continuité de la fonctionnelle m , pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \langle m, f^t \rangle = -\langle m, s^t \text{grad} f^t \rangle$$

Le second membre est fonction continue de t , vu la continuité de

$s^t \text{grad } f^t$. Par ailleurs il s'écrit

$$- \langle s^t m, \text{grad } f^t \rangle = \langle \text{div}(s^t m), f^t \rangle .$$

L'égalité (6.3) résulte enfin des Propositions 4.B et 4.C. \square

REMARQUE 6.B. Les expressions écrites en (6.3) ne font pas apparaître les gradient de φ ou f^t ; s'il se trouve que $\text{div}(\sigma^t \mu^t)$ soit une mesure sur Λ (ce qui équivaut à dire que $\text{div}(s^t m)$ est une mesure sur $p_t(\Lambda)$) elles auront un sens pour $\varphi \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \mathbb{R})$. La question se pose alors de savoir si (6.3) fournit encore la dérivée de la fonction réelle $t \rightarrow \langle \mu^t, \varphi \rangle$; autrement dit, est-ce que la mesure $-\text{div}(\sigma^t \mu^t)$ constitue la dérivée de l'application $t \rightarrow \mu^t$ au sens de la topologie vague de $\mathcal{D}'^0(\Lambda, \mathbb{R})$? Pour répondre, nous mettons d'abord en place le formalisme suivant :

Soient les variétés produits $\tilde{L} = T \times L$ et $\tilde{\Lambda} = T \times \Lambda$. On définit une application \tilde{p} de $\tilde{\Lambda}$ dans \tilde{L} en posant, pour tout $(t, \lambda) \in \tilde{\Lambda}$,

$$(6.6) \quad \tilde{p}(t, \lambda) = (t, p(t, \lambda)) .$$

L'image $\tilde{p}(\tilde{\Lambda})$ est la partie P de \tilde{L} définie en (6.5) ; on a déjà observé au § 2 que c'est un ouvert de \tilde{L} . L'application \tilde{p} est injective, continûment différentiable et de rang maximum ; son inverse est l'application $\tilde{\pi} : P \rightarrow \tilde{\Lambda}$ définie par

$$(6.7) \quad \tilde{\pi}(t, \ell) = (t, \pi(t, \ell)) .$$

L'espace vectoriel tangent en tout point de la variété T sera identifié à \mathbb{R} , ce qui veut dire que l'on privilégie pour toute la suite la carte de T que constitue son injection naturelle dans \mathbb{R} . L'espace

vectoriel tangent au point (t, λ) de $\tilde{\Lambda}$ est donc identifié à $\mathbb{R} \times \Lambda_\lambda^1$; l'espace vectoriel tangent au point (t, ℓ) de \tilde{L} est identifié à $\mathbb{R} \times L_\ell^1$. L'application linéaire $\tilde{p}'(t, \lambda)$, tangente à \tilde{p} au point $(t, \lambda) \in \tilde{\Lambda}$, s'écrit, avec les notations de § 2,

$$(6.8) \quad (dt, d\lambda) \rightarrow (dt, \dot{p}(t, \lambda)d\lambda + p'(t, \lambda)d\lambda).$$

Donc, si $\ell = p(t, \lambda)$, le vecteur $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \Lambda_\lambda^1$ a pour image par $\tilde{p}'(t, \lambda)$

$$(1, \dot{p}(t, \lambda)) = (1, s(t, \ell)) \in \mathbb{R} \times L_\ell^1,$$

où s est le vecteur défini en (2.2) ; de même, avec σ défini en (2.3), le vecteur $(0, \sigma(t, \lambda)) \in \mathbb{R} \times \Lambda_\lambda^1$ a pour image, vu (2.9),

$$(0, p'(t, \lambda)\sigma(t, \lambda)) = (0, -s(t, \ell)) \in \mathbb{R} \times L_\ell^1.$$

Bref :

PROPOSITION 6.C. Par le difféomorphisme \tilde{p} de $\tilde{\Lambda}$ sur P , le champ vectoriel $(1, 0)$ a pour image $(1, s)$, le champ vectoriel $(0, \sigma)$ a pour image $(0, -s)$, le champ vectoriel $(1, \sigma)$ a pour image $(1, 0)$.

Nous exprimons maintenant la divergence de certaines mesures vectorielles sur $\tilde{\Lambda}$ ou P .

Soit $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$; le produit de cette mesure scalaire par le champ vectoriel continu $(1, 0)$ est une mesure vectorielle ; la divergence de cette mesure vectorielle est la fonctionnelle définie pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\rightarrow - \langle (1, 0)\tilde{m}, \text{grad } \tilde{f} \rangle \\ &= - \langle \tilde{m}, (1, 0).\text{grad } \tilde{f} \rangle = - \langle \tilde{m}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \rangle. \end{aligned}$$

Bref, avec la notation du § 5 ,

$$(6.9) \quad \operatorname{div}[(1,0) \tilde{m}] = \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} .$$

Soit, par ailleurs, $\tilde{b} = (0,b)$ un champ vectoriel continu sur P , à composante temporelle nulle, c'est-à-dire que $\ell \rightarrow b(t, \ell) \in L_{\ell}^1$ est un champ vectoriel sur l'ouvert $P^t = \{\ell \in L : (t, \ell) \in P\}$, dépendant de t d'une manière continue par rapport au couple de variable $(t, \ell) \in P$. Pour chaque $t \in T$, on notera b^t l'élément de $\mathcal{C}(P, A^1)$ ainsi défini. Alors \tilde{m} désignant comme ci-dessus une mesure scalaire sur P on considère la divergence de la mesure vectorielle $\tilde{b}\tilde{m}$, c'est-à-dire la fonctionnelle définie pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{D}^1(P, \mathbb{R})$ par

$$(6.10) \quad \tilde{f} \rightarrow - \langle \tilde{b} \tilde{m}, \operatorname{grad} \tilde{f} \rangle = - \langle \tilde{m}, \tilde{b} \cdot \operatorname{grad} \tilde{f} \rangle$$

En notant, comme au § 5, f^t la fonction $\ell \rightarrow \tilde{f}(t, \ell)$, élément de $\mathcal{D}^1(P^t, \mathbb{R})$, on a pour $(t, \ell) \in P$

$$\tilde{b} \cdot \operatorname{grad} \tilde{f} = b^t \cdot \operatorname{grad} f^t$$

(le . du premier membre est relatif à la dualité entre $\tilde{L}_{(t, \ell)}^1$ et $\tilde{L}_{(t, \ell)}^{1*}$; celui du second membre à la dualité entre L_{ℓ}^1 et L_{ℓ}^{1*}). Cette expression est utile dans le cas où \tilde{m} possède, au sens de la Définition 5.L, une désintégration selon la mesure de Lebesgue de T ; dans ce cas l'expression (6.10) s'écrit

$$\begin{aligned} - \langle \tilde{m}, \tilde{b} \cdot \operatorname{grad} \tilde{f} \rangle &= - \int \langle m^t, b^t \cdot \operatorname{grad} f^t \rangle dt \\ &= \int_T \langle \operatorname{div}(b^t m^t), f^t \rangle dt \end{aligned}$$

où, pour chaque t , $\operatorname{div}(b^t m^t) \in \mathcal{D}^{1'}(P^t, \mathbb{R})$. Donc

$$(6.11) \quad \langle \operatorname{div}[(0,b)\tilde{m}], \tilde{f} \rangle = \int_T \langle \operatorname{div}(b^t m^t), f^t \rangle dt ,$$

ce qu'on peut appeler une désintégration de l'élément $\operatorname{div}[(0,b)\tilde{m}] \in \mathcal{D}^{1'}(P, \mathbb{R})$.

En rapprochant (6.9) de la Proposition 6.C., il vient :

PROPOSITION 6.D. Soit $\tilde{\mu}$ une mesure sur $\tilde{\Lambda} = T \times \Lambda$; soit \tilde{m} son image sur P par le difféomorphisme \tilde{p} . Alors avec les champs s et σ définis en (2.2) et (2.3), on a

$$(6.12) \quad \tilde{p} \left(\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} + \text{div}[(0, s) \tilde{m}]$$

$$(6.13) \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} = \tilde{\pi} \left(\frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \right) - \text{div}[(0, \sigma) \tilde{\mu}] .$$

En rapprochant de la Proposition 5.A., on obtient :

COROLLAIRE 6.F. La mesure $\tilde{m} \in \mathcal{D}'^0(P, \mathbb{R})$ est localement constante par rapport à t si et seulement si

$$(6.14) \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + \text{div}[(0, \sigma) \tilde{\mu}] = 0 .$$

La mesure $\tilde{\mu} \in \mathcal{D}'^0(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ est égale au produit de la mesure de Lebesgue de T par une mesure sur Λ si et seulement si

$$(6.15) \quad \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} + \text{div}[(0, s) \tilde{m}] = 0 .$$

Pour l'exploitation de ce corollaire, on remarque en outre :

PROPOSITION 6.G. Si la mesure \tilde{m} est localement constante par rapport à t , la mesure $\tilde{\mu}$ possède une désintégration vaguement continue.

Si la mesure $\tilde{\mu}$ est le produit de la mesure de Lebesgue de T par une mesure sur Λ , la mesure \tilde{m} possède une désintégration vaguement continue.

Démonstration. Supposons \tilde{m} localement constante par rapport à t ; on a vu, en démontrant la Proposition 5.M, que cela implique une désintégration

$$\langle \tilde{m}, \tilde{f} \rangle = \int_{\mathbb{P}} \langle m^t, f^t \rangle dt$$

où $t \rightarrow m^t \in \mathcal{D}'(\mathbb{P}^t, \mathbb{R})$ est localement constante, donc localement vaguement continue. Pour obtenir une semblable désintégration pour $\tilde{\mu}$, image de \tilde{m} par $\tilde{\pi}$, il suffit de prendre $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T} \times \Lambda, \mathbb{R})$ et $\tilde{f} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\pi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{P}, \mathbb{R})$, d'où

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{m}, \tilde{f} \rangle$$

On note comme d'habitude $\varphi^t = \tilde{\varphi}(t, \cdot)$; si μ^t désigne l'image de m^t par π_t , on a, pour tout $t \in \mathbb{T}$,

$$\langle \mu^t, \varphi^t \rangle = \langle m^t, f^t \rangle$$

Donc

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle \mu^t, \varphi^t \rangle dt$$

Noter que $t \rightarrow \mu^t$ est vaguement continue car, si on choisit $\tilde{\varphi}$ constante par rapport à t , la continuité de la fonctionnelle $t \rightarrow (\mu^t, \varphi) = \langle m^t, f^t \rangle$ est évidente.

La seconde partie de la Proposition s'établit de même, en échangeant les rôles de L et Λ . \square

Ce qui suit apporte la réponse à la question posée dans la Remarque 6.B.

PROPOSITION 6.H. On suppose que \tilde{m} est localement constante par rapport à t ; soit $t \rightarrow \mu^t$ la désintégration de $\tilde{\mu}$ (cf. Proposition 6.G). On suppose que, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, la distribution $\text{div}(\sigma^t \mu^t)$ est une mesure sur Λ , dépendant de t de manière vaguement continue (de façon

équivalente, la distribution $\text{div}(s^t_m{}^t)$ est une mesure sur P^t dépendant de t de manière localement vaguement continue). Alors, la distribution sur $T \times \Lambda$

$$(6.16) \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} = -\text{div}[(0, \sigma) \tilde{\mu}]$$

(cf. Proposition 6.D) est une mesure qui admet la désintégration

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t}, \tilde{\varphi} \right\rangle = - \int_T \langle \text{div}(\sigma^t \mu^t), \varphi^t \rangle dt$$

(pour $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}^0(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ et $\varphi^t = \tilde{\varphi}(t, \cdot)$). L'application $t \rightarrow \mu^t$ de T dans $\mathcal{D}^0(\Lambda, \mathbb{R})$ est continûment dérivable pour la topologie vague, de dérivée égale à $-\text{div}(\sigma^t \mu^t)$.

Démonstration. En vertu de (2.8), (2.9) et de la Proposition 4.C, la mesure vectorielle $\sigma^t \mu^t$ sur Λ admet pour image par le difféomorphisme p_t la mesure vectorielle $-s^t_m{}^t$ sur P^t . D'après la Proposition 4.B, la distribution $\text{div}(\sigma^t \mu^t)$ admet pour image $-\text{div}(s^t_m{}^t)$. L'une est donc une mesure si et seulement si l'autre l'est. Si $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}^0(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ et $\tilde{f} \in \mathcal{D}^0(P, \mathbb{R})$ se correspondent dans le difféomorphisme \tilde{p} , on a

$$\forall t \in T : \langle \text{div}(\sigma^t \mu^t), \varphi^t \rangle = - \langle \text{div}(s^t_m{}^t), f^t \rangle .$$

En prenant \tilde{f} à support dans un $T_0 \times L_0 \subset P$, constante par rapport à t sur un voisinage de t_0 dans T_0 , on voit (cf. Proposition 5.D) que la continuité vague de $t \rightarrow \text{div}(\sigma^t \mu^t)$ entraîne la continuité vague locale de $t \rightarrow \text{div}(s^t_m{}^t)$. Que cette dernière entraîne la première s'établit de même, en faisant en outre appel à une partition de l'unité.

La distribution $\text{div}[(0, \sigma) \tilde{\mu}]$ est la fonctionnelle définie pour tout $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}^1(T \times \Lambda, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} &\rightarrow - \langle \tilde{\mu}, (0, \sigma) \cdot \text{grad } \tilde{\varphi} \rangle \\
&= - \int_{\mathbb{T}} \langle \mu^t, \sigma^t \cdot \text{grad } \varphi^t \rangle dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \langle \text{div}(\sigma^t \mu^t), \varphi^t \rangle dt.
\end{aligned}$$

Comme on l'a observé dans les commentaires de la Définition 5.L, la continuité vague de $t \Rightarrow \text{div}(\sigma^t \mu^t)$ fait que cette fonctionnelle est une mesure. Vu l'égalité (6.16), c'est aussi bien la distribution $\frac{\tilde{\mu}}{\partial t}$ qui se trouve être une mesure sur $\mathbb{T} \times \Lambda$, avec une désintégration vaguement continue. On invoque alors la Proposition 5.M. \square

Avec cette Proposition s'achève l'exécution de notre programme. Les hypothèses formulées entraineront notamment ceci : Soit K un compact constant de la variété Λ ; vu la Proposition 5.H, la fonction réelle

$$t \rightarrow \mu^t(K) = m(p_t(K))$$

est localement lipschitzienne et admet pour dérivée dans les sens usuels (i.e. au sens des distributions, au sens Lebesgue-presque partout, au sens des intégrales indéfinies) la fonction réelle

$$t \rightarrow - \langle \text{div } \sigma^t \mu^t, \chi_K \rangle = \langle \text{div } s^t_m, \chi_{p_t(K)} \rangle.$$

C'est la généralisation attendue de la relation (1.1). En particulier, la continuité vague locale de $t \rightarrow \text{div } s^t_m$ est banalement assurée si le mouvement est stationnaire (cf. § 3), mais il reste toujours à contrôler que cette distribution est une mesure.

7. REFERENCES

- [1] J.J. MOREAU, Sur la notion de système de référence fluide et ses applications en aérodynamique, Premier Congrès National Annuel de l'Aviation Française, rapport n° 368, Pub. du Ministère de l'Air, 1946 (pour photocopie au CEDOCAR, référence : CNAF, Mémoire M.87).
- [2] N. BOURBAKI, Intégration, Hermann, Paris.
- [3] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, t I et II, Hermann, Paris.
- [4] P. MALLIAVIN, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, Paris.
- [5] J. DIEUDONNE, Eléments d'analyse, t III, Gauthier-Villars, Paris.
- [6] G. DE RHAM, Variétés différentiables, Hermann, Paris.