Sur les intégrales première de la dynamique d'un fluide parfait barotrope et le théorème de Helmholtz-Kelvin

Jean Jacques Moreau

▶ **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur les intégrales première de la dynamique d'un fluide parfait barotrope et le théorème de Helmholtz-Kelvin. 1977. hal-02309511

HAL Id: hal-02309511
https://hal.science/hal-02309511

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1977 , Exposé n° 7

SUR LES INTEGRALES PREMIERES DE LA DYNAMIQUE D'UN FLUIDE PARFAIT BAROTROPE ET LE THEOREME DE HELMHOLTZ - KELVIN

J.J. MOREAU

1. INTRODUCTION

Soit un fluide en mouvement par rapport à un certain référentiel. Le champ vectoriel des vitesses u est supposé continûment différentiable relativement à l'espace et au temps ; soit γ le champ vectoriel des accélérations.

L'équivalence des deux propriétés A) et B) suivantes constitue le préliminaire cinématique du théorème de Helmholtz-Kelvin :

A) Le champ γ est, à chaque instant, le gradient d'une fonction numérique.

B) Pour tout circuit L constitué à tout instant des mêmes particules du fluide, la circulation $\int_L u.dx$ est indépendante du temps.

Cette équivalence a donné lieu à beaucoup de commentaires et généralisations diverses (cf. [1] [6] [7] [8]).

Reçu le 17 février 1977

Une fois ce résultat cinématique acquis, ce qu'on appelle usuellement théorème de Helmholtz, ou aussi théorème de Kelvin, consiste simplement dans l'observation que, vu les équations de la dynamique, la conjonction des conditions suivantes assure l'existence d'une fonction numérique dont γ est le gradient :

i) Le repère est galiléen.

ii) Le fluide est non visqueux.

iii) Il est barotrope, i.e. à chaque instant il existe une relation entre la pression p et la masse spécifique ρ vérifiée dans toute l'étendue du fluide (ce peut être en particulier la relation $\rho = Cte$ caractérisant un fluide incompressible homogène).

iv) La densité massique de force extérieure est, à chaque instant un gradient (exemple : forces de gravitation, en particulier pesanteur).

L'objet du présent rapport est d'introduire une assertion cinématique, notée C), équivalente à A) et B) et faisant entrer u non pas dans une intégrale curviligne comme B), mais dans une intégrale triple (ou une intégrale n-uple si l'on veut généraliser à l'hydrodynamique n-dimensionnelle). Il y a plusieurs motifs à cela.

D'abord, les recherches actuelles sur les solutions des équations de l'hydrodynamique doivent normalement déboucher sur des concepts de solutions "faibles", dans lesquelles u ne sera pas assez régulier pour que l'écriture $\int_L u.dx$ ait un sens, ni même la notion de circuit transporté par le fluide. Tel pourrait être le cas dans les méthodes baptisées autrefois par l'auteur "cinématiques fonctionnelles" [3] : on représente le mouvement du fluide au moyen d'une chaîne, indexée par le temps, d'applications linéaires d'un espace fonctionnel convenable dans

un autre. Des formes bilinéaires sur des paires de tels espaces sont définies par des intégrales n-uples, si n est la dimension du fluide.

Revenant par ailleurs au cas régulier classique, on peut dire que, pour chaque circuit L transporté par le fluide, la fonctionnelle $u \mapsto \int_L u.dx$ constitue une intégrale première des équations du mouvement lorsque les hypothèses mécaniques i) ii) iii) iv) sont vérifiées. Quiconque réfléchit à ce fait en essayant d'adapter au système matériel de liberté infinie que constitue le fluide, le langage de la dynamique analytique classique, arrive inévitablement à penser que l'existence de cette famille infinie d'intégrales premières traduit l'invariance de l'hamiltonien du système mécanique pour certaines transformations : la formalisation de cette idée, dans le cas des systèmes de liberté finie constitue le théorème classique de Noether. Il ne semble toutefois pas possible d'atteindre directement dans cet exprit l'assertion B) : en transcrivant, à la fin de ce rapport, l'argumentation du théorème de Noether, c'est précisément notre assertion C) que nous atteindrons.

2. SOMMAIRE

On rappelle au paragraphe 3 les notions de vecteur mobile, associé à une particule du fluide, transporté ou co-transporté par ce fluide. Comme la mesure masse $d\mu = \rho\, d\tau$ ($d\tau$: mesure "volume" dans chaque configuration) est transportée par le fluide, il vient que si a, a', a" sont trois vecteurs mobiles associés à une même particule du fluide et transportés, leur produit mixte vérifie $(a, a', a")\rho = Cte$. Si $d\sigma$ est, dans chaque configuration, la mesure "aire" d'une surface régulière transportée par le fluide et n son vecteur unité tangent, le vecteur "infinitésimal" $\rho\, n\, d\sigma$ est co-transporté.

Le paragraphe 4 considère ensuite un champ vectoriel v, continu, transporté par le fluide. Si, dans la configuration d'un instant, le champ vectoriel ρv a une divergence nulle au sens des distributions, il en est de même à tout instant. Un exemple usuel, lorsque l'assertion A) est vérifiée, est $v = \frac{1}{\rho}\,\omega$ en notant ω le vecteur tourbillon du fluide. Si, de plus un tel champ vectoriel est tangentiel au bord du fluide, nous disons qu'il est μ-fermé.

Vient au paragraphe 5 le résultat annoncé, l'équivalence des assertions A) et B) à la suivante : quel que soit le champ vectoriel transporté v, continu, à support compact et tel que $\operatorname{div} \rho v = 0$ au sens distribution (resp. v transporté et μ-fermé), l'intégrale $\iiint u.\, v\rho\, d\tau$ a une valeur indépendante du temps. En prenant en particulier $v = \frac{1}{\rho}\,\omega$, on retrouve un résultat ancien de l'auteur.

Le paragraphe 6 rappelle, d'abord dans le contexte de la dynamique analytique des systèmes de liberté finie, le théorème de Noether, fournissant des intégrales premières du mouvement. Il montre que

moyennant les hypothèses mécaniques i) ii) iii) iv), le fluide constitue un système dynamique pourvu d'une fonction de force. Transcrire l'argumentation du théorème de Noether suppose alors la construction d'une chaîne différentiable de transformations conservant l'action hamiltonienne.

C'est ce qui est fait au paragraphe final 7 : l'hypothèse de différentiabilité du champ des vitesses u fait que les transitions du fluide d'un instant à un autre sont des difféomorphismes. De là une structure de variété différentielle sur le fluide lui-même. Notant Λ cette variété, une configuration du fluide à l'instant t est un difféomorphisme c_t de Λ dans l'espace euclidien E que constitue le repère. Le concept de champ vectoriel transporté s'identifie à celui de champ vectoriel de la variété Λ. Soit η un tel champ et le pseudo-groupe de transformations de Λ qu'il engendre, noté $\exp r\eta$ (r décrivant un voisinage de zéro dans $\mathbb{R}$). Chaque mouvement $t \mapsto c_t$ du fluide s'insère dans la famille de mouvements $t \mapsto c_t \circ \exp r\eta$. Tous confèrent la même valeur à l'action hamiltonienne si, au sens du paragraphe 4, le champ vectoriel η est μ-fermé. Les intégrales premières résultant de l'argumentation du théorème de Noether coïncident alors avec ce que fournit le théorème du paragraphe 5.

3. VECTEURS TRANSPORTES ET CO-TRANSPORTES PAR LE FLUIDE

Les deux paragraphes qui viennent présentent des notions de cinématique des milieux continus largement connues mais qui reçoivent selon les auteurs des formalisations diverses. L'une de ces formalisations a été publiée autrefois dans [2].

Le fluide est un ensemble Λ d'éléments ou <u>particules</u>. Une <u>configuration</u> ou <u>position</u> du fluide est une application injective, soit c, de Λ dans l'espace euclidien affine E que constitue le référentiel choisi ; on note $\vec{E}$ l'espace vectoriel euclidien associé à E. Un <u>mouvement</u> du fluide est une chaîne $t \mapsto c_t$ de telles applications, indexée par le temps t. On pose, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $t \in I$, intervalle de temps, l'existence de la dérivée $\frac{d}{dt} c_t(\lambda)$, notée $\dot{c}_t(\lambda) \in \vec{E}$; c'est le <u>vecteur vitesse</u> de la particule λ.

On pose dans toute la suite que, pour chaque $t \in I$, l'ensemble $c_t(\Lambda)$ "partie de l'espace occupée à cet instant par le fluide" est l'adhérence $\overline{\Omega}_t$ d'un ouvert borné Ω_t de E. On note Δ "la partie de l'espace-temps occupée par le fluide", c'est-à-dire l'image de $I \times \Lambda$ par l'application

$$(t,\lambda) \mapsto (t, c_t(\lambda)) \in \mathbb{R} \times E \quad .$$

Pour tout $(t,x) \in \Delta$ est alors défini

$$u(t,x) = \dot{c}_t(c_t^{-1}(x)) \in \vec{E}$$

<u>champ des vitesses</u> ou "représentation d'Euler" de l'écoulement.

On note (x^i) des coordonnées cartésiennes dans E ; dans toute la suite on pose que <u>les dérivées partielles</u> $\partial u^i / \partial x^k$ <u>existent pour tout</u> $t \in I$ <u>et tout</u> $x \in \Omega_t$, <u>qu'elles sont continues par rapport à</u> (t,x) <u>et possèdent des limites en tout point frontière de</u> Δ .

Remonter de la donnée de $u : \Delta \to \vec{E}$ à celle de $c : I \times \Lambda \to E$ consiste simplement dans l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d\kappa}{dt} = u(t,\kappa) \tag{3.1}$$

à la fonction inconnue $\kappa : I \to E$; les constantes d'intégration constituent un indexage des éléments de Λ.

Les résultats classiques sur la différentiabilité des solutions d'une telle équation différentielle par rapport aux conditions initiales fournissent alors ceci :

Si $r \mapsto \lambda(r)$ est une chaîne de particules du fluide indexée par $r \in J$ (intervalle réel ouvert contenant l'origine) telle que, pour un instant $\tau \in I$, le vecteur

$$\left[\frac{d}{dr} c_\tau(\lambda(r))\right]_{r=0} \in \vec{E}$$

existe, alors pour tout $t \in I$ existe

$$\left[\frac{d}{dr} c_t(\lambda(r))\right]_{r=0} \quad \text{noté} \quad a(t).$$

C'est un <u>vecteur mobile</u> associé à la particule $\lambda(0) = \lambda_o$ du fluide et on a pour tout $t \in I$

$$\frac{da^i}{dx^k} = a^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k}(t, c_t(\lambda_o)) \tag{3.2}$$

(on reconnaît l'"équation aux variations" de l'équation différentielle (3.1)). On dit classiquement qu'un vecteur mobile a, associé à une particule λ_o du fluide et vérifiant (3.2) pour tout $t \in I$, est <u>transporté par le fluide</u> ; intuitivement cela revient à dire que, moyennant multiplication par un "facteur de grossissement infiniment grand" constant, a(t) est la position à chaque instant t du vecteur joignant la particule $\lambda(0)$ à une certaine particule "infiniment voisine" $\lambda(\varepsilon)$.

Nous disons qu'un vecteur mobile b, associé à la même particule λ_o du fluide, est <u>co-transporté</u> par le fluide si, pour tout a

transporté, le produit scalaire $a.b$ est constant par rapport à t. Si on note b_i les composantes covariantes de $b(t)$ relativement aux axes cartésiens choisis dans E (composantes ordinaires si ces axes sont orthonormés), cette loi d'évolution, caractérisée par l'invariance de $a^i b_i$ pour tout a vérifiant (3.2) s'exprime par

$$\frac{db_i}{dt} = - b_k \frac{\partial u^k}{\partial x^i}(t, c_t(\lambda_o)) \quad . \tag{3.3}$$

Conformément à l'un des principes de la mécanique classique, est définie sur Λ le mesure positive <u>masse</u>, indépendante du temps, que nous noterons μ ou $d\mu$. Pour chaque t, l'image de cette mesure par l'application c_t est une mesure sur $c_t(\Lambda) = \overline{\Omega}_t \subset E$. Les hypothèses de régularité posées plus haut font que, si pour un $t_o \in I$, cette mesure image possède une densité $x \mapsto \rho(t_o, x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, il en est de même pour tout t : nous supposerons cela dans tout ce qui suit. Et un calcul classique de déterminants jacobiens conduit à traduire l'invariance de la mesure μ par rapport à t par l'existence de la dérivée

$$\frac{d}{dt} \rho(t, c_t(\lambda)) = -\rho \operatorname{div} u(t, c_t(\lambda))$$

pour tout $t \in I$ et tout $\lambda \in \Lambda$, ce qu'on écrit plus brièvement

$$\frac{\mathfrak{D}\rho}{\mathfrak{D}t} = - \rho \operatorname{div} u \quad . \tag{3.4}$$

La notation de "dérivée particulaire" $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t}$, appliquée à une fonction $\Delta \to \mathbb{R}$, rappelle que cette dérivée par rapport au temps est calculée <u>pour une particule spécifiée dans le fluide</u>.

De façon équivalente, si a, a', a'' sont trois vecteurs transportés par le fluide, associées à la même particule λ, leur <u>produit mixte</u> vérifie

(3.5) $(a,a',a'')\ \rho(t,c_t(\lambda))$ indep. de t.

Soit S une portion de surface constituée à tout instant par les mêmes éléments du fluide, S_t sa position à l'instant t. Les propriétés de différentiabilité déjà invoquées font que si, pour un t, la surface S_t de E possède une normale continue (soit n le vecteur unité de cette normale, dans un sens choisi continûment ; la surface, bien sûr, est supposée orientable), il en est de même à tout instant. Le calcul effectif du flux d'un champ vectoriel v à travers S_t

$$\int_{S_t} v.n\ d\sigma$$

($d\sigma$: mesure aire de S_t) repose sur l'usage d'un paramétrage (r,s) des éléments de Λ constituant S, tel que pour chaque t l'application $(r,s) \mapsto x$, i.e. le paramétrage correspondant de S_t, soit différentiable. Alors

$$n\ d\sigma = \frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{\partial s}\ dr\ ds$$

($dr\ ds$: mesure de Lebesgue du plan des r,s). Comme $\frac{\partial x}{\partial r}$ et $\frac{\partial x}{\partial s}$ sont les positions à chaque instant t de deux vecteurs transportés par le fluide, on conclut de (3.5) que, pour tout vecteur a transporté par le fluide et associé à la même particule (r,s), le produit scalaire $a.(\frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{\partial s})\rho$ est constant par rapport à t. Donc le vecteur $(\frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{\partial s})\rho$, densité de la mesure vectorielle $\rho\ n\ d\sigma$ par rapport à $dr\ ds$ est co-transporté. Par abus de langage, on dit que le "vecteur infinitésimal" $\rho\ n\ d\sigma$ est co-transporté.

4. CHAMP VECTORIEL μ-FERME

Pour un champ $v : I \times \Lambda \to \vec{E}$, on note

$$(t,x) \mapsto v_t(x)$$

sa "position à l'instant t", i.e.

$$v_t(x) = v(t, c_t^{-1}(x)) \quad .$$

Un tel champ vectoriel est dit transporté par le fluide si, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le vecteur mobile $t \mapsto v(t,\lambda)$ est transporté, c'est-à-dire, au vu de (3.2), que la dérivée particulaire $\mathcal{D}v/\mathcal{D}t$ existe, donnée par

$$\frac{\mathcal{D}v^i}{\mathcal{D}t} = v^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k}(t, c_t^{-1}(\lambda)) \quad . \tag{4.1}$$

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on peut interpréter (4.1) comme une équation différentielle linéaire à la fonction inconnue $t \mapsto v \in \vec{E}$; les mêmes hypothèses que précédemment (u continûment différentiable sur Δ) font alors que, si $x \mapsto v_t(x)$ est continu sur $\overline{\Omega}_t$ pour un t, il l'est pour tout $t \in I$: <u>on suppose dans ce qui suit que</u> v <u>est un tel champ vectoriel transporté et continu</u>.

Soit une portion bornée D du fluide, ayant pour frontière une surface fermée S ; comme au paragraphe précédent, on note S_t la position de cette surface dans E à l'instant t, supposée avoir une normale continue (pour un t, donc pour tout t) ; soit n le vecteur unité normal au point générique de S_t, dans le sens sortant de D.

On suppose enfin que la fonction masse spécifique $x \mapsto \rho(t,x)$ est continue sur $\overline{\Omega}_t$ au moins pour un t, donc continue sur Δ en vertu de (3.4).

Il résulte du paragraphe précédent que l'intégrale $\iint_{S_t} \rho\, v.n\, d\sigma$ a une valeur indépendante de t. La nullité de cette intégrale pour toute portion de fluide telle que D équivaut classiquement à ce que le champ vectoriel $\rho\, v_t$ possède, dans Ω_t, une divergence nulle au sens des distributions.

Une approche équivalente consisterait à considérer une fonction numérique $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$, définie, indépendamment de t sur le fluide ; on note $\varphi_t(x) = \varphi(c_t^{-1}(x))$. Si $x \mapsto \varphi_t(x)$ est C^1 dans $\overline{\Omega}_t$ pour un t, elle l'est pour tout t et il vient immédiatement que le vecteur grad φ_t, calculé pour chaque t au point $x = c_t(\lambda)$ est un vecteur mobile, associé à la particule λ du fluide, co-transporté ; notons grad $\varphi(\lambda)$ ce vecteur mobile. Supposons de plus φ telle que, pour un t (donc pour tout t), la fonction $x \mapsto \varphi_t$ soit à support compact dans Ω_t ; l'intégrale

$$\iiint_{\Omega_t} \rho\, v_t . \text{ grad } \varphi_t \, d\tau = \iiint_{\Lambda} v(\lambda) . \text{ grad } \varphi(\lambda) \, d\mu(\lambda)$$

est indépendante de t puisque, au second membre, l'intégrande v.grad φ possède en chaque particule $\lambda \in \Lambda$ une valeur indépendante de t. La nullité de cette intégrale pour toute φ continûment différentiable et à support compact est bien la nullité de div $\rho\, v_t$ au sens des distributions.

Supposons maintenant que $\overline{\Omega}_t = c_t(\Lambda)$ est borné, avec pour bord une surface régulière, au moins par morceaux (ici encore, supposer cela pour un t l'entraîne pour tout t).

DEFINITION. Nous dirons que le champ vectoriel v, continu et transporté par le fluide, est μ-fermé si, pour un t (donc pour tout t), $\rho\, v_t$

possède une divergence nulle au sens des distributions et si pour un t (donc pour tout t) v_t est tangentiel en tout point régulier du bord de $\overline{\Omega}_t$.

Cela revient à dire que, pour toute fonction $\varphi : \Lambda \to \mathbb{R}$, continûment différentiable,

$$\iiint_{\Omega_t} \rho\, v_t . \operatorname{grad} \varphi_t \, d\tau = \iiint_{\Lambda} v . \operatorname{grad} \varphi \, d\mu = 0 \tag{4.2}$$

REMARQUE 1. Si on suppose u deux fois continûment différentiable sur Λ, la différentiabilité de ρ et de v_t pour un t l'entraîne pour tout t. Dans ce cas on peut appliquer le théorème flux-divergence

$$\iint_{S_t} \rho\, v.n \, d\sigma = \iiint_{D_t} \operatorname{div} \rho\, v \, d\tau = \iiint_{D_t} \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \rho\, v \, d\mu \ .$$

On en conclut que, si v est un champ vectoriel différentiable transporté par le fluide, le scalaire $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \rho\, v$ possède, en chaque particule du fluide une valeur indépendante de t.

C'est ce qu'on retrouvera facilement par un calcul local en observant que, moyennant ces nouvelles hypothèses de différentiabilité, (4.1) s'écrit

$$\frac{\partial v_t^i}{\partial t} = v_t^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial v_t^i}{\partial x^k} \ .$$

REMARQUE 2. Revenons à la seule hypothèse "u continûment différentiable". La vorticité à l'instant t, $\omega_t = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u$ constitue un champ vectoriel continu. Supposons l'assertion B) du paragraphe 1 vérifiée : on obtient par le théorème de Stokes que $\omega : I \times \Lambda \to \vec{E}$ possède un flux indépendant de t à travers toute portion de surface transportée par le fluide. En invoquant la remarque finale du paragraphe 3, on en conclut que $\frac{1}{\rho}\omega$ est un champ vectoriel transporté par le fluide. En outre ω_t possède une divergence nulle au sens des distributions, puisque c'est

un rotationnel ; si on pose $v = \frac{1}{\rho}\,\omega$ on a donc ici la situation envisagée plus haut : div $\rho\, v_t = 0$ pour tout t.

5. LE THEOREME

PROPOSITION. On suppose le champ des vitesses u continûment différentiable sur Δ. Alors les assertions A) et B) du paragraphe 1 équivalent à la suivante :

C) Quel que soit le champ vectoriel v continu, transporté par le fluide, tel que pour un t (donc pour tout t) sa position v_t soit à support compact dans Ω_t et vérifie $\operatorname{div} \rho\, v_t = 0$ au sens distribution, l'intégrale $\iiint_{\Omega_t} u.v_t\, \rho\, d\tau$ a une valeur indépendante de t.

Démonstration. Comme la mesure $d\mu$, image de $\rho\, d\tau$ dans le fluide est contante, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} u.v_t \rho\, d\tau = \frac{d}{dt} \iiint_{\Lambda} u(t,c_t(\lambda)).v(t,\lambda)\, d\mu(\lambda) \tag{5.1}$$

$$= \iiint_{\Lambda} \left[\gamma(t,c_t(\lambda)).v(t,\lambda) + u(t,c_t(\lambda)).\frac{\mathcal{D} v}{\mathcal{D} t}(t,\lambda)\right] d\mu(\lambda)$$

Or, vu (4.1), en supposant que les coordonnées cartésiennes prises dans E sont orthonormées,

$$u.\frac{\mathcal{D} v}{\mathcal{D} t} = u^i v^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{u^i u^i}{2} .$$

Donc

$$\iiint_{\Lambda} u.\frac{\mathcal{D} v}{\mathcal{D} t}\, d\mu = \iiint_{D_t} \rho\, v_t.\ \operatorname{grad} \frac{u^2}{2}\, d\tau$$

est nul d'après les hypothèses faites sur v (faire une intégration par parties).

L'assertion C) consiste dans la nullité du premier membre de (5.1), c'est-à-dire, pour tout t,

$$\iiint_{D_t} \rho\, v_t.\gamma\, d\tau = 0 .$$

Comme $\rho\, v_t$ peut s'identifier à tout champ vectoriel continu à support

compact dans Ω_t et à divergence distribution nulle, cela équivaut classiquement (cf., par exemple, [5]) à l'existence d'une fonction numérique dont γ est le gradient : c'est l'assertion A).

CAS PARTICULIER. Si (pour un t, donc pour tout t), Ω_t est borné, de frontière régulière, on obtient de même l'équivalence à A) de l'assertion : pour tout v continu transporté et μ-fermé, l'intégrale $\iiint_{\Omega_t} u.v_t \rho \, d\tau$ a une valeur indépendante de t.

En se reportant à la Remarque 2 du paragraphe 4, considérons maintenant une portion D de fluide ayant pour bord une surface régulière et telle que le vecteur tourbillon soit tangentiel ou nul sur ce bord. Si l'assertion A) est vérifiée, cette propriété se conserve au cours du temps : on dira que D est un îlot tourbillonnaire. Il vient alors un résultat publié autrefois par l'auteur [4].

COROLLAIRE. Si l'assertion A) est vérifiée l'intégrale

$$\iiint_D u.\omega \, d\tau$$

conserve une valeur indépendante du temps pour tout îlot tourbillonnaire D.

6. ACTION HAMILTONIENNE ET THEOREME DE NOETHER

Rappelons la situation classique pour un système mécanique de liberté finie, à liaisons sans frottement. Soit (q^i), $i = 1,2,\ldots,n$, un paramétrage du système, lequel peut être soumis à des liaisons sans frottement surimposées, traduites par une relation différentiable

$$f_\alpha(t,q) = 0 \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,\nu \quad . \tag{6.1}$$

Il est supposé que les forces autres que les réactions des liaisons dérivent d'une fonction de force $(t,q) \mapsto U$; pour tout mouvement éventuel $t \mapsto q$, on note $\dot{q}^i$ les dérivées dq^i/dt ; soit $T(t,q,\dot{q})$ l'expression générique de l'énergie cinétique. Deux instant t_1 et t_2 étant spécifiés, l'intégrale

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} (T + U)\, dt \tag{6.2}$$

s'appelle l'action hamiltonienne du mouvement $t \mapsto q$ relativement à ces instants. On montre que les solutions des équations de la dynamique sont les extrémales de $\mathcal{A}$ dans l'ensemble des mouvements respectant les équations de liaison (6.1).

Pour chaque t soit alors $q \mapsto N(t,q,r)$ une application différentiable de la partie concernée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même, dépendant différentiablement de $r \in J$ (intervalle réel ouvert contenant 0) et se réduisant à l'identité pour $r = 0$. On suppose que, pour tout $r \in J$, cette application envoie dans lui-même l'ensemble des q satisfaisant (6.1) et que, d'autre part, elle conserve l'intégrale $\mathcal{A}$. Cela veut dire que, si $t \mapsto q(t)$ est un mouvement différentiable, le mouvement

$$t \mapsto N(t,q(t),r)$$

confère la même valeur à l'intégrale $\mathcal{A}$. Un calcul facile de variations fournit alors le théorème de Noether : pour tout mouvement solution des

équations de la dynamique, l'expression $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial N^i}{\partial r}\right)_{r=0}$ est constante par rapport à t.

Ayant en vue l'adaptation au cas d'un milieu continu, observons que, pour chaque instant t et chaque configuration éventuelle q, les dérivées partielles $\partial T/\partial \dot{q}^i$, notées traditionnellement p_i, sont les composantes d'un élément p d'un espace vectoriel mis en dualité avec l'espace vectoriel des "vitesses" $\dot{q}$ par une forme bilinéaire

$$\langle \dot{q}, p \rangle = \dot{q}^i p_i \quad .$$

L'écriture $p_i = \partial T/\partial \dot{q}^i$ signifie dans ce contexte que l'application linéaire $\delta\dot{q} \mapsto \langle \delta\dot{q}, p \rangle$ est tangente à $\dot{q} \mapsto T(t,q,\dot{q})$. Par essence, les dérivées partielles $\partial N^i/\partial r$ constituent un élément de l'espace des $\dot{q}$; le théorème de Noether s'écrit donc

(6.3) $$\langle \left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)_{r=0}, p \rangle \text{ indep. de } t.$$

Avec les notations des paragraphes précédents, considérons maintenant le système mécanique constitué par le fluide Λ, supposé borné et contenu par une paroi régulière dont le mouvement sera traité comme connu. Le respect de cette paroi jouera le rôle de la liaison (6.1). Le rôle de q est tenu maintenant par la <u>configuration</u> c. Pour t et c fixés, l'espace des $\dot{q}$ a maintenant pour élément générique l'application $\lambda \mapsto \dot{c}$ ou "champ des vitesses" des particules du fluide. L'expression générique de l'énergie cinétique est

(6.4) $$T = \iiint_{\Lambda} \frac{1}{2} (\dot{c})^2 \, d\mu$$

ce qui conduit précisément à adopter comme espace des $\dot{q}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(\Lambda, \mu ; \vec{E})$. Dans ce cadre on écrit

$$\delta T = \iiint_{\Lambda} \dot{c}.\delta\dot{c}\ d\mu$$

Le rôle de l'élément p est donc assumé par la mesure $\dot{c}\mu$ avec pour $\langle .,. \rangle$ la définition naturelle (il serait équivalent d'interpréter p comme étant $\dot{c}$ lui même et de prendre pour $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire hilbertien de $L^2(\Lambda,\mu\ ;\ \vec{E})$).

Pour ce qui est des forces, autres que de liaison, agissant sur le fluide, on observe que, si les hypothèses ii), iii), iv) du paragraphe 1 sont vérifiées, elles possèdent une "fonction de force", ici une fonctionnelle $c \mapsto U$. En effet, par hypothèse, pour chaque t, la densité massique de force extérieure, soit $x \mapsto F(t,x)$, définie sur un ouvert de E contenant $c(\Lambda)$, est le gradient d'une fonction numérique $x \mapsto \varphi(t,x)$, ce qui donne comme travail virtuel de ces forces extérieures

$$\iiint_{\Lambda} \delta c.\ \mathrm{grad}\ \varphi(t,c(\lambda))\ d\mu(\lambda) = \delta \iiint_{\Lambda} \varphi(t,c(\lambda))\ d\mu(\lambda) \quad .$$

La fonctionnelle

$$c \mapsto \iiint_{\Lambda} \varphi(t,c(\lambda))\ d\mu(\lambda) \tag{6.5}$$

constitue donc, pour chaque t, une "fonction de force" des forces extérieures distribuées dans la masse du fluide.

Pour ce qui est des "forces" intérieures, supposons que l'hypothèse de barotropie iii) permette de définir, pour chaque t, une fonction $\rho \mapsto p$ (le cas d'un fluide incompressible doit être traité à part, la relation $\rho = \mathrm{Cte}$ constituant cette fois une liaison sans frottement). La formalisation suivante est classique : plutôt que la masse spécifique ρ, considérons son inverse, le volume spécifique σ et traitons le, dans chaque configuration éventuelle c, comme une fonction de λ. Autrement dit $\sigma(\lambda)$ est la densité de la mesure $c^{-1}(\tau)$ (τ :

mesure de Lebesgue de E) par rapport à la mesure μ. Notons $\sigma \mapsto W(t,\sigma)$ une primitive de la fonction $\sigma \mapsto p$. Il est alors connu que le travail virtuel des "forces" intérieures s'exprime par

$$\iiint_{\Lambda} p\ \delta\sigma\ d\mu = \delta \iiint_{\Lambda} W(t,\sigma)\ d\mu \quad .$$

Comme la fonction $\lambda \mapsto \sigma$ est déterminée par l'application c, on voit que la fonctionnelle

$$c \mapsto \iiint_{\Lambda} W(t,\sigma)\ d\mu \tag{6.6}$$

est, pour chaque t, "fonction de force" des "forces" intérieures.

Moyennant tout cela, on définit, pour chaque mouvement suffisamment régulier $t \mapsto c_t$ l'action hamiltonienne $\mathcal{A}$ du fluide entre deux instants spécifiés t_1 et t_2 et on vérifie classiquement que les solutions des équations de la dynamique sont les extrémales de cette fonctionnelle.

Pour préparer l'adaptation du théorème de Noether à la situation présente, faisons enfin la remarque suivante :

Soit $b : \Lambda \to \Lambda$ une bijection du fluide sur lui-même ; de tout mouvement $t \mapsto c_t$ respectant le mouvement donné des parois on en déduit un autre $t \mapsto c'_t = c_t \circ b$ respectant aussi ces parois. Pour ce second mouvement, la vitesse de chaque particule $\lambda \in \Lambda$ est

$$\dot{c}'_t(\lambda) = \dot{c}_t \circ b(\lambda)$$

d'où, d'après (6.4), la même valeur pour l'énergie cinétique <u>si l'application b laisse invariante la mesure</u> μ. Moyennant cette dernière condition, la configuration c'_t donnera à la fonctionnelle (6.5) la même valeur que c_t, à savoir

$$\iiint_{\Lambda} \varphi(t,(c_t \circ b)(\lambda))\ d\mu(\lambda) = \iiint_{\Lambda} \varphi(t,c_t(\lambda'))\ d\mu(\lambda')$$

et, dans la configuration c'_t, la fonction "volume spécifique" sera

$$\lambda \mapsto \sigma'(\lambda) = \sigma \circ b(\lambda)$$

d'où la même valeur pour la fonctionnelle (6.6) dans les deux configurations. Donc l'action hamiltonienne $\mathcal{A}$ a la même valeur pour les mouvements $t \mapsto c_t$ et $t \mapsto c'_t$.

Il reste alors, pour retrouver la situation du théorème de Noether, à construire une famille de bijections telles que b, dépendant différentiablement d'une variable réelle r et conservant μ : c'est l'objet du paragraphe qui vient.

7. LE FLUIDE COMME VARIETE DIFFERENTIELLE

Moyennant l'hypothèse faite dans les paragraphes antérieurs : u continûment différentiable sur Δ, on observe que, la transition du fluide d'un instant quelconque t à un instant quelconque t', c'est-à-dire l'application $c_{t'} \circ c_t^{-1}$ est un C^1-difféomorphisme de $\overline{\Omega}_t$ sur $\overline{\Omega}_{t'}$. Banalement, cela équivaut à l'existence sur le fluide Λ d'une structure de variété C^1-différentielle (à bord) telle que chaque application $c_t : \Lambda \to E$ soit un C^1-difféomorphisme. Des coordonnées admissibles dans cette variété sont définies par exemple en choisissant un instant de référence et en associant à chaque $\lambda \in \Lambda$ les coordonnées cartésiennes de sa position dans E à cet instant (variables "de Lagrange").

Comme notre but n'est pas de redémontrer la Proposition du paragraphe 5 dans sa généralité, mais seulement d'exhiber son enchaînement avec le théorème de Noether, on fera l'hypothèse plus restrictive suivante : u de classe C^2 sur Δ, ce qui fait que les transitions sont des C^2-difféomorphismes et munit Λ d'une structure C^2-différentielle, à bord (on suppose que le bord de chaque $\overline{\Omega}_t$ est une surface suffisamment régulière).

Par ailleurs, la variété Λ est munie de la mesure "masse" μ. L'hypothèse, précédemment faite, de différentiabilité de la fonction masse spécifique $x \mapsto \rho(t,x)$, entraîne que, si $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ sont des coordonnées admissibles dans Λ, l'image de μ dans cette carte possède une densité ψ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$, continûment différentiable.

Pour chaque t, et chaque $\lambda \in \Lambda$, l'application linéaire tangente $Dc_t(\lambda)$ est un isomorphisme de l'espace tangent $T\Lambda(\lambda)$ sur $\vec{E}$. Soit η un champ vectoriel de classe C^1 sur Λ ; notons $\eta_t : c_t(\Lambda) \to \vec{E}$ son image par c_t, c'est-à-dire

$$\eta_t(x) = Dc_t \circ \eta \circ c_t^{-1}(x) \quad .$$

Les η_t sont visiblement les positions aux divers instants d'un champ vectoriel transporté par le fluide.

Supposons désormais que le champ vectoriel η soit tangentiel au bord de Λ. Il engendre alors un pseudo-groupe de C^1-difféomorphismes de la variété Λ, noté classiquement $\exp r\eta$, où r décrit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant l'origine. Classiquement (c'est élémentaire, lorsqu'on emploie le langage de la cinématique des fluides, r étant identifié au temps et η au champ des vitesses d'un écoulement permanent) ce pseudo-groupe conserve la mesure μ si, utilisant des coordonnées $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ comme plus haut, on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^i}(\psi \eta^i) = 0 \tag{7.1}$$

(condition nécessairement invariante par changement de coordonnées : on reviendra là-dessus plus loin, Remarque). En particulier si on prend pour $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ les coordonnées cartésiennes de la position $c_t(\lambda)$ dans E, cette condition devient

$$\operatorname{div} \rho \eta_t = 0 \quad . \tag{7.2}$$

Bref, dans le vocabulaire du paragraphe 4, on va supposer que le champ vectoriel η est μ-fermé.

Identifions l'application b considérée au paragraphe 6 avec $\exp r\eta$: cela fait une famille de transformations

$$c \mapsto N(t,c,r) = c \circ \exp \eta r$$

conservant l'action hamiltonienne, si les hypothèses mécaniques i) ii) iii) iv) sont satisfaites. Pour transcrire dans ce cadre l'argumentation du théorème de Noether, avec l'écriture (6.3), il faut interpréter $(\frac{\partial N}{\partial r})_{r=0}$: c'est un élément de l'espace des "champs de vitesses", à savoir l'application $\Lambda \to \vec{E}$ définie, pour chaque t, par

$$\lambda \mapsto (\frac{d}{dr} c_t \circ (\exp \eta\, r)(\lambda))_{r=0} \quad .$$

Or la construction du pseudo-groupe engendré par un champ vectoriel commute classiquement avec tout difféomorphisme, donc avec $c_t : \Lambda \to \Lambda(E) = \overline{\Omega}_t$. C'est-à-dire qu'en notant comme ci-dessus η_t l'image du champ vectoriel η par c_t, on a

$$c_t \circ \exp \eta\, r = \exp \eta_t r \circ c_t \quad .$$

Et, d'après la définition même du pseudo-groupe engendré, on a pour tout $x \in \overline{\Omega}_t = c_t(\Lambda)$,

$$(\frac{d}{dr}(\exp \eta_t r)(x))_{r=0} = \eta_t(x) \quad .$$

Avec l'interprétation donnée pour l'élément p au paragraphe 6, l'adaptation de (6.3) au cas présent est donc

$$\iiint_{\Lambda} (\eta_t \circ c_t).\, \dot{c}_t \, d\mu = \text{indep de } t \quad .$$

Comme l'image de $d\mu$ par c_t est la mesure $\rho\, d\tau$ sur Ω_t, l'image de $\lambda \mapsto \dot{c}_t$ le champ vectoriel $x \mapsto u$, cela s'écrit de façon équivalente

$$\iiint_{\Omega_t} \eta_t . u \; \rho \, d\tau = \text{indep de } t \quad .$$

En prenant $\eta_t = v_t$, on rejoint donc bien l'énoncé du paragraphe 5.

REMARQUE. Dans le langage présent tout champ vectoriel η de la variété Λ s'identifie avec un champ vectoriel v transporté par le fluide, tel qu'on le considérait au paragraphe 4. L'invariance par rapport à t du scalaire $\frac{1}{\rho}$ div $\rho\, v$ observé à la Remarque 1 de ce paragraphe doit donc refléter une opération géométrique dans Λ, concernant le champ vecto-

riel η et la mesure μ . De fait, en notant comme plus haut $\psi(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ la densité de cette mesure parrapport à la mesure de Lebesgue de l'espace des coordonnées $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$, on définit sur Λ la 3-forme différentielle m dont l'écriture dans les coordonnées en question est

$$m = \psi \, d\lambda^1 \wedge d\lambda^2 \wedge d\lambda^3 \quad .$$

Autrement dit, m est un champ de tenseurs trois fois contrevariants associé à la mesure μ d'une manière indépendante du choix des coordonnées. Le produit tensoriel $\eta \otimes m$ est un champ de tenseurs du 4ème ordre, mixte par rapport aux deux premiers indices. La contraction par rapport à ces indices fournit un champ de tenseurs du second ordre antisymétriques, c'est-à-dire une 2-forme différentielle ; sa différentielle extérieure est une 3-forme dont le rapport à la 3-forme m fournit un champ scalaire sur Λ. Il suffit de choisir pour $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ les coordonnées cartésiennes de $c_t(\lambda)$ dans E pour constater que la valeur au point λ du rapport en question est $\frac{1}{\rho_t} \operatorname{div} \rho_t \eta_t$, à calculer au point $c_t(\lambda)$ de E.

8. REFERENCES

[1] MARRIS, A.W., PASSMAN, S.L. Generalized circulation-preserving flows, Arch. Rat. Mech. Anal. 28 (1968) 245-264.

[2] MOREAU, J.J. Sur la notion de système de référence fluide et ses applications en aérodynamique, 1er Congrès National de l'Aviation Française, 1945, rapport n° 368.

[3] MOREAU, J.J. Une méthode de "cinématique fonctionnelle" en hydrodynamique, C.R.Acad. Sci., 249 (1959), 2156-2158.

[4] MOREAU, J.J. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope, C.R.Acad. Sci. 252 (1961), 2810-2812.

[5] MOREAU, J.J. Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1976, Exposé n° 5.

[6] PASSMAN, S.L. Convection-diffusion theorems, Arch. Rat. Mech. Anal. 36 (1970), 224-238.

[7] TRUESDELL, C. The Kinematics of vorticity, Indiana Univ. Pub., Sci. Ser. n° 9, 1954.

[8] TRUESDELL, C. ; TOUPIN, R.A. The classical field theory, in (S. FLÜGGE, ed.) : Handbuch der Physik, B. III/1, Pruizipien der klassischen Mechanik und Feldthecrie, Springer, 1960, p. 226-793.

Dernière minute. Nous prenons connaissance de l'article suivant :

THYAGARAJA, A. An integral invariant in inviscid fluid flow, J. of Mathematical and Physical Sciences 9 (1975), 161-164.

Cet auteur note g un champ vectoriel à divergence nulle tel que $\frac{g}{\rho}$ soit transporté par le fluide et appelle g-tube une portion matérielle constituée de lignes de flux fermées de g. Il montre que moyennant les hypothèses mécaniques habituelles notées par nous i) ii) iii) iv), l'intégrale $\iiint g.u \, d\tau$ prise sur un tel g-tube est constante par rapport au temps : c'est en substance la variante du théorème de Helmoltz-Kelvin qui fait l'objet du présent rapport. Aucun rapprochement n'est fait avec la dynamique analytique et le théorème de Noether.