



HAL
open science

Le calcul des variations horizontales et l'hydrodynamique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Le calcul des variations horizontales et l'hydrodynamique. 1979. hal-02309515

HAL Id: hal-02309515

<https://hal.science/hal-02309515>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

• Montpellier 1979, Exposé n° 4

LE CALCUL DES VARIATIONS HORIZONTALES

ET L'HYDRODYNAMIQUE

J.J. MOREAU

1. Introduction

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ; pour $y \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, vérifiant des conditions prescrites au bord (et à l'infini si Ω non borné) est définie la fonctionnelle

$$I(y) = \int_{\Omega} L(x, y(x), \text{grad } y(x)) \, dx$$

où on écrit x pour (x_1, x_2, \dots, x_n) et dx pour la mesure de Lebesgue de Ω ; la fonction $L \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est donnée.

La technique classique du calcul des variations pour écrire des conditions nécessaires d'extrémum de I consiste à étudier la fonction $\tau \mapsto I(y + \tau \delta y)$, τ décrivant un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et $\delta y \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ choisie arbitrairement, à support compact. En ce qui concerne la surface $G(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, graphe de la fonction y , cela revient à la comparer à une famille de surfaces $G(\tau)$ dont chaque point $(x, y(x) + \tau \delta y(x))$ se déduit du point $(x, y(x))$ de $G(0)$ par le

déplacement "vertical" $\tau \delta y(x)$. Pour cette raison, nous dirons que l'algorithme classique consiste en un calcul de variations verticales.

Un procédé plus général pour insérer la surface $G(0)$ dans une chaîne de surfaces voisines consisterait à définir, sur un voisinage de $G(0)$, un champ vectoriel Φ de \mathbb{R}^{n+1} et à appeler $G(\tau)$ l'image de $G(0)$ par la transformation $\exp \tau \Phi$ (pseudo-groupe engendré par le champ vectoriel Φ). Ici le mécanicien préférera sans doute le langage de la cinématique des milieux continus : si on identifie τ au temps, l'application $\exp \tau \Phi$ représente le déplacement de l'instant 0 à l'instant τ pour chaque particule d'un fluide en mouvement stationnaire dans \mathbb{R}^{n+1} , admettant Φ pour champ de vitesses; nous appellerons porteur un tel fluide, imaginé à seule fin de bénéficier du langage de la cinématique. Le calcul des variations classiques consiste à choisir le champ vectoriel Φ sous la forme $\Phi(x,y) = (0, \delta y(x))$, c'est-à-dire vertical dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Nous appellerons calcul des variations horizontales la technique résultant du choix d'un champ vectoriel Φ de la forme $\Phi(x,y) = (\varphi(x), 0)$ où φ est un champ vectoriel de \mathbb{R}^n . Un tel Φ , horizontal et constant par rapport à y , constitue le champ des vitesses d'un porteur conservant dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chaque hyperplan $y = \text{Cte}$; en particulier, ce porteur déplace chaque point de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R}^n . La surface

$$G(\tau) = (\exp \tau \Phi) G(0)$$

est le graphe de la fonction

$$(1.1) \quad y^\tau = y^0 \circ \exp(-\tau \varphi)$$

définie sur $(\exp \tau \varphi) \bar{\Omega}$; autrement dit, à chaque particule du porteur est associée une valeur de y^τ indépendante de τ ; pour chaque τ , une telle fonction est classiquement appelée un réarrangement ou

transplantation de la fonction y^0 ; pour τ variable, indexant une chaîne de configurations du porteur, nous dirons que y^τ est une fonction numérique convectée par le porteur.

Pour écrire, par cette technique, des conditions nécessaires d'extrémum de la fonctionnelle I , on choisira le champ vectoriel φ à support compact dans Ω , de sorte que, pour τ dans un voisinage de zéro, les transformations $\exp \tau\varphi$ laissent invariant un voisinage du bord de Ω (ainsi que l'infini si Ω non borné). L'intégrale

$$I(y^\tau) = \int_{\Omega} L(x^\tau, y^\tau(x^\tau), \text{grad } y^\tau(x^\tau)) dx^\tau$$

(x^τ variable muette décrivant Ω) se transforme par le changement de variable

$$(1.2) \quad x^\tau = (\exp \tau\varphi) x^0$$

en

$$(1.3) \quad I(y^\tau) = \int_{\Omega} L((\exp \tau\varphi)x^0, y^0(x^0), \frac{\partial y^0}{\partial x^0_i} \frac{\partial x^0_i}{\partial x^\tau_j}) (\det \frac{\partial x^0_k}{\partial x^\tau_l}) dx^0.$$

Notant $\frac{\delta}{\delta\tau}$ les dérivées par rapport à τ , calculées pour $\tau = 0$ et pour x^0 fixé, avec x^τ défini par (1.2), on a

$$(1.4) \quad \frac{\delta x^0_i}{\delta\tau} = \varphi_{i,i}(x^0)$$

puis, par l'équation de la dilatation, classique en cinématique des milieux continus,

$$(1.5) \quad \frac{\delta}{\delta\tau} (\det \frac{\partial x^0_k}{\partial x^\tau_l}) = \varphi_{i,i}(x^0)$$

(divergence du champ vectoriel φ). Pour calculer enfin la dérivée $\frac{\delta}{\delta\tau}$ de la matrice $\frac{\partial x^0_i}{\partial x^\tau_j}$, on observe que son produit par la matrice $\frac{\partial x^0_j}{\partial x^\tau_k}$ est

égal à la matrice unité, d'où

$$(1.6) \quad \left(\frac{\delta}{\delta\tau} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^\tau} \right) \frac{\partial x_j^\tau}{\partial x_k^0} + \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^\tau} \left(\frac{\delta}{\delta\tau} \frac{\partial x_j^\tau}{\partial x_k^0} \right) = 0 ;$$

or, puisque $\frac{\delta}{\delta\tau}$ et $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sont des dérivées partielles par rapport à des variables indépendantes, on a moyennant les hypothèses de régularité usuelles,

$$\frac{\delta}{\delta\tau} \frac{\partial x_j^\tau}{\partial x_k^0} = \frac{\partial}{\partial x_k^0} \frac{\delta x_j^\tau}{\delta\tau} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^0} .$$

Pour $\tau = 0$ on a $x^\tau = x^0$, donc (1.6) se réduit à

$$(1.7) \quad \frac{\delta}{\delta\tau} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^\tau} = -\varphi_{i,j} .$$

Il en résulte que le vecteur $\text{grad } y^\tau(x^\tau)$, dont les composantes peuvent s'écrire (puisque $y^\tau(x^\tau) = y^0(x^0)$ par construction)

$$\frac{\partial y^\tau}{\partial x_j^\tau} = \frac{\partial y^0}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j^\tau}$$

à comme dérivée pour $\tau = 0$,

$$(1.8) \quad \frac{\delta}{\delta\tau} \frac{\partial y^\tau}{\partial x_j^\tau} = -\frac{\partial y^0}{\partial x_i^0} \varphi_{i,j} .$$

Les $2n+1$ arguments de la fonction L sont notés

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y$ et $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$. Vu (1.4), (1.5), (1.7) et

(1.8), la dérivée pour $\tau = 0$, de l'intégrale (1.3) devient

$$\frac{\delta I}{\delta\tau} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \varphi_i - \frac{\partial L}{\partial g_j} \frac{\partial y^0}{\partial x_i^0} \varphi_{i,j} + L \varphi_{i,i} \right) dx^0 .$$

On omet désormais l'indice 0 : si $x \mapsto y(x)$ est une extrémale de I , cette dérivée doit s'annuler quel que soit le champ vectoriel φ , à support compact dans Ω . Moyennant une intégration par parties, cela s'écrit

$$(1.9) \quad \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial g_j} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, y, \text{grad } y) \right] \varphi_i \, dx = 0$$

d'où la nullité de l'expression entre crochets partout dans Ω ; on développe :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} + y_{,i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial g_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial g_i} y_{,ij} - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial y} y_{,i} - \frac{\partial L}{\partial g_j} y_{,ji} = 0$$

c'est-à-dire

$$(1.10) \quad y_{,i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial L}{\partial g_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} \right] = 0 .$$

Ce résultat était prévisible : (1.10) signifie que y vérifie ou bien la condition d'Euler classique ou bien la condition $y_{,i} = 0$. De fait, sur tout ouvert où cette dernière condition est satisfaite, la fonction y est constante, donc inaltérée par les réarrangements.

L'intérêt de la technique précédente est de fournir aussi bien les conditions d'extrémum de I relativement à des classes restreintes de porteurs. Par exemple on pourra restreindre l'extrémisation de I à l'ensemble des convectées de y par des porteurs conservant les volumes, dits porteurs isochoriques ; le champ des vitesses φ d'un tel porteur est caractérisé par la condition

$$(1.11) \quad \text{div } \varphi = 0 .$$

L'annulation de l'intégrale (1.9) pour tout champ de vecteurs à support compact vérifiant (1.11) est classiquement équivalente à l'existence d'une fonction $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que le crochet en (1.9), c'est-à-dire le premier membre de (1.10), soit égal au gradient $q_{,i}$.

2. L'intégrale de Dirichlet et l'hydrodynamique

Appliquons ce qui précède au cas particulier

$$(2.1) \quad I(y) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}^2 y \, dx \quad .$$

La condition d'extrémalité relativement aux porteurs isochoriques s'écrit

$$(2.2) \quad \exists q : y_{,i} \Delta y = q_{,i}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. Pour $n = 2$, on reconnaît là l'équation vérifiée par la fonction de courant d'un écoulement plan stationnaire de fluide parfait incompressible homogène, c'est-à-dire la fonction numérique y telle que le champ vectoriel u des vitesses du fluide s'écrive

$$(2.3) \quad u = k \times \text{grad } y$$

(k : vecteur unité normal au plan ; l'existence de cette fonction de courant est, pour un domaine Ω simplement connexe de \mathbb{R}^2 , équivalente à la condition d'incompressibilité $\text{div } u = 0$). En effet, l'équation de l'hydrodynamique, pour un écoulement stationnaire,

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \text{grad } u^2 + (\text{rot } u) \times u = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + U$$

(p : pression ; U : fonction de force de la densité massique de force extérieure ; ρ : masse spécifique constante du fluide) se transforme en

$$(2.5) \quad \Delta y \text{ grad } y = \text{grad} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} - U \right)$$

ce qui est bien (2.2), moyennant identification adéquate de q .

L'usage de la fonction de courant en hydrodynamique est limité aux problèmes bidimensionnels (on aurait naturellement un résultat analogue pour les écoulements de révolution) ; l'objet du présent papier est de dégager, malgré tout, des propriétés semblables pour l'équation de l'hydrodynamique en dimension quelconque et des écoulements éventuellement non stationnaires. L'idée directrice est que, dans l'intégrale

(2.1), la fonction inconnue y n'intervient que par son gradient, champ vectoriel dont la loi de transport lors de la convection de y est définie par (1.8), c'est-à-dire en notant g ce gradient, calculé en une particule déterminée du porteur,

$$(2.6) \quad \frac{\delta g_j}{\delta \tau} = -g_i \varphi_{i,j}$$

(dérivée prise pour $\tau = 0$). Si, conformément à (2.3), $u = k \times g$, la loi de transport pour u est, par un calcul facile, compte tenu de $\varphi_{i,i} = 0$

$$(2.7) \quad \frac{\delta u_k}{\delta \tau} = u_l \varphi_{k,l} .$$

Exprimer la nullité de la variation première de

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx ,$$

pour tout transport du champ vectoriel u selon la loi (2.7), par un porteur isochorique immobile au bord de Ω , possède une signification en dimension quelconque : on verra que cela donne bien l'équation de l'hydrodynamique.

3. Deux modes de transport d'un vecteur par un porteur

A une particule du porteur de champ de vitesses φ , supposons associé un vecteur g dépendant différenciablement de τ ; nous dirons que ce vecteur est co-porté par le porteur s'il obéit à la loi

$$(3.1) \quad \frac{\delta g_j}{\delta \tau} = -g_i \varphi_{i,j} .$$

Tel est, on l'a vu, le cas si g est, pour chaque valeur de τ , le gradient d'une fonction y^τ , convectée par le porteur.

Si f est un autre vecteur dépendant différentiablement de τ et attaché à la même particule du porteur, on dira que ce vecteur est porté par le porteur si sa dérivée est donnée par la loi

$$(3.2) \quad \frac{\delta f_k}{\delta \tau} = \varphi_{k,l} f_l$$

déjà rencontré en (2.7).

On peut considérer que ces deux modes de transport sont dual l'un de l'autre, en ce sens que (3.1) et (3.2) entraînent immédiatement que le produit scalaire $f \cdot g$ est constant par rapport à τ ; par un raisonnement élémentaire on a une réciproque, d'où

PROPOSITION 1. Si un vecteur attaché à la particule considérée du porteur possède un produit scalaire constant par tout vecteur attaché à la même particule et évoluant selon l'un des deux modes de transport ci-dessus, ce vecteur évolue selon l'autre mode.

Pour toute particule λ du porteur, on notera $\pi_\tau(\lambda)$ ou $\pi(\tau, \lambda)$ sa position pour la valeur τ du "temps" indexant l'évolution (π est l'application placement). Soit $r \mapsto \lambda(r)$ une chaîne de particules, r décrivant un voisinage de 0 dans \mathbb{R} . Supposons que le vecteur

$$f = \frac{d}{dr} \pi(0, \lambda(r)) \Big|_{r=0}$$

existe. Il est classique, si le champ vectoriel φ est continûment différentiable, que le déplacement (ou "transition") du porteur entre les valeurs 0 et τ du temps est un difféomorphisme : c'est le théorème de différentiabilité par rapport aux conditions initiales pour les intégrales de l'équation différentielle

$$(3.3) \quad \frac{\delta x}{\delta \tau} = \varphi(x)$$

à la fonction inconnue $\tau \mapsto x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Donc le vecteur

$$f(\tau) = \frac{d}{dr} \pi(\tau, \lambda(r)) \Big|_{r=0}$$

existe pour chaque τ dans un voisinage de 0 et la théorie classique de l'équation aux variations pour (3.3) donne précisément comme dérivée de ce vecteur par rapport à τ l'expression (3.2).

De façon imagée, en écrivant

$$d\pi = f \, dr$$

on peut dire que le vecteur mobile f est, au facteur près infiniment petit dr (indépendant de τ) le vecteur joignant les positions de deux particules du porteur, infiniment voisines. Si, par ailleurs, g est le gradient d'une fonction y convectée par le porteur, il est clair que le produit scalaire

$$dy = g \cdot d\pi = g \cdot f \, dr ,$$

représentant la différence des valeurs prises par cette fonction en deux particules infiniment voisines, est constant par rapport à τ : cela illustre la Proposition 1.

4. Mesure convectée

On fait $n = 3$ pour fixer les idées, mais raisonnements et conclusions s'adaptent à toute dimension. Soient trois vecteurs f_1, f_2, f_3 attachés à une même particule du porteur et portés. Le produit mixte (f_1, f_2, f_3) est une fonction de τ ; on tire de (3.2) que

$$(4.1) \quad \frac{\delta}{\delta\tau} (f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, f_3) \operatorname{div} \varphi .$$

Le calcul est classique : c'est celui qu'on fait traditionnellement en cinématique des milieux continus pour établir l'équation de la dilata-tion ; dans ce dernier cas on fait choix d'un indexage $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans l'ensemble des particules du milieu, tel que, pour un certain placement

π^0 , l'application $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \pi^0(\lambda)$ soit un difféomorphisme local de \mathbb{R}^3 dans l'espace du repère (espaces des x). L'hypothèse de régularité du mouvement fait qu'il en est de même pour tout π^τ et les trois vecteurs dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \pi^\tau(\lambda)$ sont bien trois vecteurs portés. L'équation de la dilatation exprime la dérivée par rapport à τ de leur produit mixte.

L'indexage $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ consistant en une bijection du milieu continu sur une partie de \mathbb{R}^3 permet de transférer sur le milieu la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^3 ; notons $d\lambda$ la mesure ainsi définie sur le milieu, indépendante de tout placement ou mouvement (mais subordonnée au choix de l'indexage). Chaque placement π^τ donne de cette mesure une image dans l'espace des x ; notons $d\lambda^\tau$ cette mesure image; elle possède, par rapport à la mesure de Lebesgue dx une densité égale à

$$\frac{d\lambda^\tau}{dx} = \det \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j^\tau} = \left(\det \frac{\partial x_j^\tau}{\partial \lambda_i} \right)^{-1}.$$

Or $\det \frac{\partial x_j^\tau}{\partial \lambda_i}$ est justement le produit mixte des trois vecteurs dérivées partielles invoquées ci-dessus; sa dérivée $\frac{\delta}{\delta \tau}$ est donc donnée par (4.1).

Plus généralement, pour toute mesure $d\nu$ définie sur le milieu continu par une fonction densité $\frac{d\nu}{d\lambda}$ indépendante de τ , on aura

$$\frac{d\nu^\tau}{dx} = \frac{d\nu^\tau}{d\lambda^\tau} \frac{d\lambda^\tau}{dx}$$

avec $\frac{d\nu^\tau}{d\lambda^\tau} = \frac{d\nu}{d\lambda}$ constant par rapport à τ , d'où

$$(4.2) \quad \frac{\delta}{\delta \tau} \left(\frac{d\nu^\tau}{dx} \right) = - \frac{d\nu^\tau}{dx} \operatorname{div} \varphi.$$

Nous dirons qu'une telle mesure $d\nu$ est convectée par le milieu continu.

Tel est le cas en mécanique pour la mesure masse d 'un milieu continu et α

reconnaît en (4.2) l'équation de conservation de la masse.

Considérons maintenant une surface Σ constituée de particules du milieu continu, définie par une représentation paramétrique

$$\lambda = \lambda(r, s)$$

où (r, s) décrit une portion Δ de \mathbb{R}^2 . L'image de cette surface par le placement π^τ est une surface de l'espace des x , définie par la représentation paramétrique

$$x = \pi^\tau(\lambda(r, s)) \quad .$$

On suppose que l'application $(r, s) \mapsto x$ ainsi définie est continûment différentiable (pour une valeur de τ , donc pour toutes, vu la régularité du mouvement). Le flux d'un champ vectoriel v de l'espace des x à travers la surface $\pi^\tau(\Sigma)$ s'exprime par l'intégrale double (dS : mesure aire ; \vec{n} vecteur unité normal dans un sens choisi)

$$(4.3) \quad \iint_{\pi^\tau(\Sigma)} v \cdot n \, dS = \iint_{\Delta} v(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{\partial s} \, dr \wedge ds \quad .$$

Pour τ variable, $\frac{\partial x}{\partial r}$ et $\frac{\partial x}{\partial s}$ sont deux vecteurs portés. Supposons que le champ vectoriel v soit associé au milieu continu de la façon suivante

$$v = \frac{dv_\tau}{dx} u$$

où u est un champ vectoriel porté et où dv est une mesure convectée.

Alors l'intégrale (4.3) est constante par rapport à τ . En effet l'intégrande s'écrit dans ce cas $\frac{dv_\tau}{dx} (u, \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s})$, dont la dérivée $\frac{\delta}{\delta \tau}$ est nulle, vu (4.1) et (4.2). On en tire :

PROPOSITION 2. Soit u un champ vectoriel porté, dv une mesure convectée, et soit $v = \frac{dv_\tau}{dx} u$; alors la mesure $\operatorname{div} v \, dx$ est, pour chaque τ , l'image d'une mesure convectée. En particulier, si $\operatorname{div} v = 0$

pour une valeur de τ , il en est de même pour tout τ .

En effet, toute partie régulière Λ du milieu continu a pour bord une surface (fermée) Σ constituée de particules de ce milieu. L'intégrale de $\text{div } v \, dx$ sur l'image $\pi^\tau(\Lambda)$ est égale au flux de v à travers $\pi^\tau(\Sigma)$, flux constant par rapport à τ en vertu de ce qui précède.

5. Fluide incompressible hétérogène en mouvement stationnaire

On suppose, comme dans tout ce papier, que la densité massique de force extérieure est de la forme $\text{grad } U$, avec ici U indépendant de t .

L'équation de l'hydrodynamique, pour un écoulement supposé stationnaire s'écrit

$$(5.1) \quad u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + U_{,i} .$$

Le fluide étant a priori hétérogène, la masse spécifique ρ n'est pas une constante ; l'équation de conservation de la masse

$$\rho_{,t} + (\rho u_i)_{,i} = 0$$

où l'on suppose ρ indépendant de t pour chaque x (i.e. l'écoulement est stationnaire, non seulement du point de vue cinématique, mais "matériellement") se réduit à

$$(5.2) \quad (\rho u_i)_{,i} = 0 .$$

Enfin la condition cinématique de conservation du volume de chaque partie du fluide s'écrit

$$(5.3) \quad u_{i,i} = 0 .$$

Noter que, moyennant (5.3) on peut remplacer (5.2) par

$$(5.4) \quad u_i \rho_{,i} = 0$$

exprimant que la dérivée de ρ dans la direction de u est nulle, i.e. ρ est constant sur chaque ligne de courant.

La Proposition 2 nous donne tout d'abord :

Si, pour un porteur isochorique, la fonction scalaire ρ est convectée et le champ vectoriel u porté, les conditions (5.2) et (5.3) sont conservées.

En effet, si le porteur est isochorique, dx est (pour chaque τ , l'image d') une mesure convectée : on peut donc, dans la Proposition 2 prendre $dv^\tau = dx$. Comme ρ est convectée, on peut aussi prendre $dv^\tau = \rho dx$.

Vient alors une caractérisation par variation horizontale des solutions des équations précédentes :

PROPOSITION 3. Une fonction scalaire ρ et un champ vectoriel u vérifiant (5.2) sont solutions de (5.1) sur l'ouvert Ω (i.e. il existe une fonction scalaire p satisfaisant avec eux cette équation) si et seulement si elles annulent la variation horizontale de l'intégrale

$$I(u, \rho) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u_i u_i + U \right) \rho dx$$

relativement aux porteurs isochoriques à support compact dans Ω convectant ρ et portant u .

Preuve. On effectue la dérivation $\frac{\delta}{\delta \tau}$ de I , relativement à un porteur φ , isochorique à support compact, en observant que, pour un tel porteur, l'application $\exp \tau \varphi$ envoie Ω sur lui-même et conserve la mesure de Lebesgue. Par hypothèse

$$\frac{\delta \rho}{\delta \tau} = 0$$

$$\frac{\delta u_i}{\delta \tau} = \varphi_{i,j} u_j ;$$

par ailleurs, la dérivée de ρU en suivant une particule du porteur

s'écrit

$$\frac{\delta \rho U}{\delta \tau} = \rho \frac{\delta U}{\delta \tau} = \rho U_{,i} \varphi_i$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \tau} &= \int_{\Omega} \left(\rho u_i \frac{\delta u_i}{\delta \tau} + \rho \frac{\delta U}{\delta \tau} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho u_i u_{j,j} \varphi_{i,j} + \rho U_{,i} \varphi_i \right) dx, \end{aligned}$$

ou, après une intégration par parties, puisque φ est à support compact,

$$\frac{\delta I}{\delta \tau} = \int_{\Omega} \left[\rho U_{,i} - (\rho u_i u_{j,j})_{,j} \right] \varphi_i dx.$$

Classiquement, l'annulation de cette intégrale pour toute fonction vectorielle φ à support compact et divergence nulle équivaut à l'existence d'une fonction scalaire p telle que

$$\rho U_{,i} - (\rho u_i u_{j,j})_{,j} = p_{,i}.$$

Vu (5.2), c'est bien (5.1).

6. Fluide incompressible hétérogène en mouvement non stationnaire

Ici, le domaine Ω , noté Ω_t , peut dépendre de t ; soit

$$\Psi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : x \in \Omega_t\}.$$

Les composantes u_1, u_2, u_3 de la vitesse, la masse spécifique ρ , la pression p , sont des fonctions de t, x_1, x_2, x_3 . On rebaptise x_0 la variable t et on pose :

CONVENTION. Les indices latins prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, les indices grecs dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

Alors en convenant que

$$(6.1) \quad u_0 \equiv 1$$

l'équation de l'hydrodynamique

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + U_{,i}$$

(où U peut maintenant dépendre aussi de t), se récrit

$$(6.2) \quad u_{\alpha} u_{i,\alpha} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + U_{,i} .$$

L'équation de conservation de la masse prend la forme

$$(6.3) \quad (\rho u_{\alpha})_{,\alpha} = 0 ,$$

et l'équation de conservation du volume

$$(6.4) \quad u_{\alpha,\alpha} = 0 .$$

Comme au paragraphe précédent, mais maintenant en dimension 4, on observe que les conditions (6.3) et (6.4), exprimant la nullité de la divergence de champs vectoriels dans \mathbb{R}^4 sont conservées par variation horizontale, si ces champs vectoriels sont portés par un porteur isochorique dans \mathbb{R}^4 convectant ρ .

Pour ce qui suit, nous allons nous restreindre à des porteurs dont le champ de vitesses a sa première composante nulle :

$$\varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Chaque particule d'un tel porteur se déplace dans un hyperplan $x_0 = \text{const}$: nous dirons que c'est un porteur isochrone. Si le vecteur de composantes u_{α} , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, est porté on a

$$\frac{\delta u_0}{\delta \tau} = \varphi_{0,\alpha} u_{\alpha} = 0 .$$

La condition (6.1) est donc conservée par le transport.

La condition d'isochorie du porteur s'écrit par ailleurs

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = \varphi_{i,i} = 0 .$$

PROPOSITION 4. Une fonction scalaire ρ et une fonction vectorielle u vérifiant (6.1) et (6.3) sont solutions de (6.2) sur l'intérieur de Ψ (i.e. il existe une fonction scalaire p satisfaisant avec eux cette équation) si et seulement si elles annulent la variation horizontale

de l'intégrale

$$A = \int_{\Psi} \left(\frac{1}{2} u_i u_i + U \right) \rho \, d\psi$$

($d\psi$ mesure de Lebesgue dans $\Psi \subset \mathbb{R}^4$) relativement aux porteurs isocho-
riques isochrones, à support compact dans l'intérieur de Ψ , convectant
 ρ et portant u . De façon équivalente on peut remplacer A par

$$A' = \int_{\Psi} \left(\frac{1}{2} u_\alpha u_\alpha + U \right) \rho \, d\psi \quad .$$

Preuve. Les porteurs en question envoient l'intérieur de Ψ sur lui-même et conservent la mesure $\rho d\psi$, donc

$$(6.5) \quad \frac{\delta A}{\delta \tau} = \int_{\Psi} \left(u_i \frac{\delta u_i}{\delta \tau} + \frac{\delta U}{\delta \tau} \right) \rho \, d\psi = \int_{\Psi} \left(\rho u_i \varphi_{i,\alpha} u_\alpha + \rho U_{,i} \varphi_i \right) \rho \, d\psi \\ = \int_{\Psi} \left[\rho U_{,i} - (\rho u_i u_\alpha)_{,\alpha} \right] \varphi_i \, d\psi \quad .$$

Si ρ et u_i vérifient (6.2) et (6.3), on a

$$\rho U_{,i} - (\rho u_i u_\alpha)_{,\alpha} = \rho U_{,i} - \rho u_\alpha u_{i,\alpha} = -p_{,i}$$

d'où

$$\frac{\delta A}{\delta \tau} = \int_{\Psi} -p_{,i} \varphi_i \, d\psi = \int_{\Psi} -p_{,\alpha} \varphi_\alpha \, d\psi = \int_{\Psi} p \varphi_{\alpha,\alpha} \, d\psi = 0 \quad .$$

Inversement, supposons la nullité de l'expression (6.5) pour tout φ possédant les propriétés requises. Soit θ une valeur particulière de $x_0 = t$ et soient v_i les composantes d'un champ vectoriel à trois dimensions, à divergence nulle et support compact dans Ω_θ . Soit f une fonction différentiable d'une variable réelle, à support compact voisin de θ ; si ce support est assez petit, le champ vectoriel φ défini dans \mathbb{R}^4 par

$$\varphi_\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ f(x_0) v_\alpha(x_1, x_2, x_3) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

a un support compact dans l'intérieur de Ψ et sa divergence est nulle,

d'où nullité de (6.5) d'après l'hypothèse. On applique ce résultat à une suite de choix de f tels que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$$

avec le support de f de plus en plus voisin de θ . Il vient à la limite

$$\int_{\Omega_\theta} [\rho U_i - (\rho u_i u_{\alpha'})_{,\alpha}] v_i dx$$

quel que soit v , à divergence nulle et support compact dans Ω_θ , d'où pour chaque θ , l'existence de la fonction p assurant (6.2).

Pour ce qui est de l'intégrale A' , il suffit d'observer que

$$A' - A = \int_{\Psi} \frac{1}{2} \rho d\Psi$$

expression invariante dans toute variation horizontale du type considéré.

7. Fluide compressible hétérogène

On suppose dans ce paragraphe que, pour chaque particule du fluide, existe une loi de compressibilité, relation entre la masse spécifique et la pression : les exemples classiques de cette situation sont ceux où le comportement du fluide est isotherme ou bien encore adiabatique réversible. Le fluide étant a priori hétérogène, cette loi dépend de la particule considérée ; on va donc associer à chaque particule du fluide une valeur d'une variable κ , dite qualité, à valeurs dans un ensemble qu'il n'y a pas à structurer pour l'instant. Par exemple pour une évolution adiabatique réversible d'un fluide dont toutes les particules sont de même nature, κ est l'entropie, à valeurs dans \mathbb{R} . Par hypothèse la particule conserve cette qualité dans toute évolution et la loi de compressibilité sera écrite

$$(7.1) \quad p = p(\kappa, \sigma)$$

où $\sigma = \frac{1}{\rho}$ désigne le volume spécifique. La fonction p peut éventuellement dépendre de t (exemple : fluide dont la température est une fonction donnée du temps).

Avec les notations du paragraphe précédent (indices grecs à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, etc...) les équations du mouvement s'écrivent

$$(7.2) \quad u_{\alpha} u_{i, \alpha} = -\sigma p_{, i} + U_{, i}$$

$$(7.3) \quad \left(\frac{1}{\sigma} u_{\alpha}\right)_{, \alpha} = 0$$

à joindre à (7.1) et à la condition de conservation de κ pour chaque particule.

On note par ailleurs $P(\kappa, \sigma)$ une primitive de $p(\kappa, \sigma)$ par rapport à σ , c'est-à-dire qu'on écrit (7.1) sous la forme

$$(7.4) \quad p = \frac{\partial P}{\partial \sigma}(\kappa, \sigma) .$$

On appelle Ψ la même région de \mathbb{R}^4 qu'au paragraphe précédent ; $d\Psi$ est la mesure de Lebesgue sur Ψ .

PROPOSITION 5. Une fonction vectorielle u , une fonction scalaire σ satisfaisant (7.3) et une fonction qualité κ , sont solutions de (7.2) et (7.4) sur l'intérieur de Ψ si et seulement si elles annulent la variation horizontale de l'intégrale

$$(7.5) \quad A = \int_{\Psi} \left[\frac{1}{2} u_i u_i + P(\kappa, \sigma) + U \right] \frac{1}{\sigma} d\Psi$$

pour les porteurs isochrones à support compact dans l'intérieur de Ψ portant u , convectant κ ainsi que la mesure $\frac{1}{\sigma} d\Psi$.

De façon équivalente, on peut remplacer A par

$$(7.6) \quad A' = \int_{\Psi} \left[\frac{1}{2} u_{\alpha} u_{\alpha} + P(\kappa, \sigma) + U \right] \frac{1}{\sigma} d\Psi$$

Preuve. Soient φ_{α} les composantes de la vitesse d'un tel porteur

($\varphi_0 = 0$) ; la mesure $\frac{1}{\sigma} d\psi$ est convectée si et seulement si

$$(7.7) \quad \frac{\delta\sigma}{\delta\tau} = \sigma \varphi_{\alpha, \alpha} .$$

La convention posée, concernant les indices latins et grecs, est compatible avec la notation de Kronecker $\delta_{i\alpha}$: par définition

$$\delta_{i\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui fait en particulier $\delta_{i\alpha} = 0$ si $\alpha = 0$. Alors (7.7) peut s'écrire, puisque $\varphi_\alpha = \delta_{i\alpha} \varphi_i$,

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\tau} = \delta_{i\alpha} \sigma \varphi_{i, \alpha} .$$

Rappelons que la fonction P peut dépendre de $x_0 = t$; mais puisque $\varphi_0 \equiv 0$, on a si κ est convecté,

$$\frac{\delta}{\delta\tau} P(x_0, \kappa, \sigma) = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\delta\sigma}{\delta\tau} .$$

Comme le porteur conserve Ψ et la mesure $\frac{1}{\sigma} d\psi$, on a

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta\tau} &= \int_{\Psi} \left[u_i \frac{\delta u_i}{\delta\tau} + \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{\delta\sigma}{\delta\tau} + \frac{\delta U}{\delta\tau} \right] \frac{1}{\sigma} d\psi \\ &= \int_{\Psi} \left[u_i \varphi_{i, \alpha} u_\alpha + \frac{\partial P}{\partial \sigma} \delta_{i\alpha} \sigma \varphi_{i, \alpha} + U_{, i} \varphi_i \right] \frac{1}{\sigma} d\psi \\ &= \int_{\Psi} \left[- \left(\frac{1}{\sigma} u_i u_\alpha \right)_{, \alpha} - \delta_{i\alpha} \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_{, \alpha} + \frac{1}{\sigma} U_{, i} \right] \varphi_i d\psi \end{aligned}$$

La nullité de cette intégrale, pour tout φ_i à support compact dans l'intérieur de Ψ , équivaut à

$$\left(\frac{1}{\sigma} u_i u_\alpha \right)_{, \alpha} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)_{, i} + \frac{1}{\sigma} U_{, i}$$

en tout point de cet intérieur. Comme (7.3) est vérifiée par hypothèse, cela est bien l'équation (7.2), avec p donné par (7.4).

En ce qui concerne l'intégrale A' on observe comme au paragraphe précédent que $A - A'$ est constant dans les variations horizontales considérées.

REMARQUE 1. L'hypothèse d'un porteur portant u et convectant la mesure $\frac{1}{\sigma} d\psi$ fait que la condition (7.3), nullité de la divergence du champ vectoriel $\frac{1}{\sigma} u_\alpha$, est conservée dans les variations horizontales.

REMARQUE 2. Par hypothèse, $\text{grad } U$ est la densité massique de force extérieure. Plus généralement on peut introduire une mesure autre que la masse, et poser que $\text{grad } U$ est la densité de force extérieure par rapport à cette mesure (exemple : force électrostatique provenant d'un champ électrique extérieur, exercée sur un fluide non conducteur ; la mesure en question et la mesure charge électrique). La Proposition précédente s'étend à ce cas, si on pose que ladite mesure est convectée par le porteur.

Cas d'un mouvement stationnaire

S'il est posé a priori que le mouvement est stationnaire, comme au § 5, les équations (7.2) et (7.3) sont à remplacer par

$$(7.9) \quad u_j u_{i,j} = -\sigma p_{,i} + U_{,i}$$

$$(7.10) \quad \left(\frac{1}{\sigma} u_j\right)_{,j} = 0$$

et, en (7.4), la fonction P est supposée indépendante de t . On établit alors de la même manière :

PROPOSITION 6. Une fonction vectorielle u , une fonction scalaire σ , satisfaisant (7.10) et une fonction qualité κ , sont solutions de (7.9) et (7.4) sur Ω si et seulement si elles annulent la variation horizontale de l'intégrale

$$I = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u_i u_i + P(\kappa, \sigma) + U \right] \frac{1}{\sigma} dx$$

pour les porteurs à support compact dans Ω portant u , convectant κ ainsi que la mesure $\frac{1}{\sigma} dx$.

8. Lien avec le principe de Hamilton

La situation classique de la dynamique analytique, pour les systèmes scléronomiques à liaisons parfaites est la suivante : Les systèmes considérés sont de liberté finie n et l'ensemble des configurations éventuelles du système est muni d'une structure de variété différentielle de dimension n , soit \mathcal{U} . Un mouvement éventuel est une application $t \mapsto q(t)$ (deux fois différentiable) d'un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ dans \mathcal{U} . Pour chaque $q \in \mathcal{U}$ est définie sur l'espace tangent \mathfrak{T}_q une forme quadratique $\dot{q} \mapsto T_q(\dot{q})$, expression générique de l'énergie cinétique du système en fonction de sa vitesse $\dot{q} \in \mathfrak{T}_q$. La totalité des forces subies par le système s'il vient à passer par la configuration $q \in \mathcal{U}$ est représentée par un élément Q de l'espace cotangent \mathfrak{T}_q^* ; on suppose que la forme différentielle $dq \mapsto \langle Q, dq \rangle$ est la différentielle d'une fonction de force $-W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les mouvements satisfaisant les équations de la dynamique sont les extrémales de la fonctionnelle action hamiltonienne

$$(8.1) \quad \mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} [T_q(\dot{q}(t)) - W(q(t))] dt .$$

Cette propriété s'adapte classiquement au cas d'un fluide parfait compressible vérifiant les conditions du § 7 (nous laissons désormais de côté le cas d'un fluide incompressible qui requiert seulement quelques modifications du raisonnement). Alors la variété \mathcal{U} n'a plus une dimension finie ; son élément générique q consiste en un placement π du fluide ; on identifie l'élément \dot{q} , déclaré tangent à \mathcal{U} , à la fonction dérivée partielle

$$\dot{\pi} = \frac{\partial \pi}{\partial \tau} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$$

et

$$(8.2) \quad T_q(\dot{q}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\dot{\pi})^2 d\mu$$

($d\mu$: mesure masse sur l'ensemble Λ des particules du fluide).

Si on se restreint, pour simplifier, au cas d'un fluide enclos dans un vase borné fixe, les forces à prendre en considération sont :

1° Les forces extérieures de masse dont la puissance virtuelle s'écrit

$$\int_{\Lambda} \text{grad } U \cdot \delta \pi d\mu = \delta \int_{\Lambda} U(\pi(\lambda)) d\mu(\lambda)$$

Cela leur donne, formellement, comme énergie potentielle, pour t fixé, la fonctionnelle

$$(8.3) \quad \pi \mapsto - \int_{\Lambda} U(\pi(\lambda)) d\mu(\lambda)$$

(rappelons que U peut, par ailleurs, dépendre de t).

2° Les forces intérieures, dont la puissance virtuelle, si les hypothèses du § 7 sont vérifiées, s'exprime classiquement par

$$\int_{\Lambda} p \delta \sigma d\mu = \delta \int_{\Lambda} P(\kappa(\lambda), \sigma(\lambda)) d\mu(\lambda)$$

Comme précédemment, $\kappa(\lambda)$ désigne la qualité de la particule λ du fluide et $\sigma(\lambda)$ le volume spécifique dans le placement π .

L'énergie potentielle totale est donc la fonctionnelle

$$(8.4) \quad \pi \mapsto - W(\pi) = - \int_{\Lambda} [U(\pi) + P(\kappa, \sigma)] d\mu$$

Pour écrire, selon la technique du calcul des variations classiques, des conditions nécessaires d'extrémum de l'action hamiltonienne \mathcal{H} , on insère le mouvement inconnu $(t, \lambda) \mapsto \pi(t, \lambda)$ dans une chaîne de mouvements π^τ dépendant différentiellement de τ d'une manière "verticale", c'est-à-dire

$$(8.5) \quad \pi^\tau(t, \lambda) = \pi(t, \lambda) + \tau \zeta(t, \lambda)$$

Nous allons utiliser le choix suivant de la fonction vectorielle ζ

$$(8.6) \quad \zeta(t, \lambda) = \varphi(t, \pi(t, \lambda))$$

où $x \mapsto \varphi(t, x)$ est, pour chaque t , un champ vectoriel de \mathbb{R}^n , à support compact dans Ω_t . Alors

$$(8.7) \quad \dot{\pi}^\tau(t, \lambda) = \dot{\pi}(t, \lambda) + \tau \dot{\zeta}(t, \lambda)$$

avec, vu (8.6)

$$(8.8) \quad \dot{\zeta}_i(t, \lambda) = \varphi_{i,t}(t, \pi(t, \lambda)) + \varphi_{i,j}(t, \pi(t, \lambda)) \dot{\pi}_j(t, \lambda).$$

Le calcul de $\frac{\delta}{\delta \tau} \mathcal{A}(\pi^\tau)$ comporte d'abord celui du terme

$$(8.9) \quad \frac{\delta}{\delta \tau} \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Lambda} \dot{\pi} \cdot \frac{\delta \dot{\pi}^\tau}{\delta \tau} d\mu dt$$

où, vu (8.7) et (8.8), on a

$$\dot{\pi} \cdot \frac{\delta \dot{\pi}^\tau}{\delta \tau} = \dot{\pi}_i \dot{\zeta}_i = \dot{\pi}_i (\varphi_{i,t} + \varphi_{i,j} \dot{\pi}_j).$$

On opère sur (8.9) le changement de variable $\lambda = \pi^{-1}(t, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \tau} \int_{t_0}^{t_1} T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega_t} u_i (\varphi_{i,t} + \varphi_{i,j} u_j) \rho dx dt \\ &= \int_{\Psi} u_i \varphi_{i,\alpha} u_\alpha \frac{1}{\sigma} d\psi \end{aligned}$$

ce qui est un terme déjà écrit en (7.8).

Vu, par ailleurs, l'expression (8.4) de l'énergie potentielle,

on a

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \int_{t_0}^{t_1} -W dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Lambda} \frac{\delta}{\delta \tau} [U(\pi) + P(u, \sigma)] d\mu dt.$$

Or U est une fonction de t et x et compte tenu de (8.5) et (8.6)

on a, pour $\tau = 0$,

$$\frac{\delta}{\delta \tau} U(t, \pi^\tau(t, \lambda)) = U_{,i}(t, \pi(t, \lambda)) \frac{\delta \pi}{\delta \tau} = U_{,i}^!(t, \pi) \varphi_i(\pi)$$

donc

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Lambda} \frac{\delta}{\delta \tau} U(t, \pi) = \int_{\Psi} U_{,i}^!(t, x) \varphi_i(t, x) \frac{1}{\sigma} d\psi$$

ce qui est un autre terme de (7.8).

Enfin

$$\frac{\delta}{\delta \tau} P(\nu, \sigma) = \frac{\partial P}{\partial \sigma}(\nu, \sigma) \frac{\delta \sigma}{\delta \tau}$$

avec

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \tau} = \sigma \varphi_{i,i}(t, \pi(t, \lambda))$$

puisque, t étant fixé, si τ est interprété comme le temps dans (8.5), la chaîne des placements $\tau \mapsto \pi^\tau$ est un mouvement de fluide dont φ est le champ des vitesses.

Ainsi conduite, la mise en oeuvre du principe de Hamilton fait donc apparaître les mêmes termes que (7.8).

9. Bibliographie et prospective

Comme on le rappelait au paragraphe précédent, le rattachement de la dynamique d'un fluide non visqueux au principe de moindre action de Hamilton est facile et classique lorsqu'on opère en "variables de Lagrange" : l'inconnue du problème est dans ce cas la fonction placement $\pi(t, \lambda)$. Par contre un nombre assez important de publications ont été consacrées dans les vingt dernières années à la recherche de caractérisations variationnelles des solutions des équations écrites en "variables d'Euler" t, x . Selinger et Whitham [1] démystifient sagement l'objectif : une première réponse, concernant s'importe quelle équation écrite sous la forme

$$F(X) = 0 \quad ,$$

où F prend ses valeurs dans un espace normé, est que ses solutions minimisent la fonctionnelle

$$X \mapsto \|F(X)\| \quad .$$

Cette remarque est plus qu'une boutade ; elle correspond en fait à une

démarche usuelle en analyse numérique. Les mêmes auteurs observent par ailleurs que, si l'inconnue est le champ des vitesses $(t, x) \mapsto u$ d'un fluide, le passage de cette inconnue à l'inconnue de Lagrange $(t, \lambda) \mapsto \pi$ est une opération fonctionnelle codifiée : à ce titre le principe de moindre action classique caractérise aussi bien u que π .

Une autre réponse sans réplique est apportée par Casal [2] : il est usuellement posé en hydrodynamique que, pour chaque t , le placement $\lambda \mapsto x = \pi(t, \lambda)$ est un difféomorphisme, au moins local. On peut donc tout aussi bien prendre comme inconnue le difféomorphisme réciproque $\pi^{-1} : (t, x) \mapsto \lambda$ et exprimer à partir de π^{-1} l'action hamiltonienne. Comme t, x sont traditionnellement appelées les variables d'Euler, ce qu'on obtiendra sera bien une formulation "eulérienne" du principe de Hamilton. Noter que, si on applique à cette démarche la terminologie que nous proposons dans le présent rapport, une variation verticale de π équivaut à une variation horizontale de π^{-1} . Les idées de Casal sont présentées de façon très systématique dans [3], [4], faisant ressortir notamment un parallélisme avec le formalisme qu'utilise Souriau [5] en dynamique relativiste. La synthèse qu'effectue Casal le conduit naturellement à inclure la méthode traditionnelle des travaux virtuels : il observe que cela revient à définir une variation infinitésimale de l'application placement $\lambda \mapsto x$ par la donnée d'un champ vectoriel dans l'espace des x : c'est justement ce qui est fait au § 8 du présent rapport. Dans la lignée de Casal, les travaux de Gouin [6], [7] atteignent des résultats nouveaux concernant l'électrodynamique des fluides parfaits, les ondes de choc, etc...

Le vocable "variationnel" a perdu aujourd'hui, pour une grande partie du public mathématique, beaucoup de sa signification : énoncer un

problème aux dérivées partielles "sous forme variationnelle", c'est simplement exprimer la nullité d'un élément d'un espace fonctionnel par le fait que cet élément confère la valeur zéro à une famille de formes linéaires. La connotation est la même dans la locution "inéquation variationnelle".

Tout à l'opposé, on observera que les propriétés énoncées dans le présent papier sont variationnelles au sens classique : elles caractérisent les éléments inconnus comme points critiques de fonctions numériques définies sur des ensembles. A cet égard les remarques telles que celle qui est faite, par exemple, au § 5, sont essentielles : les conditions $\operatorname{div} u = 0$ et $\operatorname{div} \rho u = 0$ sont des contraintes imposées a priori aux éléments inconnus u et ρ ; mais elles sont automatiquement satisfaites par les éléments en compétition, lesquels se déduisent les uns des autres par transport. De même la propriété d'isochorie assignée au porteur dans ce paragraphe est de nature globale : ce n'est pas une simple condition différentielle imposée localement aux variations infinitésimales. Ce fait prendra toute son importance si les techniques de variation horizontale sont appliquées un jour au calcul numérique.

Les travaux consacrés antérieurement aux propriétés variationnelles des équations eulériennes des fluides parfaits se placent souvent à mi-chemin entre les deux attitudes ci-dessus. L'énoncé de Herivel [8] mettait en oeuvre une classe trop large de variations ; par suite les extrémales correspondantes constituaient une famille restreinte de solutions des équations de l'hydrodynamique (famille dont Casal [2] souligne l'intérêt). Une voie conduisant à toutes les solutions a été ouverte par C.C. Lin (présentée par Serrin [9]) ; elle conduit à imposer aux

variations infinitésimales une restriction supplémentaire, intitulée "contrainte de conservation de l'identité des particules". La contemplation des calculs laisse à penser qu'on est alors sur la bonne voie mais, si des phrases bien choisies peuvent faire apparaître l'écriture de cette contrainte comme naturelle, le procédé reste conceptuellement assez obscur.

Dans [1] [2] [6] [9], l'exploitation des assertions variationnelles avec contrainte par le moyen de multiplicateurs de Lagrange conduit automatiquement à la représentation du champ des vitesses u sous la forme de Clebsch $u = \text{grad } \varphi + \alpha \text{ grad } \beta$. A la forme de Clebsch peuvent, si l'on veut, se rattacher les propriétés variationnelles de deux types particuliers importants d'écoulement : les écoulements stationnaires irrotationnels, pour lesquels u a la forme $\text{grad } \varphi$, et les écoulements stationnaires bidimensionnels plans ou de révolution, pour lesquels on peut introduire la fonction de courant du champ vectoriel ρu . Ces propriétés considérées initialement par Bateman [10] prennent aujourd'hui de l'importance en analyse numérique ; leur mise en oeuvre bénéficie des progrès récents de l'optimisation ; il est notamment utile de les traiter par paires en dualité (cf. Sewell [11], Morice [12], Couot [13]). Elles ont servi aussi à établir des théorèmes d'existence.

Un autre type de propriétés variationnelles en hydrodynamique a été introduit par Arnold [14] en vue d'applications aux critères de stabilité ; la portée semble limitée aux écoulements stationnaires de fluide parfait incompressible homogène. Formulée en termes de champs de vitesses, la propriété d'Arnold est assez longue à expliquer, mais, dans le cas $n = 2$, nous pouvons aussi l'énoncer en termes de la fonction

vorticité ζ : la propriété consiste alors en ce que la fonctionnelle énergie cinétique $\zeta \mapsto T$ (fonctionnelle quadratique qui peut se représenter par une intégrale quadruple mettant en jeu la fonction de Green du domaine considéré) est stationnaire par rapport aux réarrangements isochoriques de ζ . Il s'agit donc d'un théorème de variation horizontale ; l'idée a été mise à profit par Benjamin [15] pour prouver l'existence de tourbillons annulaires.

Venons-en maintenant à la prospective. On a souligné dans les paragraphes précédents que le fluide considéré était, a priori, hétérogène. A chaque particule est attribué une valeur de la variable qualité ; une certaine régularité des fonctions u, ρ, p est cependant requise pour les démonstration. On conçoit que les propriétés variationnelles horizontales puissent être étendues à des écoulement dans lesquels certaines de ces fonctions possèdent des discontinuités. Par exemple, on peut avoir $\rho = 0$ dans une partie du domaine considéré, limitée par une surface suffisamment régulière : ainsi sont annexés les problèmes d'écoulement à surface libre. Cela pourrait se démontrer tout de suite en rejoignant la formulation classique de tels problèmes : écrire les équations de l'hydrodynamique dans chaque domaine de régularité et des conditions de raccord sur les surfaces de discontinuité. Nous préférons consacrer d'abord un prochain rapport de ce séminaire à l'écriture des équations de l'hydrodynamique sous une forme incluant les discontinuités.

La technique des variations horizontales permet donc de retrouver comme cas particuliers les caractérisations variationnelles classiques des écoulements à surface libre (Garabedian et Spencer [16], Casal [17]). Dans Morice [12] des propriétés de ce type sont exploitées

numériquement par des algorithmes comportant une déformation progressive d'un réseau d'éléments finis.

Même si les inconnues u , p , ρ sont des fonctions irrégulières, les porteurs considérés resteront très réguliers. Nous envisageons cela comme un mode de définition de solutions faibles des équations de l'hydrodynamique. Le lien avec d'éventuelles variables de Lagrange et le principe de Hamilton devient alors plus ténu.

D'autres propriétés variationnelles horizontales des équations de l'hydrodynamique, sans connection visible avec le principe de Hamilton ou la méthode des travaux virtuels, feront l'objet de rapports ultérieurs : elles concernent les fluides incompressibles (hétérogènes bien sûr), sans pour autant que les porteurs soient isochoriques.

Le présent papier cherchait seulement à caractériser les solutions des équations de l'hydrodynamique dans un domaine, sans attention aux conditions au bord ; c'est pourquoi les champs φ considérés avaient un support compact. Le but ultime est évidemment l'étude de problèmes aux limites et la discussion de leur stabilité.

10. Références

1. R.L SELINGER, G.B. WHITHAM. Variational principles in continuum mechanics, Proc. Roy. Soc. A. 305 (1968), 1-25.
2. P. CASAL. Principes variationnels en fluide compressible et en magnéto-dynamique des fluides, J. de Mécanique, 5 (1966), 149-161.
3. P. CASAL. Equations générales des milieux continus parfaits exprimés dans l'espace-temps, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Marseille, 1968 (polycop.).

4. P. CASAL. Cinématique des milieux continus, Cours de Mécanique des milieux continus, Marseille, éditions 1968 et 1969 (polycop.).
5. J.M. SOURIAU. Géométrie et relativité, Hermann, 1964.
6. H. GOUIN. Electrodynamique. Equations à potentiels en électrodynamique des fluides non conducteurs, C.R.A.S. 282 (1976), 83-86.
7. H. GOUIN. Contribution à une étude géométrique et variationnelle des milieux continus, Thèse, Aix-Marseille I, 1978.
8. J.W. HERIVEL. The derivation of the equations of motion of an ideal fluid by Hamilton's principle. Proc. Cambridge Phil. Soc. 51 (1955), 344.
9. J. SERRIN. Mathematical principles of classical fluid mechanics, in S. FLÜGGE, C. TRUESDELL, Handbuch der Physik, b. VIII/1, Springer-Verlag, 1959.
10. H. BATEMAN. Notes on a differential equation which occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problems, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 125 (1929), 598.
11. M.J. SEWELL. On reciprocal variational principles for perfect fluids, J. of Math. and Mech., 12 (1963), 495-504.
12. P. MORICE. A variational principle and a finite element method for compressible flow with free-boundaries, XIIIe Symposium biennal sur la Dynamique des fluides, Kortowa (Pologne), 1977, (Tiré à part ONERA, T.P. 1977-151).
13. J. COUOT. Décomposition des champs de vecteurs, application à la mécanique des fluides de la méthode des éléments finis, Comm. aux Journées Eléments Finis, Rennes, 1975 (tiré à part ONERA, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse).
14. V.I. ARNOLD. Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problèmes de stabilité non linéaires, J. de Mécanique, 5

(1966), 29-43.

15. T.B. BENJAMIN. The alliance of practical and analytical insights in the nonlinear problems of fluid mechanics, in : Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics (Joint Symposium IUTAM/IMU held in Marseille, 1975), Lectures Notes in Mathematics n° 503, Springer-Verlag, 1976.
16. P.R. GARABEDIAN, D.C. SPENCER. Extremal methods in cavitation flow, J. of Rational Mech. and Anal. 1 (1952), 359-409.
17. P. CASAL. Sur l'énergie cinétique d'un écoulement possédant une surface de discontinuité de vitesse, C.R.A.S. 234 (1952), 804-806.