



HAL
open science

Variations horizontales première et seconde d'une intégrale de trace

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Variations horizontales première et seconde d'une intégrale de trace. 1981.
hal-02309529

HAL Id: hal-02309529

<https://hal.science/hal-02309529>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1981, Exposé n° 3

VARIATIONS HORIZONTALES PREMIERE ET SECONDE
D'UNE INTEGRALE DE TRACE

J.J. MOREAU

I. INTRODUCTION .

Soit \mathcal{X} un espace euclidien homogène de dimension n ;
soit X l'espace vectoriel euclidien associé.

Soit Ω un ouvert de \mathcal{X} et soit $\theta : \Omega \rightarrow X \otimes X$ un champ
tensoriel du second ordre. Diverses lois physiques (en particulier
celles de la statique ou de la dynamique des milieux continus, sous des
hypothèses convenables) s'expriment sous la forme

$$(1.1) \quad \theta^{ij},_{i} = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire nullité du champ vectoriel divergence de θ . Cette écriture
suppose qu'un système de coordonnées cartésiennes (non nécessairement
orthonormées) a été choisi dans \mathcal{X} ; les θ^{ij} sont les composantes
deux fois contravariantes de $\theta(x)$; on note $,_i$ la dérivation partiel-
le par rapport à la coordonnée x^i du point $x \in \Omega$.

Reçu le 18 mars 1981.

Souvent il sera déclaré que (1.1) a lieu au sens des distributions sur Ω . Par abus de langage ; en fait ce ne sont pas les fonctions $x \rightarrow \theta^{ij}(x) \in \mathbb{R}$ qui constituent des distributions sur Ω , i.e. des éléments de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$, mais les mesures scalaires $\theta^{ij} d\omega$ où $d\omega$ désigne la mesure de Lebesgue sur Ω ; il faut naturellement supposer $\theta^{ij} \in L^1_{loc}(\Omega, d\omega ; \mathbb{R})$.

Dans tout ce qui suit, on considère, de façon plus générale, une mesure tensorielle (de Radon) sur Ω , notée dT , i.e. un élément de l'espace $\mathcal{D}'^0(\Omega, X \otimes X)$ des distributions d'ordre zéro sur Ω à valeurs tensorielles d'ordre 2. Ses composantes, relativement à la base choisie dans X sont notées dT^{ij} , éléments de $\mathcal{D}'^0(\Omega, \mathbb{R})$. Au lieu de (1.1) on va étudier la condition

$$(1.2) \quad (dT^{ij})_{,i} = 0$$

dont le premier membre définit les composantes de la distribution vectorielle $\text{div } dT$, élément de $\mathcal{D}'^1(\Omega, X)$.

L'objet de ce rapport est une caractérisation variationnelle des mesures tensorielles symétriques et bornées vérifiant (1.2). Le mot "variationnel" a subi dans une période récente un glissement de sens : on en vient à qualifier de variationnelle toute formulation mettant en œuvre une dualité d'espaces vectoriels (certes, l'assertion appelée traditionnellement "lemme du calcul des variations" est bien une propriété de ce type ; mais le calcul des variations ne se réduit pas à cela. Pour en revenir à une perspective plus saine, l'Introduction du traité de L. Schwartz, Théorie des distributions, ouvrage "dualitaire" s'il en est, ne présente nullement la théorie en question comme variationnelle).

Ici (1.2) est banalement une assertion dualitaire, puisqu'elle signifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, X) : \langle \varphi^j_{,i}, dT^{ij} \rangle = 0 .$$

On expliquera dans la conclusion de ce Rapport en quoi le résultat atteint est, au contraire, variationnel au sens propre.

Est définie pour toute mesure tensorielle bornée la fonctionnelle intégrale de la trace, exprimée, si la base utilisée dans X est orthonormée, par

$$(1.3) \quad I(dT) = \int dT^{ii} .$$

On vérifierait facilement par un calcul direct que la mesure scalaire dT^{ii} (avec, comme d'habitude, une sommation en i), dite mesure trace (euclidienne) de la mesure tensorielle, est indépendante du choix de cette base orthonormée. On aura besoin dans la suite des remarques suivantes : Une variante multidimensionnelle du théorème de Radon-Nikodym (ou, si l'on préfère, un théorème sur les mesures à valeurs dans un espace de Banach de dimension finie ; cf. Bourbaki [1] , §2, n° 4, Proposition 9) assure l'existence d'une mesure ≥ 0 bornée dm et de fonctions $T_m^{ij} \in L^\infty(\Omega, dm ; \mathbb{R})$ (définies à une modification arbitraire près sur tout ensemble dm -négligeable) telles que $T^{ij} = T_m^{ij} dm$; cette représentation n'est évidemment pas unique. Alors, en supposant toujours la base orthonormée,

$$(1.4) \quad I(dT) = \int_m T_m^{ii} dm .$$

Il importe pour la suite de s'affranchir des bases orthonormées ; rappelons que, pour un simple espace vectoriel, non muni a priori d'un

produit scalaire, c'est seulement à un tenseur du second ordre de type mixte (auquel correspond un endomorphisme de l'espace vectoriel) que s'associe canoniquement un scalaire trace. Ici, X étant euclidien, on notera g le tenseur deux fois covariant, symétrique, associé à la forme bilinéaire produit scalaire ; pour tout tenseur deux fois contractant A , le produit deux fois contracté $g_{ij} A^{ji}$ est un scalaire noté $g : A$, indépendant de la base employée ; on dira que c'est la trace euclidienne de $A \in X \otimes X$; si la base est orthonormée $g_{ij} = \delta_{ij}$ d'où $g : A = A^{ii}$. En base quelconque (1.3) et (1.4) s'écrivent donc

$$(1.5) \quad I(dT) = \int g_{ij} T_m^{ji} dm = \int g : T'_m dm = \int g : dT$$

La caractérisation variationnelle annoncée repose sur la technique des variations horizontales, introduite dans un précédent rapport de ce Séminaire [2] et dans [3]. Les fondements de cette technique sont rappelés dans le paragraphe 2 qui vient ; le paragraphe 3 présente son adaptation au cas de mesures vectorielles ou tensorielles.

2. TRANSPORT DE CHAMPS PAR UN PORTEUR .

Soit $\varphi \in \mathcal{D}^1(\Omega, \chi)$, i.e. un champ vectoriel continûment différentiable, à support dans Ω compact. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, et $\xi \in \Omega$ on note classiquement $(\exp \tau \varphi)\xi$ la valeur prise pour $t = \tau$ par l'intégrale de l'équation différentielle $dx/dt = \varphi(x)$ qui prend la valeur ξ pour $t = 0$. Le langage de la cinématique des milieux continus se révèle pratique : l'application $\exp \tau \varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ peut se visualiser comme la transition de l'instant 0 à l'instant τ pour les particules

d'un fluide que nous appellerons porteur, en mouvement stationnaire, de champ de vitesses φ . Visiblement, cette application admet $\exp(-\tau\varphi)$ pour inverse. Les propriétés classiques concernant la dépendance des intégrales d'une équation différentielle à l'égard des conditions initiales (cf. par exemple [4]) entraînent que $\exp \tau\varphi$ est, quel que soit τ , un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Ω sur lui-même, se réduisant à l'identité sur le complémentaire du support de φ . De façon équivalente on peut munir l'ensemble Λ des particules du porteur d'une structure de variété \mathcal{C}^1 -différentielle (nous dirons, plus brièvement, " \mathcal{C}^1 -variété") telle que le placement $\pi_\tau : \Lambda \rightarrow \Omega$ du fluide à chaque instant τ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, avec $\exp \tau\varphi = \pi_\tau \circ \pi_0^{-1}$.

On notera Λ'_λ l'espace vectoriel tangent au point λ de Λ ; pour chaque τ , l'application linéaire tangente $\pi'_\tau(\lambda, \cdot)$ est un isomorphisme de Λ'_λ sur X . Soit $\alpha \in \Lambda'_\lambda$, indépendant de τ ; son image $a(\tau) = \pi'_\tau(\lambda, \alpha)$ est un élément de X variable avec τ ou vecteur mobile.

Dans toute la suite, on notera $\delta/\delta\tau$ des dérivations par rapport à τ , prises avec λ fixé.

La classique "équation aux variations" de la théorie des équations différentielles a pour objet d'expliciter la dérivée de l'intégrale de $dx/dt = \varphi(x)$ par rapport à la condition initiale. Dans le contexte présent, elle signifie que $\tau \rightarrow a(\tau)$ est dérivable par rapport à τ , avec

$$(2.1) \quad \frac{\delta a^i}{\delta \tau} = \varphi^i_{,j} a^j .$$

On suppose là qu'un système de coordonnées cartésiennes (non nécessaire-

ment orthonormé) a été choisi dans \mathcal{X} ; les a^i , φ^i sont les composantes des vecteurs concernés relativement à la base correspondante de X . Les $\varphi^i_{,j}$ sont les dérivées partielles de $\varphi^i(x)$, relativement aux coordonnées cartésiennes de $x \in \Omega$, évaluées au point $x = \pi_\tau(\lambda)$ de \mathcal{X} .

On dit que le vecteur mobile ci-dessus $\tau \rightarrow a(\tau) \in X$, associé à la particule λ , est convecté par le porteur Λ .

Observer que l'équation aux variations et sa conséquence (2.1) restent vrais si φ dépend de τ , c'est-à-dire pour un porteur en mouvement non stationnaire. On fera dans ce cas l'hypothèse que, J désignant un ouvert de \mathbb{R} contenant les valeurs concernées de τ , l'application $\varphi : J \times \Omega \rightarrow X$ est continûment différentiable.

L'idée de convection par un porteur s'étend naturellement à un champ vectoriel. Un champ vectoriel ψ de la variété Λ est une correspondance associant à chaque $\lambda \in \Lambda$ un élément, noté $\psi(\lambda)$, de l'espace vectoriel tangent Λ'_λ (c'est, comme on dit en géométrie différentielle, une section du fibré tangent). Supposons ψ constant par rapport à τ ; chaque placement π_τ en donne une image, à savoir le champ vectoriel $v_\tau : \Omega \rightarrow X$

$$x \rightarrow v_\tau(x) = \pi'_\tau(\lambda, \psi(\lambda)) \quad , \quad \lambda = \pi_\tau^{-1}(x) \quad .$$

On dit que v_τ , champ vectoriel sur Ω , dépendant de τ est convecté par le porteur Λ . La formule (2.1) s'applique au calcul de la dérivée par rapport à τ de la valeur du scalaire v^i_τ au point mobile $x(\tau) = \pi_\tau(\lambda)$, ce qu'on appelle classiquement en mécanique des milieux continus une dérivée particulaire. On notera δ_φ une telle

dérivation et (2.1) donne

$$(2.2) \quad \delta_{\varphi} v_{\tau}^i = \varphi_{,j}^i v_{\tau}^j .$$

Dans le cas où φ est indépendant de τ , le lecteur familier avec le langage de la géométrie différentielle fera ici un rapprochement avec une dérivée de Lie associée au champ vectoriel φ ; même pour φ dépendant de τ on pourra rejoindre ce même concept en passant au produit $\mathbb{R} \times \Omega$. Selon [5], la suggestion d'employer le langage de la théorie des groupes de Lie en mécanique des fluides remonte à Zorawski, 1897. Ce langage ne nous apporterait rien ici.

A chaque $\lambda \in \Lambda$ s'associe de même l'espace cotangent Λ_{λ}^{i*} , dual de Λ_{λ}^i ; en tant qu'espace vectoriel euclidien, X sera identifié à son dual. Alors la transposée de $\pi'_{\tau}(\lambda, \cdot)$ est un isomorphisme de X sur Λ_{λ}^{i*} ; l'inverse de cette transposée, notée ${}^* \pi'_{\tau}(\lambda, \cdot)$ (dite application contragrédiente de $\pi'_{\tau}(\lambda, \cdot)$) est un isomorphisme de Λ_{λ}^{i*} sur X . Soit $\beta \in \Lambda_{\lambda}^{i*}$, indépendant de τ ; son image par ${}^* \pi'_{\tau}(\lambda, \cdot)$ est un élément $b(\tau)$ de X , c'est-à-dire un vecteur mobile : nous disons que $\tau \rightarrow b(\tau)$, associé à la particule $\lambda \in \Lambda$ est un vecteur mobile transvecté par le porteur.

Avec α et a considéré plus haut, on a, d'après la définition des images,

$$\forall \tau \in \mathbb{R} : a(\tau) \cdot b(\tau) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

où \cdot désigne le produit scalaire euclidien de X et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre Λ_{λ}^i et Λ_{λ}^{i*} . En rapprochant de (2.1), on peut en tirer, puisque α est arbitraire dans Λ_{λ} ,

$$\frac{\delta b_i}{\delta \tau} = - \varphi^j_{,i} b_j \quad ,$$

où les b_i sont les composantes covariantes de $b(\tau)$ par rapport à la base de X (c'est-à-dire les produits scalaires de $b(\tau)$ par les éléments de cette base ; cela s'identifie aux composantes usuelles, contravariantes, dans le cas orthonormé).

Un champ de covecteurs de Λ est une correspondance associant à tout $\lambda \in \Lambda$ un élément, soit $\theta(\lambda)$, de Λ^*_λ . Supposons θ indépendant de τ ; son image par chaque placement π_τ est le champ vectoriel w^τ défini sur Ω par

$$x \rightarrow w^\tau(x) = * \pi'^1(\lambda, \theta(\lambda)) \quad , \quad \lambda = \pi_\tau^{-1}(x) \quad .$$

Nous disons que ce champ vectoriel est transvecté par le porteur Λ . Un exemple typique de cette situation apparaît si l'on considère une fonction numérique $\zeta : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, définie indépendamment de τ dans la \mathcal{C}^1 -variété Λ . L'image de ζ par tout placement π_τ , est par définition la fonction numérique z_τ obtenue dans Ω par

$$x \rightarrow z_\tau(x) = \zeta(\pi_\tau(\lambda)) \quad , \quad \lambda = \pi_\tau^{-1}(x) \quad .$$

On dit classiquement que z_τ est une fonction numérique convectée par Λ . Le gradient (ou différentielle) de ζ est un champ de covecteurs de Λ , indépendant de τ ; la règle de composition des applications linéaires tangentes fait que l'image de γ , champ de vecteurs sur Ω , dépendant de τ , est le gradient (euclidien) de z_τ . Bref, le gradient d'une fonction numérique convectée est un champ vectoriel transvecté.

De façon générale, on pourra définir sur la \mathcal{C}^1 -variété Λ un champ tensoriel, correspondance associant à chaque $\lambda \in \Lambda$ un élément du produit tensoriel de diverses copies des espaces vectoriels Λ'_λ ou Λ''_λ . Par exemple un champ tensoriel deux fois covariant a pour valeur en chaque $\lambda \in \Lambda$ un élément de $\Lambda''_\lambda \otimes \Lambda''_\lambda$. Si ce champ tensoriel est constant par rapport à τ , son image par chaque π_τ est un champ tensoriel $\Omega \rightarrow X \otimes X$ (rappelons que X , en tant qu'espace vectoriel euclidien, a été identifié à son dual) dépendant de τ et déclaré dans ce cas doublement transvecté par le porteur Λ .

La \mathcal{C}^1 -variété Λ étant, par construction, \mathcal{C}^1 -difféomorphe à Ω peut être paramétrée au moyen d'une seule carte ; soit $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ un tel paramétrage ou "système de coordonnées admissible" dans la variété Λ . Ce paramétrage induit une base dans chacun des espaces Λ'_λ et Λ''_λ donc aussi dans leurs divers produits tensoriels ; tout champ tensoriel sur Λ est alors défini par des fonctions de $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, composantes de ce champ tensoriel. Tout changement de système de coordonnées $(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \rightarrow (\bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^n)$ est, par hypothèse, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur un autre. Les formules de changement de base qui lui correspondent dans chacun des espaces vectoriels $\Lambda'_\lambda, \Lambda''_\lambda$ ou dans leurs divers produits tensoriels, ont donc pour coefficients des fonctions continues de $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$. Il en résulte que la continuité d'un champ tensoriel, si on la définit par la continuité de ses fonctions composantes, se trouve en fait appartenant à la géométrie de la \mathcal{C}^1 -variété Λ , c'est-à-dire que cette notion est indépendante du choix du système de coordonnées. De même pour la notion de support d'un champ tensoriel : complémentaire du plus grand ouvert de Λ sur lequel le champ s'annule.

Soit K un compact de Λ et soit, par exemple, l'ensemble, noté $\mathcal{D}_K^\circ(\Lambda, \Lambda'^* \otimes \Lambda'^*)$, des champs tensoriels deux fois covariants continus, à support contenu dans K . C'est banalement un espace vectoriel et, en définissant la norme d'un élément comme le sup des valeurs absolues de ses composantes relativement à un système de coordonnées de la variété Λ , on fait de cet espace vectoriel un espace de Banach. Tout changement de coordonnées remplace ladite norme par une norme équivalente ; de la sorte $\mathcal{D}_K^\circ(\Lambda, \Lambda'^* \otimes \Lambda'^*)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique banachisable, intrinsèquement associée à la géométrie de la \mathcal{C}^1 -variété Λ .

3. TRANSPORT DE MESURES .

Conformément au point de vue dualitaire, adopté notamment par Bourbaki [1] pour construire la théorie de la mesure, une mesure scalaire sur la \mathcal{C}^1 -variété Λ est, par définition, une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{D}^\circ(\Lambda, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur Λ à support compact, forme continue dans le sens suivant : pour tout compact K de Λ , la restriction de ladite forme linéaire au sous-espace $\mathcal{D}_K^\circ(\Lambda, \mathbb{R})$ (notation de la fin du paragraphe précédent) est continue. Notons μ une telle forme ; la valeur que lui confère un $\zeta \in \mathcal{D}^\circ(\Lambda, \mathbb{R})$ sera écrite $\int \zeta d\mu$.

Comme au paragraphe précédent, notons z_τ l'image de la fonction réelle ζ par le placement π_τ , c'est-à-dire l'élément de $\mathcal{D}^\circ(\Omega, \mathbb{R})$ défini par

$$x \rightarrow z_\tau(x) = \zeta(\pi_\tau^{-1}(x))$$

Pour chaque π_τ est ainsi établie une correspondance bijective linéaire bicontinue entre $\mathcal{D}^\circ(\Lambda, \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}^\circ(\Omega, \mathbb{R})$; l'image de la mesure scalaire $d\mu$ par π_τ se définit alors comme la mesure notée dm_τ , construite sur Ω par

$$(3.1) \quad \forall \zeta \in \mathcal{F}(\Lambda, \mathbb{R}) \quad : \quad \int \zeta d\mu = \int z_\tau dm_\tau \quad .$$

Moyennant notre hypothèse que $d\mu$ est indépendante de τ , on dit que dm_τ , mesure sur Ω dépendant du "temps" τ , est convectée par le porteur Λ . De façon équivalente, tout ensemble $\varepsilon \subset \Lambda$ intégrable pour $d\mu$ a une image $e_\tau = \pi_\tau(\varepsilon)$, telle que

$$\int_{e_\tau} dm_\tau = \int_\varepsilon d\mu \quad , \quad \text{constant par rapport à } \tau \quad .$$

Cette situation est classique en dynamique des milieux continus : $d\mu$ est, dans ce cas, la mesure masse définie sur la variété Λ dont les points sont les "particules" du milieu continu.

Noter que, pour les mesures vectorielles ou tensorielles que nous considérons maintenant, l'intégrale sur un ensemble $\varepsilon \subset \Lambda$ n'aura pas de signification.

Par définition une mesure vectorielle (resp. covectorielle) sur Λ est une forme linéaire réelle sur l'espace $\mathcal{D}(\Lambda, \Lambda'^*)$ des champs de covecteurs continus à support compact (resp. sur l'espace $\mathcal{D}^\circ(\Lambda, \Lambda')$ des champs de vecteurs continus à support compact), avec la propriété topologique suivante : la restriction de cette forme à chacun des \mathcal{D}_K° concernés est continue. Si $d\psi$, désigne, par exemple une mesure vectorielle, la valeur qu'elle confère à un champ de covecteurs $\theta \in \mathcal{D}^\circ(\Lambda, \Lambda'^*)$ sera écrite $\int \langle \theta, d\psi \rangle$. Si des coordonnées admissibles

$(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ sont choisies dans Λ , le champ θ est décrit par ses composantes θ_i , fonctions continues des (λ^i) , à support compact. On peut aussi bien interpréter les θ_i comme n éléments de $\mathcal{D}^0(\Lambda, \mathbb{R})$; l'intégrale ci-dessus étant une forme linéaire par rapport à ces n éléments, de restriction continue à chaque \mathcal{D}_K^0 , cela permet d'exhiber n mesures scalaires $d\psi^i \in \mathcal{D}'^0(\Lambda, \mathbb{R})$ dites composantes de la mesure vectorielle, avec

$$\int \langle \theta, d\psi \rangle = \int \theta_i d\psi^i .$$

Des faits classiques concernant les familles finies de mesures scalaires (ou, si on préfère le théorème sur les mesures vectorielles à valeurs dans un espace de Banach de dimension finie, cité dans l'Introduction) permettent d'affirmer l'existence (sans unicité) d'une mesure scalaire ≥ 0 sur Λ , soit $d\mu$, et de n fonctions scalaires $\psi_\mu^i \in L^\infty(d\mu)$ telles que $d\psi^i = \psi_\mu^i d\mu$ c'est-à-dire

$$\int \langle \theta, d\psi \rangle = \int \theta_i \psi_\mu^i d\mu = \int \langle \theta, \psi_\mu^i \rangle d\mu .$$

Le champ vectoriel ψ_μ^i est défini à une modification arbitraire près sur tout ensemble $d\mu$ -négligeable de Λ .

Venons-en aux images par chaque placement π_τ ; on a défini au paragraphe précédent l'image w^τ du champ de covecteurs θ , ce qui réalise une bijection linéaire bi-continue entre $\mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda'^*)$ et $\mathcal{D}^0(\Omega, X)$. La définition de l'image de $d\psi$, soit $dv_\tau \in \mathcal{D}'^0(\Omega, X)$, en découle; cette définition consiste dans l'identité

$$\int \langle \theta, d\psi \rangle = \int w^\tau \cdot dv_\tau .$$

Rappelons que la mesure vectorielle $d\psi$ sur Λ est supposée indépendante de τ ; alors dv_τ , mesure vectorielle dépendant de τ sur Ω et dite convectée par le porteur Λ . En invoquant comme plus haut le théorème de représentation d'une mesure vectorielle par une mesure scalaire ≥ 0 accompagnée d'un champ vectoriel densité, il vient que dv_τ est une mesure convectée si et seulement si il existe dm_τ , mesure scalaire ≥ 0 convectée (image de $d\mu$) et $v'_\tau \in L^\infty(d\mu)$ (image de ψ'_μ) champ vectoriel convecté (défini à une modification arbitraire près sur tout ensemble dm_τ -négligeable) tels que $dv_\tau = v'_\tau dm_\tau$.

EXEMPLE . Appelons (par abus de langage) courbe \mathcal{G}^1 dans Λ une application \mathcal{G}^1 d'un intervalle réel $[r_1, r_2]$ dans la variété Λ (ce qui suit pourrait se développer plus généralement à propos d'une courbe rectifiable, c'est-à-dire une application continue à variation bornée). Si on note γ cette application, la dérivée $\gamma'(r)$ est, pour chaque $r \in [r_1, r_2]$ un élément de l'espace tangent $\Lambda'_{\gamma(r)}$. La fonctionnelle faisant correspondre à tout champ de covecteurs $\theta \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda'^*)$ l'expression scalaire

$$\int_{r_1}^{r_2} \langle \theta(\gamma(r)), \gamma'(r) \rangle dr$$

est une mesure vectorielle que nous noterons $d\gamma$. Une représentation de cette mesure vectorielle par une mesure scalaire ≥ 0 accompagnée d'un champ vectoriel densité est facile à exhiber, en supposant pour simplifier que l'application γ est injective : Notons abusivement dr la mesure scalaire sur Λ qui associe à toute fonction $\zeta \in \mathcal{D}^0(\Lambda, \mathbb{R})$ l'expression

$$\int_{r_1}^{r_2} \zeta(\gamma(r)) dr \quad \text{notée} \quad \int \zeta dr$$

(évidemment ≥ 0 si la fonction ζ est partout ≥ 0). L'ensemble compact $[\gamma] = \{\gamma(r) \in \Lambda : r \in [r_1, r_2]\}$ constitue la "courbe" au sens intuitif ; si le support de ζ ne rencontre pas $[\gamma]$ l'intégrale ci-dessus est nulle. Le complémentaire de $[\gamma]$ dans Λ est donc un ensemble dr-négligeable. Définissons le champ vectoriel $\lambda \mapsto \gamma'_r(\lambda)$ sur Λ par

$$\gamma'_r(\lambda) = \begin{cases} \gamma'(\gamma^{-1}(\lambda)) & \text{si } \lambda \in [\gamma] \\ \text{sinon, élément arbitraire de } \Lambda'_\lambda \end{cases}$$

Visiblement

$$\int \langle \theta, d\gamma \rangle = \int \langle \theta, \gamma'_r \rangle dr$$

Passons aux images pour chaque π_τ ; l'application composée

$$c_\tau = \pi_\tau \circ \gamma \in \mathcal{C}^1([r_1, r_2], \Omega)$$

constitue la courbe image de γ : c'est une courbe mobile dans Ω .

La mesure vectorielle dc_τ , variable avec τ , donne un des exemples les plus usuels de mesure vectorielle convectée par un porteur et correspond à une situation classique en hydrodynamique [6].

Tout ce qui vient d'être dit sur les mesures vectorielles, resp. covectorielles, s'étend immédiatement aux mesures tensorielles d'ordre quelconque.

Par exemple, une mesure tensorielle sur Λ , deux fois contra-
variante, notons-la $d\Gamma$, est une forme linéaire sur l'espace

$\mathcal{D}^0(\Lambda, \Lambda'^* \otimes \Lambda'^*)$ des champs tensoriels deux fois covariants continus à

support compact, avec la propriété habituelle de continuité de la restriction à tous les \mathcal{D}_K° . Dès qu'un système de coordonnées (λ^i) a été choisi dans Λ , la mesure tensorielle $d\Gamma$ peut être représentée par les n^2 mesures scalaires $d\Gamma^{ij}$ constituant ses composantes. Pour tout champ tensoriel $\Theta \in \mathcal{D}^\circ(\Lambda, \Lambda^{*\otimes} \otimes \Lambda^{*\otimes})$ la valeur de la fonctionnelle se note

$$(3.2) \quad \int \langle \Theta; d\Gamma \rangle = \int \Theta_{ji} d\Gamma^{ij} .$$

L'écriture $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ fait allusion au produit deux fois contracté d'un élément de $\Lambda_\lambda^{*\otimes} \otimes \Lambda_\lambda^{*\otimes}$ et d'un élément de $\Lambda_\lambda^{\otimes} \otimes \Lambda_\lambda^{\otimes}$, forme bilinéaire qui met ces deux espaces en dualité. Nous n'aurons pas dans la suite à prêter attention à la correspondance entre les indices respectifs des deux contractions car on se limitera à la situation suivante : la mesure tensorielle deux fois contravariante $d\Gamma$ est dite symétrique si $d\Gamma^{ij} = d\Gamma^{ji}$, c'est-à-dire de façon équivalente, si l'expression (3.2) est nulle pour tout champ tensoriel Θ antisymétrique.

Il existe par ailleurs (sans unicité) une mesure scalaire $d\mu \geq 0$ sur Λ et un champ tensoriel Γ_μ^i deux fois contravariant, $d\mu$ -mesurable et borné tel que la quantité (3.2) s'écrive aussi

$$\int \langle \Theta; \Gamma_\mu^i \rangle d\mu = \int \langle \Theta_{ji} , \Gamma_\mu^{ij} \rangle d\mu .$$

On suppose la mesure tensorielle Γ définie dans Λ indépendamment de τ ; on passe aux images par chaque π_τ . L'image de Θ est un champ tensoriel $W^\tau \in \mathcal{D}^\circ(\Omega, X \otimes X)$ deux fois transvecté; l'image de $d\Gamma$ est une mesure tensorielle dC_τ déclarée deux fois convectée. Quel que soit τ on a

$$(3.3) \quad \int W^T : dC_\tau = \int \langle \theta; d\Gamma \rangle .$$

Si on suppose par ailleurs que la représentation $d\Gamma = \Gamma'_\mu d\mu$ ci-dessus a été effectuée indépendamment de τ , elle fournit par passage aux images, une mesure scalaire $dm_\tau \geq 0$, convectée et un champ tensoriel dm_τ -mesurable et borné, deux fois convecté qui constitue la densité de dC_τ par rapport à dm_τ .

4. TENSEUR VITESSE DE DEFORMATION .

On note g le tenseur deux fois covariant symétrique associé à la métrique euclidienne de X ; on fixe un élément λ de Λ . Pour chaque placement π_τ , il existe un unique élément γ^τ de $\Lambda_\lambda^* \otimes \Lambda_\lambda^*$ ayant g pour image. Cela équivaut à dire que, pour tout couple d'éléments α, β de Λ'_λ , indépendants de τ , d'images respectives $a_\tau = \pi'_\tau(\lambda, \alpha)$, $b_\tau = \pi'_\tau(\lambda, \beta)$ dans X , on a, avec les notations déjà employées pour des produits deux fois contractés,

$$(4.1) \quad g : (a_\tau \otimes b_\tau) = \langle \gamma^\tau; \alpha \otimes \beta \rangle .$$

Le premier membre n'est pas autre chose que le produit scalaire $a_\tau \cdot b_\tau$. Comme $\tau \rightarrow a_\tau$ et $\tau \rightarrow b_\tau$ sont des vecteurs mobiles convectés par Λ , on tire de (2.1) que le premier membre ci-dessus est fonction dérivable de τ avec, en employant dans \mathcal{X} des coordonnées cartésiennes orthonormées,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\tau}(a_\tau \cdot b_\tau) &= \frac{\delta}{\delta\tau}(a_\tau^i b_\tau^i) = \varphi^i_{,j} a_\tau^j b_\tau^i + a_\tau^i \varphi^i_{,j} b_\tau^j \\ &= (\varphi^i_{,j} + \varphi^j_{,i}) a_\tau^i b_\tau^j = (2 \text{ def } \varphi) : (a_\tau \otimes b_\tau) \end{aligned}$$

On utilise là :

NOTATION . Si le champ vectoriel $\varphi : \Omega \rightarrow X$ est différentiable au point $x \in \Omega$, on note $\text{def } \varphi(x)$ la partie symétrique du tenseur gradient euclidien de φ au point x , c'est-à-dire, lorsqu'on emploie des coordonnées cartésiennes orthonormées, le tenseur de composantes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi^i_{,j} + \varphi^j_{,i}) .$$

Il résulte de (4.1) et (4.2) que l'élément γ^τ de $\Lambda_\lambda^{i*} \otimes \Lambda_\lambda^{j*}$ est fonction dérivable de τ et que

$$\left\langle \frac{\delta \gamma^\tau}{\delta \tau} ; \alpha \otimes \beta \right\rangle = (2 \text{ def } \varphi) : a_\tau \otimes b_\tau$$

Cette formule classique de la cinématique des milieux continus peut s'énoncer :

PROPOSITION 4.1 : Le champ des vitesses φ du porteur Λ est supposé différentiable ; alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$ et chaque placement π_τ , la dérivée $\delta \gamma^\tau / \delta \tau$ existe, élément de $\Lambda_\lambda^{i*} \otimes \Lambda_\lambda^{j*}$ qui admet pour image le tenseur $2 \text{ def } \varphi(x)$ avec $x = \pi_\tau(\lambda)$.

Le résultat ci-dessus, simplement basé sur (2.1) est valable même si le champ vectoriel φ dépend de τ (porteur en écoulement non stationnaire), dans les conditions précisées au paragraphe 2. Pour étudier maintenant les dérivées secondes, nous prenons en compte explicitement la dépendance éventuelle de φ à l'égard de τ et nous supposons que $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow X$ est deux fois différentiable. Alors

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \varphi^i_{,j}(\pi_\tau(\lambda)) = \varphi^i_{,j\tau} + \varphi^i_{,jk} \varphi^k$$

On tire donc de (4.2) l'existence de

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \frac{\delta^2}{\delta\tau^2}(a_\tau \cdot b_\tau) &= (\varphi_{,j}^i + \varphi_{,i}^j)_{,\tau} a_\tau^i b_\tau^j \\
 &+ (\varphi_{,jk}^i \varphi^k + \varphi_{,ik}^j \varphi^k) a_\tau^i b_\tau^j \\
 &+ (\varphi_{,j}^i + \varphi_{,i}^j) (\varphi_{,k}^i a_\tau^k b_\tau^j + \varphi_{,l}^j a_\tau^i b_\tau^l) \\
 &= h : (a_\tau \otimes b_\tau)
 \end{aligned}$$

où on note h le tenseur de composantes

$$(4.4) \quad h_{ij} = 2(\varepsilon_{ij,\tau} + \varepsilon_{ij,k} \varphi^k) + \varphi_{,k}^j \varphi_{,i}^k + \varphi_{,k}^i \varphi_{,j}^k + 2\varphi_{,i}^k \varphi_{,j}^k$$

En rapprochant (4.1) et (4.3), on obtient

PROPOSITION 4.2 . Le champ des vitesses $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow X$ du porteur Λ , est supposé deux fois différentiable ; alors, pour chaque $\lambda \in \Lambda$ et chaque placement π_τ , la dérivée seconde $\varphi^T / \delta\tau^2$ existe, élément de $\Lambda_\lambda^{i*} \otimes \Lambda_\lambda^{j*}$ qui admet pour image le tenseur h défini en (4.4) .

5. VARIATION DE L'INTEGRALE DE TRACE D'UNE MESURE TENSORIELLE CONVECTEE .

Soit dT , de composantes dT^{ij} relativement à un système de coordonnées cartésiennes orthonormé, une mesure tensorielle sur Ω , bornée et symétrique. On a vu en (1.5) que l'intégrale de la trace de dT n'est autre que le scalaire, intégrale relativement à cette mesure tensorielle bornée du champ tensoriel constant égal à g partout dans Ω .

On note dT_τ la mesure coïncidant avec dT pour $\tau = 0$, deux fois convectée par le porteur Λ , de champ de vitesses $\varphi \in \mathcal{D}^1(\Omega, X)$;

ce champ vectoriel peut éventuellement dépendre de τ et, dans ce cas, on suppose, comme on l'a dit au paragraphe 2, que φ est continument différentiable de $J \times \Omega$ dans X (J : ouvert de \mathbb{R} contenant les valeurs concernées de τ).

PROPOSITION 5.1 Moyennant les hypothèses ci-dessus la fonction

$$(5.1) \quad \tau \rightarrow I(dT_\tau) = \int g : dT_\tau = \int dT_\tau^{ij}$$

appartient à $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$. Sa dérivée au point $\tau = 0$ s'annule quel que soit $\varphi(0, \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega, X)$ (ou, de façon équivalente, quel que soit $\varphi(0, \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega, X)$) si et seulement si dT possède une divergence nulle dans Ω , au sens des distributions.

Preuve. Appelons $d\theta$ la mesure tensorielle deux fois contravariante sur la variété Λ dont dT_τ est l'image par le placement π_τ ; d'après l'hypothèse, $d\theta$ est indépendante de τ . En introduisant, comme au paragraphe 4, le champ tensoriel γ^τ , deux fois covariant sur la variété Λ , on a d'après la définition des images

$$\int g : dT_\tau = \int \langle \gamma^\tau; d\theta \rangle = \int \langle \gamma_{ij}^\tau, d\theta^{ij} \rangle$$

(on fait ici usage de coordonnées admissibles dans la variété Λ). Alors

$$\frac{\delta}{\delta\tau} I(dT_\tau) = \int \langle \frac{\delta\gamma^\tau}{\delta\tau}; d\theta \rangle = \int \langle \frac{\delta\gamma_{ij}^\tau}{\delta\tau}, d\theta^{ij} \rangle$$

On légitime cette dérivation sous le signe \int par des arguments classiques, en observant que, vu la Proposition 4.1, les fonctions $(\tau, \lambda^1, \dots, \lambda^n) \rightarrow \delta\gamma_{ij}^\tau / \delta\tau$ sont continues sur $K \times \Lambda$ (K : voisinage compact de la valeur concernée de τ), à support compact. Par la Proposition (4.1), cela s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \tau} &= \int 2 \operatorname{def} \varphi : dT_{\tau} \\ &= \int (\varphi^i_{,j} + \varphi^j_{,i}) dT_{\tau}^{ij} = 2 \int \varphi^i_{,j} dT_{\tau}^{ij} \end{aligned}$$

On fait $\tau = 0$; la nullité de cette expression pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, X)$ (ou, de façon équivalente, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^1(\Omega, X)$) est bien la nullité de la divergence de dT , au sens des distributions.

On passe maintenant au calcul de la dérivée seconde de $I(dT_{\tau})$:

PROPOSITION 5.2 . Outre les hypothèses précédentes, on suppose $\varphi \in \mathcal{C}^2(J \times \Omega, X)$. Alors la fonction définie en (5.1) appartient à $\mathcal{C}^2(J, \mathbb{R})$. Pour tout $\tau \in J$ tel que dT_{τ} ait une divergence nulle, au sens des distributions, la dérivée seconde de cette fonction est égale à $2 \int \varphi^k_{,i} \varphi^i_{,j} dT_{\tau}^{ij}$.

Preuve. Par une dérivation sous le signe \int , légitimée comme celle de tout à l'heure, on a, en utilisant (4.4) et la symétrie de dT_{τ}

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 I}{\delta \tau^2}(dT^{\tau}) &= \int \left\langle \frac{\delta^2 \gamma^{\tau}}{\delta \tau^2} ; d\theta \right\rangle \\ &= 2 \int (\varphi^i_{,j\tau} + \varphi^i_{,jk} \varphi^k + \varphi^i_{,k} \varphi^k_{,j} + \varphi^k_{,i} \varphi^i_{,j}) dT_{\tau}^{ij} \end{aligned}$$

Or

$$\varphi^i_{,j\tau} + \varphi^i_{,jk} \varphi^k + \varphi^i_{,k} \varphi^k_{,j} = (\varphi^i_{,\tau} + \varphi^i_{,k} \varphi^k)_{,j}$$

d'où l'expression annoncée car, si dT_{τ} a une divergence nulle

$$\int (\varphi^i_{,\tau} + \varphi^i_{,k} \varphi^k)_{,j} dT_{\tau}^{ij} = 0 .$$

COROLLAIRE 5.3 . On suppose que dT a une divergence nulle. La dérivée seconde ci-dessus, évaluée pour $\tau = 0$, est ≥ 0 quel que soit

$\varphi \in \mathcal{D}^2(\Omega, X)$ (ou, de façon équivalente, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, X)$) si et seulement si la mesure tensorielle symétrique dT possède les propriétés équivalentes suivantes :

i) Pour tout $\psi \in \mathcal{D}^c(\Omega, X)$ (ou, de façon équivalente, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, X)$), on a

$$(5.2) \quad \int \psi_i \psi_j dT^{ij} \geq 0$$

ii) Il existe (de manière non unique) sur Ω une mesure scalaire $d\mu \geq 0$ et des fonctions $T_\mu^{ij} \in L^\infty(d\mu)$ telles que $dT^{ij} = T_\mu^{ij} d\mu$ et que pour tout $\omega \in \Omega$ (à un ensemble $d\mu$ -négligeable près) la forme quadratique $\xi \rightarrow T^{ij} \xi_i \xi_j$ soit ≥ 0 sur \mathbb{R}^n .

Preuve . La positivité de ladite dérivée seconde équivaut, d'après la Proposition précédente, à ce que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, X) : \int \varphi_{,i}^k \varphi_{,j}^k dT^{ij} \geq 0$$

Il faut et suffit pour cela que cette inégalité ait lieu pour tout φ de la forme suivante, avec k_0 fixé dans $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$\varphi^k = \begin{cases} \theta \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) & \text{pour } k = k_0 \\ 0 & \text{pour } k \neq k_0 \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\forall \theta \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) : \int \theta_{,i} \theta_{,j} dT^{ij} \geq 0 .$$

Cela signifie que la forme quadratique définie sur $\mathcal{D}(\Omega, X)$ par

$$\psi \rightarrow \int \psi_i \psi_j dT^{ij}$$

a une restriction ≥ 0 au sous-espace des gradients. On sait par ROS [7] que cette propriété équivaut à i) et à ii).

REMARQUE . Dans tout ce paragraphe on a, pour simplifier l'écriture, utilisé dans \mathcal{X} des coordonnées cartésiennes orthonormées (ce qui fait que la règle de style selon laquelle chaque indice de sommation doit apparaître une fois en haut et une fois en bas n'est pas respectée). Mais on notera que même en coordonnées cartésiennes non orthonormées, le premier membre de (5.2) représente toujours le scalaire $\int (\psi \otimes \psi) : dT$ pourvu que ψ_i désigne les composantes covariantes du champ vectoriel ψ et dT^{ij} les composantes deux fois contravariantes de la mesure tensorielle. De même, en ce qui concerne la propriété ii), il est équivalent de supposer que les T_{μ}^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes du champ tensoriel T' relativement à une base quelconque.

6. CONCLUSIONS

Considérons les \mathcal{C}^1 -difféomorphismes de Ω réalisés par les transitions d'un porteur dont le champ des vitesses φ (dépendant éventuellement de τ) vérifie les conditions du paragraphe 2. Notons \mathcal{G}_1 l'ensemble des produits finis de tels difféomorphismes, un groupe de \mathcal{C}^1 -difféomorphismes qui, peut-on dire, laissent invariant chaque point frontière de Ω . Sans chercher à savoir ici si ce groupe peut être engendré plus simplement, observons que, selon le paragraphe 3, ce groupe opère dans l'ensemble des mesures tensorielles sur Ω et, également, dans le sous-espace vectoriel, qu'on notera \mathcal{M} , des mesures

tensorielles d'ordre deux symétriques et bornées. Chaque orbite de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{M} constitue, en un sens qu'il n'y a pas à préciser davantage, une sous-variété de \mathcal{M} . Notons \mathcal{V}_1 une telle orbite ; la signification de la Proposition 5.1 est que, dans \mathcal{V}_1 , les éléments à divergence nulle sont les points critiques de la fonction scalaire I "intégrale de la trace", c'est-à-dire les points où la différentielle première de cette fonction s'annule.

Considérons maintenant le groupe \mathcal{G}_2 des \mathcal{C}^2 -difféomorphisme de Ω engendré de la même façon avec des porteurs à champ de vitesses \mathcal{C}^2 , comme dans la Proposition 5.2. Chaque orbite de \mathcal{G}_2 dans \mathcal{M} est une sous-variété, notons-la \mathcal{V}_2 ; pour chacun des points critiques de I dans \mathcal{V}_2 (vu la Proposition 5.1, ce sont à nouveau les éléments à divergence nulle de la variété), la Proposition 5.2 donne l'expression de la différentielle seconde de I . La positivité de cette différentielle seconde, discutée dans le Corollaire 5.3 est une condition nécessaire pour que le point critique en question fournisse un minimum local de I . Une des sources d'intérêt de cette condition de positivité est, pour nous, l'encadrement suivant qu'elle apporte à l'imagination des théoriciens.

Dans la ligne du présent rapport, il serait naturel de considérer le groupe \mathcal{G}_∞ engendré par les transitions de porteurs à champ de vitesses \mathcal{C}^∞ . Ces porteurs sont banalement munis de structures de variétés \mathcal{C}^∞ ; de ce fait, on peut y définir non seulement des mesures tensorielles, mais des distributions tensorielles d'ordre quelconque, avec leurs images par chacun des placements, d'où les notions de convection et de transvection pour des distributions tensorielles de l'espace \mathcal{X} .

Si on se restreint à la classe des distributions tensorielles d'ordre 2, symétriques et possédant une intégrale sur Ω (ce qui est le cas pour les distributions à support compact), les considérations du paragraphe 5 s'adaptent immédiatement : les éléments à divergence nulle sont à nouveau les points critiques de la fonctionnelle "intégrale de la trace". Mais, si l'on passe à la condition de positivité de la différentielle seconde, les résultats de [7], déjà invoqués, font que, par cette condition, la distribution tensorielle considérée est nécessairement une mesure. Il arrivera usuellement, au niveau des applications physiques, que la positivité de la différentielle seconde (ou une condition plus élaborée, de même nature, lorsque les "équations de champ" formulent l'égalité de la divergence de la distribution tensorielle considérée non plus à zéro mais à une certaine fonctionnelle vectorielle) apparais- sent nécessaire pour que l'"état" considéré soit "stable" et donc observable. Dès lors, la théorie concernée n'aura pas de raison d'invo- quer d'autres distributions tensorielles que des mesures.

Parmi les applications possibles des variations horizontales se trouvent, en premier lieu, l'élaboration de techniques numériques (dans des situations plus spéciales que celles du présent rapport, cf. [2] [3]) : des marches dans la variété \mathcal{V}_2 viseront à approximer les points extrémaux de la fonctionnelle intégrale de la trace. Déjà, pour la résolution numérique de problèmes d'écoulement à surface libre ou dans des problèmes d'optimisation de domaine, étrangers à la mécani- que des milieux continus, sont mises en œuvre des déformations de maillages qui peuvent se visualiser comme des transports par un porteur (cf. [9] [10]). Les problèmes de convergence de telles marches, liés

à l'étude de l'existence même des solutions, apparaissent à ce jour très ardues ; on peut espérer que la pratique numérique suscitera les idées à mettre œuvre à cet égard.

Sur le plan formel, on observera une analogie entre notre caractérisation des mesures tensorielles à divergence nulle et les considérations de J.M. SOURIAU en théorie de la Relativité (voir particulièrement [8]). La différence est que cet auteur au lieu de transports par des porteurs considère des variations de la métrique de l'espace-temps, ce qui s'insère dans une perspective de physique théorique. Au contraire, notre technique des variations horizontales, lorsqu'on l'applique en mécanique, constitue simplement un prolongement de la traditionnelle méthode des puissances virtuelles, mise en œuvre dans un espace-temps galiléen intangible. Avec le vocabulaire du présent rapport, un champ de vitesses virtuelles définit un porteur. A un tel champ s'associe une valeur de la fonctionnelle "puissance" de toute force ou, plus généralement, la puissance de ce qu'on appelle un "effort" subi par le système mécanique concerné. Lesdits efforts sont les expressions de l'information, d'origine empirique, dont on dispose sur la situation mécanique étudiée : L'attitude est simplement opérative.

REFERENCES

- [1] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. 6, Hermann, 1956 .
- [2] J.J. MOREAU, Le calcul des variations horizontales et l'hydrodynamique, Séminaire d'Analyse Convexe, 9(1979), exp. n°4 (31 p.).
- [3] J.J. MOREAU, Variational properties of Euler's hydrodynamical equations, in : (M. ATTEIA, D. BANCEL and I. GUMOWSKI, ed.) Nonlinear problems of analysis in geometry and mechanics, Pitman, 1981, p. 31-49.
- [4] J. DIEUDONNE, Eléments d'analyse, t. 1, Gauthier-Villars, 1968.
- [5] E. VESSIOT, Sur les transformations infinitésimales et la cinématique des milieux continus, Bull. Sci. Math., 35 (1911), 233-244 .
- [6] J.J. MOREAU, Le transport d'une mesure vectorielle par un fluide et le théorème de Kelvin-Helmholtz, à paraître dans Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.
- [7] M. ROS, Formes quadratiques positives sur des espaces de gradients, Séminaire d'Analyse Convexe 7 (1977), exp. n° 5 (5 p.).
- [8] J.M. SOURIAU, Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel, Ann. Inst. Henri Poincaré, 20, n° 4 (1974), 315-364.
- [9] Ph. MORICE, A variational principle and a finite element method for compressible flow with free boundaries, Archives of Mechanics 30 (1978), 517-530.

- [10] J.P. ZOLESIO, à paraître dans : (J. CEA and Ed. HAUG, editors)
Proceedings NATO-NSF Study, Iowa City 1980, Stijthoff and
Nordhoff Pub., 1981.