



HAL
open science

Tenseurs de distributions dérivées secondes sur un ouvert de \mathbb{R}^n

Jean Jacques Moreau, M. Ros

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau, M. Ros. Tenseurs de distributions dérivées secondes sur un ouvert de \mathbb{R}^n . 1979.
hal-02309527

HAL Id: hal-02309527

<https://hal.science/hal-02309527>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1979, Exposé n° 2

TENSEURS DE DISTRIBUTIONS DERIVEES

SECONDES SUR UN OUVERT DE \mathbb{R}^n

J. J. MOREAU et M. ROS

1. INTRODUCTION

Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension finie ν ; on note S_2 sa seconde puissance symétrique, c'est-à-dire l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 associé à E . Soit Ω un ouvert quelconque de E ; on note $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega, E)$, resp. $\mathcal{D}(\Omega, S_2)$) l'espace des fonctions réelles (resp. champs vectoriels, resp. champs tensoriels symétriques) indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω ; la forme bilinéaire de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ et l'espace $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ des distributions scalaires sur Ω est écrite $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On utilise dans E une base orthonormée ; la forme bilinéaire de dualité entre $\mathcal{D}(\Omega, E)$ et l'espace $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ des distributions à valeurs dans E est alors écrite $\langle u_i, v_i \rangle$ (somme en i) où les $u_i \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ désignent les composantes de $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ et les $v_i \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ les composantes de $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$. De

même, la forme bilinéaire de dualité entre l'espace $\mathcal{D}(\Omega, S_2)$ et l'espace des distributions à valeurs dans S_2 s'écrit $\langle g_{ij}, s_{ij} \rangle$ (somme en i et j) où les $g_{ij} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$, $g_{ij} = g_{ji}$, sont les composantes de $g \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$ et les $s_{ij} \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, $s_{ij} = s_{ji}$, les composantes de $s \in \mathcal{D}(\Omega, S_2)$.

Pour tout élément f de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$) la dérivée partielle $\partial f / \partial x_i$ est notée abréviativement $f_{,i}$.

Dans un rapport du Séminaire d'Analyse Convexe [1] l'un de nous établissait la propriété suivante de l'opérateur déformation, défini pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ par $(\text{déf } u)_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$:

Soit $e \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$; il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tel que $e = \text{déf } u$ si et seulement si on a $\langle e_{ij}, s_{ij} \rangle = 0$ pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, S_2)$ à divergence nulle (c'est-à-dire vérifiant $s_{ij,j} = 0$).

La démonstration consistait à se ramener à la propriété plus usuelle suivante (dont une démonstration est aussi donnée dans [1], pour la commodité du lecteur) :

THEOREME 0. Soit $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$; il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $g = \text{grad } f$ si et seulement si on a $\langle g_i, v_i \rangle = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle.

L'objet du présent rapport est d'établir par des calculs analogues :

THEOREME 1. Soit $h \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$; il existe $f \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $h_{ij} = f_{,ij}$ si et seulement si on a $\langle h_{ij}, s_{ij} \rangle$ pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, S_2)$ tel que $\text{div div } s = 0$ (c'est-à-dire vérifiant $s_{ij,i} = 0$).

REMARQUE. Selon une argumentation développée dans [1] ce résultat équivaut à dire que l'image de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ par l'application linéaire "second

gradient" est un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega, S_2)$ égal à son biorthogonal, (c'est-à-dire fermé dans $\mathcal{D}'(\Omega, S_2)$). De telles propriétés d'orthogonalité ont une signification mécanique dans le cadre de la méthode des puissances virtuelles. C'est ainsi que le théorème 1 ci-dessus, avec $\dim E = 2$, trouve son intérêt en théorie élémentaire de la flexion des plaques.

2. PREUVE DU THEOREME 1

Il résulte immédiatement de la définition des dérivées d'une distribution que, si $h_{ij} = f_{,ij}$, les $h_{ij} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ possèdent la propriété :

(P) Pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, S_2)$ tel que $s_{ij,ij} = 0$, on a $\langle h_{ij}, s_{ij} \rangle = 0$.

Etablissons maintenant l'implication réciproque. On notera x_j les composantes de l'élément générique de E .

LEMME 1. Si $h \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$ possède la propriété (P) on a

$$(2.1) \quad \langle x_i h_{ij}, v_j \rangle = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle.

Preuve. Le premier membre de (2.1) s'écrit, vu la symétrie des h_{ij}

$$\langle h_{ij}, x_i v_j \rangle = \frac{1}{2} \langle h_{ij}, x_i v_j + x_j v_i \rangle.$$

Les $x_i v_j + x_j v_i$ sont les composantes d'un élément s de $\mathcal{D}(\Omega, S_2)$ dont on calcule comme suit la divergence, dans l'hypothèse $v_{i,i} = 0$,

$$(x_i v_j + x_j v_i)_{,i} = \delta_{ii} v_j + x_i v_{j,i} + \delta_{ji} v_i + x_j v_{i,i} = (\nu+1)v_j + x_i v_{j,i}$$

Alors la divergence itérée de s est

$$((\nu+1)v_j + x_i v_{j,i})_{,j} = (\nu+1)v_{j,j} + \delta_{ij} v_{j,i} + x_i v_{j,ij} = 0$$

LEMME 2. Si $h \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$ possède la propriété (P) on a, quel que soit
la valeur de l'indice k , pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle

$$(2.2) \quad \langle h_{kj}, v_j \rangle = 0 .$$

Preuve. Le calcul précédent montrait que si $\operatorname{div} v = 0$, l'élément de $\mathcal{D}(\Omega, S_2)$ ayant pour composantes $x_i v_j + x_j v_i$ a une divergence itérée nulle. Quelle que soit la valeur donnée à k , il en est donc de même de l'élément de $\mathcal{D}(\Omega, S_2)$ ayant pour composantes

$$(x_i v_j + x_j v_i)_{,k} = \delta_{ik} v_j + x_i v_{j,k} + \delta_{jk} v_i + x_j v_{i,k} .$$

Donc si h possède la propriété (P) on a la nullité de

$$\begin{aligned} & \langle h_{ij}, \delta_{ik} v_j + x_i v_{j,k} + \delta_{jk} v_i + x_j v_{i,k} \rangle \\ &= \langle h_{kj}, v_j \rangle + \langle h_{ik}, v_i \rangle + \langle h_{ij}, x_i v_{j,k} + x_j v_{i,k} \rangle \\ &= 2 \langle h_{kj}, v_j \rangle + \langle h_{ij}, x_i v_{j,k} + x_j v_{i,k} \rangle \end{aligned}$$

Or le dernier terme est nul car, pour chaque valeur de k , le champ tensoriel symétrique de composantes $x_i v_{j,k} + x_j v_{i,k}$ a une divergence itérée nulle : cela résulte du calcul fait dans la démonstration du lemme 1 puisque, si le champ vectoriel v de composantes v_i a une divergence nulle, il en est de même, pour k fixé, de la dérivée partielle $\partial v / \partial x_k$, champ vectoriel de composantes $v_{i,k}$.

Ces lemmes étant acquis, soit $h \in \mathcal{D}'(\Omega, S_2)$ possédant la propriété (P). Le lemme 2 et le théorème 0 entraînent, pour chaque k , l'existence de $u_k \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$u_{k,j} = h_{kj} .$$

Pour établir l'existence de f tel que $u_k = f_{,k}$ invoquons une seconde fois le théorème 0 ; comme

$$u_k = (x_i u_i)_{,k} - x_i u_{i,k}$$

il suffit de montrer que

$$\langle x_i u_{i,k}, v_k \rangle = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle ; c'est précisément ce qu'affirme le lemme 1.

REFERENCES

- [1] J.J. MOREAU, Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, t. 6, 1976, Exposé n° 5, 23 p.