



Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque

Jean Jacques Moreau

► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque. 1976. hal-02309501

HAL Id: hal-02309501

<https://hal.science/hal-02309501>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier 1976, Exposé n° 5

CHAMPS ET DISTRIBUTIONS DE TENSEURS DEFORMATION
SUR UN OUVERT DE CONNEXITE QUELCONQUE

J.J. MOREAU

1. INTRODUCTION

1. a. L'OPERATEUR def

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie v ; soit Ω un ouvert quelconque de E . D'un point de vue puriste, pour les applications mécaniques de ce qui va suivre, il faudrait considérer que Ω est un ouvert de l'espace de la géométrie élémentaire et de la physique classique, espace homogène (on dit aussi : affine) euclidien de dimension 3 et que E est l'espace vectoriel associé ; nous allégeons en fixant arbitrairement dans cet espace homogène une origine, ce qui permet de l'identifier avec E lui-même. On note $E \otimes_s E$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 associé à E .

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$, i. e. u champ vectoriel continûment différentiable sur Ω . Les composantes (u_i) de $u(x)$ relativement à une base ortho-normée de E sont des fonctions des composantes (x_k) du point x sur cette même base ; on écrit $u_{i,k}$ pour $\partial u_i / \partial x_k$. On fait dans toute la suite la "convention de l'indice muet" : tout terme de forme monôme dans lequel un indice figure deux fois doit être entendu avec une sommation relative à cet indice.

Reçu le 20 avril 1976

This research was done in part during the author's stay at the University of Glasgow, under a Science Research Council Senior Visiting Fellowship.

Le champ tensoriel $e \in \mathcal{E}^0(\Omega, E \otimes_s E)$ défini, quelle que soit la base orthonormée choisie, par

$$(1.1) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

est classiquement appelé tenseur déformation associé au champ vectoriel u ; notation $e = \text{def } u$.

Lorsque u est le champ vectoriel des vitesses des éléments d'un milieu continu occupant, à l'instant considéré, l'ouvert Ω , le tenseur $\text{def } u$ possède une signification cinématique simple et on dit que c'est le tenseur vitesse de déformation du milieu.

La même mathématique est employée avec un langage différent, dans le traitement approché des petites déformations d'un milieu continu au voisinage d'un état de référence : dans ce cas le vecteur $u(x)$ représente le déplacement "infinitésimal" de l'élément du milieu qui occupe la position x dans l'état de référence et le tenseur $e(x)$ mesure la déformation "infinitésimale" que présente le milieu en ce point.

1. b. PUISSANCE D'UN CHAMP DE CONTRAINTES

Soit $s : \Omega \rightarrow E \otimes_s E$ un champ de contraintes défini sur le milieu continu. Pour un champ de vitesses (éventuellement baptisées "virtuelles") $u \in \mathcal{E}^1(\Omega, E)$, la mécanique classique des milieux continus définit la puissance de ce champ de contraintes par l'intégrale, si elle existe,

$$(1.2) \quad \mathcal{P} = - \int_{\Omega} e_{ij} s_{ij} d\omega$$

($d\omega$: mesure de Lebesgue de Ω).

Moyennant les hypothèses annexes que Ω soit de bord $\partial\Omega$ suffisamment régulier, que $s \in \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_s E)$, que s et u soient continûment prolongeables à $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ et qu'en outre, pour Ω non borné, des conditions à l'infini convenables soient vérifiées, une intégration par parties (ne pas oublier la symétrie du tenseur s) transforme cette expression en

$$(1.3) \quad \mathcal{P} = \int_{\Omega} u_i s_{ij,j} d\omega - \int_{\partial\Omega} u_i s_{ij} n_j dS$$

(dS : mesure "aire" du bord $\partial\Omega$; n : vecteur unité normal au point générique de ce bord, dans le sens sortant de Ω).

Les $s_{ij,j}$ sont les composantes du champ vectoriel $\operatorname{div} s \in \mathcal{E}^0(\Omega, E)$, divergence du champ tensoriel s .

L'application formelle du "principe des puissances virtuelles" fournit alors que, si s est le champ de contraintes d'un milieu continu en équilibre en l'absence de toute force extérieure (on appelle cela un champ de contraintes autoéquilibré) la puissance $\mathcal{P}$ est nulle pour tout $u \in \mathcal{E}^0(\bar{\Omega}, E) \cap \mathcal{E}^1(\Omega, E)$. Moyennant des arguments classiques (classiques aussi en calcul des variations) cela équivaut à

$$(1.4) \quad s_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.5) \quad s_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Comme l'ensemble des $s \in \mathcal{E}^0(\bar{\Omega}, E \otimes_s E) \cap \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_s E)$ vérifiant (1.4), (1.5) (et les conditions à l'infini convenables si Ω n'est pas borné) n'est pas vide, le retour à l'expression (1.2) de $\mathcal{P}$ montre qu'un $e \in \mathcal{E}^0(\Omega, E \otimes_s E)$ n'est pas en général le champ de tenseurs déformation d'un $u \in \mathcal{E}^1(\Omega, E)$.

C'est déjà ce que l'on constate, moyennant l'hypothèse supplémentaire $e \in \mathcal{E}^2(\Omega, E \otimes_s E)$, par une analyse locale : en effectuant sur (1.1) des dérivations, des permutations d'indices, puis une addition du tout, on obtient la condition nécessaire suivante pour l'existence de $u \in \mathcal{E}^3(\Omega, E)$ tel que $e = \operatorname{def} u$

$$(1.6) \quad e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{ik,jl} + e_{jl,ik}.$$

Inversement, il est bien connu depuis un siècle que, si l'ouvert Ω est simplement connexe, cette condition, avec $e \in \mathcal{E}^2(\Omega, E \otimes_s E)$, est suffisante pour que e soit un champ de tenseurs déformation (concernant la démonstration et les références historiques, cf. [1], [6]).

Par ailleurs, on trouve dans [1] sous le nom de théorème de Donati (1890) le résultat facile suivant : si $e \in \mathcal{E}^2(\Omega, E \otimes_s E)$ annule l'expression

(1.2) pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes_s E)$ (i. e. champ tensoriel symétrique indéfiniment différentiable à support dans Ω compact) vérifiant (1.4), alors e vérifie (1.6) partout dans Ω . Par suite, si Ω est en outre supposé simplement connexe, cette propriété d'orthogonalité assure l'existence de $u \in \mathcal{C}^3(\Omega, E)$ tel que $e = \text{def } u$.

L'objet du présent rapport est d'établir cette même implication pour un ouvert de connexité quelconque (et sans hypothèses de régularité du bord). Pour ce qui est de e , ce pourra être a priori, soit un élément de $\mathcal{C}^1(\Omega, E \otimes_s E)$ au lieu de $\mathcal{C}^2$ comme ci-dessus, soit un élément de $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_s E)$ distribution tensorielle symétrique sur Ω .

Expliquons d'abord notre motivation.

1. c. LA DUALITE $\mathcal{V}, \mathcal{F}$

Pour la mise en oeuvre de la méthode des puissances virtuelles sous son aspect moderne, lorsqu'on étudie un système mécanique quelconque, toutes les informations relatives à ce système, dans chacune de ses configurations éventuelles sont formulées dans le langage suivant : à la configuration considérée est associée une paire d'espaces vectoriels $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$; les éléments de $\mathcal{V}$ constituent, en un sens général, les valeurs possibles de la vitesse du système s'il vient à passer par la configuration en question ; les éléments de $\mathcal{F}$ sont de leur côté les valeurs possibles de forces appliquées au système dans cette éventualité. Ces deux espaces sont mis en dualité par la forme bilinéaire puissance (cependant, pour rester plus près de certaines formules consacrées par l'usage, c'est parfois l'opposé de cette puissance qui est pris comme forme bilinéaire fondamentale).

Noter qu'un tel formalisme peut habituellement être appliqué de plusieurs manières différentes à une situation mécanique donnée, impliquant des réalisations différentes des espaces vectoriels $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ [2] [3] ; accessoirement, plusieurs paires d'espaces en dualité peuvent être mises en oeuvre

simultanément, ce qui fait apparaître des paires d'applications linéaires adjointes : par exemple les applications def et $-\text{div}$, en ce qui concerne les quatre espaces fonctionnels considérés au paragraphe 1. b., avec des définitions classiques pour les formes bilinéaires les mettant en dualité [4].

Dans l'étude des milieux continus tridimensionnels usuels : élastiques, élastoplastiques, viscoélastiques, etc, on peut prendre pour $\mathcal{V}$ un certain espace de champs tensoriels $\Omega \rightarrow E \otimes_s E$, censés représenter des champs de vitesses de déformation e du milieu et pour $\mathcal{F}$ un espace de champs tensoriels $\Omega \rightarrow E \otimes_s E$ censés représenter des champs de contrainte. Pratiquement, ces deux espaces sont empruntés à l'arsenal de l'analyse fonctionnelle classique ; leurs choix sont essentiellement orientés vers l'obtention de théorèmes d'existence de solutions. On tombe alors tout de suite sur la constatation que seuls les éléments d'un certain sous-espace de $\mathcal{V}$, notons-le I , peuvent être rattachés à des champs de vitesses $u : \Omega \rightarrow E$ par une relation prolongeant de façon plausible l'écriture $e = \text{def } u$. De même les champs de contrainte autoéquilibrés forment un sous-espace J de $\mathcal{F}$. Il est essentiel pour la cohérence du schéma que I et J soient exactement l'orthogonal l'un de l'autre au sens de la dualité que la forme bilinéaire "puissance" établit entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$. Moyennant cela, en effet, la condition $e \in I$ peut être formellement traitée comme une liaison parfaite, l'espace J constituant, de son côté, l'ensemble des valeurs possibles de la réaction associée à cette liaison [2], [3].

La question posée est ainsi intimement liée à l'idée de multiplicateur de Lagrange familière en mécanique. Pour les systèmes mécaniques de liberté finie, la dimension des espaces vectoriels considérés est finie et les théorèmes mettant en cause des multiplicateurs de Lagrange se résument en des propositions algébriques simples. Dans le cas des espaces fonctionnels, par contre, on se trouvera habituellement confronté à la difficulté suivante : montrer qu'un certain sous-espace vectoriel d'un des espaces d'une paire en dualité est égal à son bi-orthogonal au sens de la dualité en question ; autrement dit montrer que

ce sous-espace est fermé pour les topologies compatibles avec la dualité. C'est ce qu'explicite la section 4, ci-après.

1. d. LE THEOREME

Le programme défini à la fin du paragraphe 1. b. vise à préparer la construction de la machinerie $\mathcal{V}, \mathcal{F}, I, J$ la mieux adaptée à chaque problème spécifique de mécanique des milieux continus (en pratique tridimensionnels). On se place pour cela dans le cadre suivant :

1° L'ouvert Ω de E est quelconque, sans hypothèse de connexité ni de régularité de la frontière.

2° On considère un espace de champs de contraintes autoéquilibrées le plus petit possible : ce seront les $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes_S E)$ (champs tensoriels symétriques indéfiniment différentiables à support compact dans Ω) tels que $\operatorname{div} s = 0$ dans Ω .

3° On considère pour $\mathcal{V}$ le plus grand espace vectoriel topologique qu'on sache mettre en dualité "confortable" avec $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes_S E)$, à savoir l'espace $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_S E)$ des distributions sur Ω à valeurs tensorielles symétriques d'ordre 2.

Marginalement se trouvera traité le cas $\mathcal{V} = \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_S E)$.

PROPOSITION (1. d). Soit $e \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_S E)$ (resp. $e \in \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_S E)$) ; pour l'existence de $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ (resp. $u \in \mathcal{E}^2(\Omega, E)$) tel que $e = \operatorname{def} u$, il faut et il suffit que, pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes_S E)$ vérifiant la condition $\operatorname{div} s = 0$ on ait $\langle e_{ij}, s_{ij} \rangle = 0$, en notant $\langle ., . \rangle$ la forme bilinéaire de dualité entre $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ (resp. le produit scalaire $\langle e, s \rangle = \int e_{ij} s_{ij} d\omega$).

Notre démonstration repose sur un théorème de même nature caractérisant les $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ qui sont des gradients. En corollaire de ce théorème, un $g \in \mathcal{E}^0(\Omega, E)$ est le gradient d'une fonction numérique $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si $\int g_i v_i d\omega = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle dans Ω . Ce dernier fait est assez connu et considéré comme classique par ceux qui l'utilisent. Divers modes de démonstration directe sont suggérés au paragraphe 2.

2. CARACTERISATION DES GRADIENTS

2. a. MESURE VECTORIELLE ASSOCIEE A UN CHEMIN

Soit c un chemin dans Ω , c'est-à-dire une application continue à variation bornée $t \mapsto \xi(t)$ de l'intervalle $[0,1]$ dans Ω . Pour toute fonction numérique $\phi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ et toute coordonnée cartésienne, notée x_i , de l'élément générique x de Ω , on définit classiquement $\int_c \phi dx_i$ (c'est, si l'on veut, l'intégrale de la fonction continue $t \mapsto \phi(\xi(t))$ par rapport à la mesure sur $[0,1]$ qui admet $t \mapsto \xi_i(t)$ pour fonction de répartition). De façon équivalente est définie l'intégrale vectorielle $\int_c \phi dx$, élément de E indépendant du choix d'une base dans cet espace.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ on trouve que $\int_c f_{,i} dx_i$, noté aussi $\int_c \text{grad } f \cdot dx$, est égal à $f(\xi(1)) - f(\xi(0))$, accroissement de f pour le chemin c . Cela fait zéro en particulier si c est un circuit, i. e. $\xi(0) = \xi(1)$. Il est bien connu que, réciproquement, si un champ vectoriel $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$ est tel que $\int_c g \cdot dx = 0$ pour tout circuit c dans Ω , alors il existe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $g = \text{grad } f$. La démonstration consiste à choisir une "origine" a^k dans chaque composante connexe Ω^k de Ω (rappelons que, pour tout ouvert Ω de E , "connexe" est équivalent à "connexe par arc" ; cf., par exemple [0], Chap. 5). L'hypothèse fait que, si $y \in \Omega^k$, l'intégrale $\int g \cdot dx$ a la même valeur pour tout chemin d'origine a^k et d'extrémité y : cette intégrale définit donc sur Ω^k une fonction $y \mapsto f^k(y)$; on vérifie, grâce à la continuité de g , que f^k est différentiable dans Ω^k , de gradient égal à g . Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ satisfait $g = \text{grad } f$ dans Ω si et seulement si sa restriction à chaque Ω^k égale f^k , à une constante arbitraire près. L'idée directrice du paragraphe 2. b. sera d'adapter ce type de raisonnement au cas $g \in \mathcal{D}^1(\Omega, E)$: au lieu d'intégrer une fonction numérique le long d'un chemin joignant le point générique de Ω à une origine choisie, on traduira des "fonctions test" le long de tels chemins.

Dans ce but, observons que si L est la longueur du chemin c , on a pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$

$$(2.1) \quad \left| \int_c \phi \, dx_i \right| \leq L \max |\phi|$$

Cela montre que chaque fonctionnelle

$$c_i : \phi \mapsto \int_c \phi \, dx_i \in \mathbb{R}$$

est une distribution, plus précisément une mesure scalaire, sur Ω . Il n'y aura pas d'inconvénient à appeler c_i aussi bien que le chemin lui-même, la fonctionnelle

$$(2.2) \quad c : \phi \mapsto \int_c \phi \, dx \in E$$

élément de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$, plus précisément mesure vectorielle, dont les c_i sont les composantes relativement à la base choisie dans E . Son support est contenu dans l'image de $[0, 1]$ par l'application ξ , donc compact. Par suite la fonctionnelle c se prolonge banalement en une distribution (en fait une mesure vectorielle) sur E entier, de même support ; par abus d'écriture on notera aussi c cet élément de $\mathcal{D}'(E, E)$.

Calculons la divergence $\operatorname{div} c = c_{i,i}$ au sens des distributions. Si a et b sont respectivement l'origine et l'extrémité du chemin, on a, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle c_{i,i}, \phi \rangle &= - \langle c_i, \phi_{,i} \rangle = - \int_c \phi_{,i} \, dx_i \\ &= \phi(a) - \phi(b) = \langle \delta_a - \delta_b, \phi \rangle \end{aligned}$$

Bref $\operatorname{div} c$ est la différence de deux mesures de Dirac placées en a et b :

$$(2.3) \quad \operatorname{div} c = \delta_a - \delta_b$$

Elle est nulle en particulier si c est un circuit.

Si, par exemple, le présent formalisme est appliqué à l'électricité et que le chemin c représente un conducteur filiforme d'origine a , d'extrémité b , parcouru par un courant d'intensité unité, (2.3) signifie que ce conducteur transporte conservativement l'électricité depuis une source de débit 1 placée en a jusqu'à une source de débit -1 placée en b .

2. b. CARACTERISATION DES DISTRIBUTIONS GRADIENTS

PROPOSITION (2. b). Soit $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$, de composantes $g_i \in \mathcal{D}'(\Omega, R)$ relative-
ment à une base orthonormée de E . Pour qu'il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega, R)$ telle que
 $g = \text{grad } f$, il faut et il suffit que g possède la propriété suivante :

(P) pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle, on a,

$$(2.4) \quad \langle g_i, v_i \rangle = 0.$$

Il est banal que $g = \text{grad } f$ entraîne (P). Pour établir l'implication inverse, nous nous appuierons sur plusieurs lemmes.

LEMME 1 (2. b). Si $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ possède la propriété (P) on a

$$(2.5) \quad g_{i,j} = g_{j,i}.$$

Preuve. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, R)$ on écrit, en notant δ le symbole de Kronecker,

$$\begin{aligned} \langle g_{i,j}, \phi \rangle - \langle g_{j,i}, \phi \rangle &= - \langle g_i, \phi_{,j} \rangle + \langle g_j, \phi_{,i} \rangle \\ &= \langle g_k, -\delta_{ki} \phi_{,j} + \delta_{kj} \phi_{,i} \rangle. \end{aligned}$$

Or, pour i et j fixés, le champ vectoriel $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ de composantes

$v_k = -\delta_{ki} \phi_{,j} + \delta_{kj} \phi_{,i}$ a comme divergence

$$v_{k,k} = -\delta_{ki} \phi_{,jk} + \delta_{kj} \phi_{,ik} = -\phi_{,ji} + \phi_{,ij} = 0.$$

LEMME 2 (2. b). Si Π est un pavé ouvert de E et si $g \in \mathcal{D}'(\Pi, E)$ vérifie

(2.5), il existe $f \in \mathcal{D}'(\Pi, R)$ tel que $g = \text{grad } f$.

La démonstration faite dans [5] pour $g \in \mathcal{D}'(R^n, R^n)$ s'adapte aisément au cas d'un pavé ouvert.

LEMME 3 (2. b). Soit ω un ouvert de E et soit c un chemin dans ω ,

d'origine a , d'extrémité b . Soit $\rho > 0$ strictement inférieur à

$\text{dist}(\text{supp } c, E \setminus \omega)$ et soit β la boule ouverte centrée à l'origine de E ,

de rayon ρ . Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(E, R)$ à support contenu dans β , les produits de

convolution $\delta_a^* \alpha$, $\delta_b^* \alpha$ (fonctions déduites respectivement de α par les

translations a et b) et $c_i^* \alpha$ définissent des éléments de $\mathcal{D}(\omega, \mathbb{R})$. Quelle que soit $f \in \mathcal{D}'(\omega, \mathbb{R})$ on a

$$(2.6) \quad \langle f, c_i^* \alpha \rangle = \langle f, \delta_a^* \alpha \rangle - \langle f, \delta_b^* \alpha \rangle .$$

Preuve. Comme $\text{supp } c$ est un compact contenu dans ω , il existe bien $\rho > 0$ satisfaisant la condition de l'énoncé. Les fonctions indéfiniment différentiables $\delta_a^* \alpha$ et $\delta_b^* \alpha$ ont respectivement leurs supports dans $\beta+a$ et $\beta+b$, boules ouvertes contenues dans ω . Pour la définition de $c_i^* \alpha$, c_i est interprété comme un élément de $\mathcal{D}'(E, \mathbb{R})$ (cf. paragraphe 2. a) ; $\bar{\beta}$ désignant l'adhérence de β , le support de $c_i^* \alpha$ est contenu dans $\text{supp } c + \bar{\beta}$, compact contenu dans ω . Soit $\gamma \in \mathcal{D}(E, \mathbb{R})$, à support contenu dans ω , prenant la valeur 1 sur $\text{supp } c + \bar{\beta}$. Le produit γf est une distribution sur ω , à support compact, donc prolongeable en une distribution de même support $\bar{f} \in \mathcal{D}'(E, \mathbb{R})$. Si on note $\langle \dots \rangle_E$ la dualité entre $\mathcal{D}(E, \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(E, \mathbb{R})$ le premier membre de (2.6) peut s'écrire, vu (2.3),

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}, c_i^* \alpha \rangle_E &= \langle \bar{f}, c_{i,i}^* \alpha \rangle_E \\ &= \langle \bar{f}, (\delta_a - \delta_b)^* \alpha \rangle_E \end{aligned}$$

ce qui est bien égal au second membre de (2.6).

Dans les démonstrations ultérieures, des artifices tels que le remplacement de f par $\bar{f}$ seront implicites.

LEMME 4 (2. b). Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, supposons que le chemin c soit un circuit. Alors, pour tout $g \in \mathcal{D}(\omega, E)$ possédant la propriété (P) relativement à ω on a

$$\langle g_i, c_i^* \alpha \rangle = 0 .$$

Preuve. En effet $c_i^* \alpha$ a comme divergence $c_{i,i}^* \alpha$ qui est nul, d'après (2.3).

Preuve de la proposition (2. b). Supposons Ω connexe ; dans le cas général, le raisonnement ci-dessous serait appliqué à chaque composante connexe de Ω .

On allège l'écriture en supposant faite une translation telle que l'origine 0 de E soit dans Ω . Soit $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ possédant la propriété (P).

D'après les lemmes 1 et 2 ci-dessus, il existe une boule ouverte ω^0 de centre 0, d'adhérence contenue dans Ω et une distribution $f^0 \in \mathcal{D}'(\omega^0, R)$ telle que $\text{grad } f^0$ égale la restriction de g à ω^0 .

A chaque point x de Ω associons un chemin c^x dans Ω , d'origine 0, d'extrémité x ; on choisit $\rho^x > 0$ strictement inférieur à $\text{dist}(\text{supp } c^x, E \setminus \Omega)$, inférieur ou égal d'autre part au rayon de ω^0 ; on note ω^x la boule ouverte de centre x , de rayon ρ^x . Définissons de la manière suivante un élément f^x de $\mathcal{D}'(\omega^x, R)$: pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\omega^x, R)$, la fonction translatée $\alpha = \delta_{-x}^* \phi$ a son support dans ω^0 ; posons

$$(2.7) \quad \langle f^x, \phi \rangle = \langle f^0, \alpha \rangle + \langle g_i, c_i^x * \alpha \rangle.$$

Cela définit bien f^x comme distribution sur ω^x , puisque $\phi \mapsto \alpha$ est une application continue de $\mathcal{D}(\omega^x, R)$ dans $\mathcal{D}(\omega^0, R)$ et que $\alpha \mapsto c_i^x * \alpha$ est une application continue de $\mathcal{D}(\omega^0, R)$ dans $\mathcal{D}(\Omega, R)$ (les trois crochets écrits en (2.7) sont relatifs respectivement aux trois espaces en question).

Montrons que $\text{grad } f^x$ égale la restriction de g à ω^x . Puisque $\alpha_{,k} = \delta_{-x}^* \phi_{,k}$, on écrit :

$$\begin{aligned} \langle f_{,k}^x, \phi \rangle &= - \langle f^x, \phi_{,k} \rangle \\ &= - \langle f^0, \alpha_{,k} \rangle - \langle g_i, c_i^x * \alpha_{,k} \rangle \\ &= \langle f_{,k}^0, \alpha \rangle + \langle g_{i,k}, c_i^x * \alpha \rangle. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, $g_{i,k} = g_{k,i}$ donc, en invoquant (2.3),

$$\begin{aligned} \langle g_{i,k}, c_i^x * \alpha \rangle &= \langle g_{k,i}, c_i^x * \alpha \rangle \\ &= - \langle g_k, c_{i,i}^x * \alpha \rangle \\ &= \langle g_k, (\delta_x - \delta_0) * \alpha \rangle \\ &= \langle g_k, \phi \rangle - \langle g_k, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Comme $g_k = f_{,k}^0$ sur ω^0 , par construction, cela donne le résultat attendu.

Il reste maintenant à invoquer le théorème de recollement des morceaux [5] pour prouver l'existence de $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ dont les f^x sont les restrictions aux divers ω^x . On doit établir que, si x et x' sont deux points de Ω et si $\omega^x \cap \omega^{x'} \neq \emptyset$, les distributions f^x et $f^{x'}$ ont même restriction à cette intersection. Cela revient à montrer que, si $y \in \omega^x \cap \omega^{x'}$ et si β est une boule ouverte de centre O , telle que $y+\beta \subset \omega^x \cap \omega^{x'}$, les distributions f^x et $f^{x'}$ ont même restriction à $y+\beta$. Autrement dit montrer que, quelle que soit $\alpha \in \mathcal{D}(\beta, \mathbb{R})$, on a

$$(2.8) \quad \langle f^x, \delta_y^* \alpha \rangle = \langle f^{x'}, \delta_y^* \alpha \rangle .$$

Si on note σ un chemin (rectiligne par exemple) d'origine x et d'extrémité y , le lemme 3, appliqué avec $\omega = \omega^x$, $a = x$, $b = y$, donne

$$\langle f^x, \delta_y^* \alpha \rangle = \langle f^x, \delta_x^* \alpha \rangle - \langle g_i, \sigma_i^* \alpha \rangle .$$

De même, en notant σ' un chemin d'origine x' et d'extrémité y

$$\langle f^{x'}, \delta_y^* \alpha \rangle = \langle f^{x'}, \delta_{x'}^* \alpha \rangle - \langle g_i, \sigma_i'^* \alpha \rangle .$$

Par la définition de f^x et $f^{x'}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f^x, \delta_x^* \alpha \rangle &= \langle f^O, \alpha \rangle + \langle g_i, c_i^x^* \alpha \rangle \\ \langle f^{x'}, \delta_{x'}^* \alpha \rangle &= \langle f^O, \alpha \rangle + \langle g_i, c_i^{x'}^* \alpha \rangle . \end{aligned}$$

L'égalité (2.8) résulte alors du lemme 4 appliqué à Ω et au circuit $c^x + \sigma - \sigma' - c^{x'}$.

2. c. CARACTERISATION DES $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$ QUI SONT DES GRADIENTS

Tout champ vectoriel continu $g : \Omega \rightarrow E$ est la densité par rapport à la mesure de Lebesgue d'une mesure sur Ω à valeurs dans E . Cette mesure constitue un élément de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ qu'il est habituel, par abus de langage, de confondre avec g lui-même. Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ (ou plus généralement $\phi \in \mathcal{D}^0(\Omega, E)$)

$$(2.9) \quad \langle g, \phi \rangle = \int_{\Omega} g \phi \, d\omega .$$

Il est bien connu [5] qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ admet cet élément g

comme gradient au sens des distributions si et seulement si f "est" une fonction différentiable au sens usuel admettant le champ vectoriel g comme gradient. La proposition 2. b implique donc :

PROPOSITION (2. c). Soit $g \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$, de composantes $g_i \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ relativement à une base orthonormée de E . Pour qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $g = \text{grad } f$ il faut et il suffit que g possède la propriété suivante :

(P₀) pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle, on a

$$\int_{\Omega} g_i v_i d\omega = 0.$$

Naturellement la démonstration directe de cette proposition exigerait moins d'acrobaties que ce qui a été fait au paragraphe précédent. Le point essentiel sera de démontrer que (P₀) entraîne

$$(2.10) \quad \int_c g_i dx_i = 0$$

pour tout circuit c dans Ω . Cela se fait en établissant que, le circuit c étant fixé, le premier membre de (2.10) peut être approché d'aussi près qu'on veut par des intégrales de la forme $\int_{\Omega} g_i v_i d\omega$, avec $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle. Le moyen le plus expéditif pour cela semble être de prendre $v = c * \alpha$ où $\alpha \in \mathcal{D}(E, \mathbb{R})$ est à valeurs ≥ 0 , d'intégrale égale à 1, de support suffisamment voisin de l'origine.

Un autre moyen de construire v s'appuie sur la géométrie différentielle élémentaire : on observe d'abord, grâce à la continuité uniforme de g sur un voisinage compact du support de c , que le premier membre de (2.10) peut être arbitrairement approché par des intégrales relatives à des circuits $\mathcal{C}^\infty$, sans points multiples, à rayon de courbure minoré. Si Γ est la courbe support d'un tel circuit et si β est une boule centrée à l'origine de E , de rayon suffisamment petit, le sous-domaine "tubulaire" $\Gamma + \beta$ de Ω est feuilleté par les hyper-plans normaux de Γ . On constate immédiatement que les

intersections Π et Π' de deux quelconques de ces hyperplans avec le domaine $\Gamma + \beta$ sont mis en correspondance isométrique par l'application $x \mapsto x'$, où x et x' désignent les traces sur Π et Π' d'une même trajectoire orthogonale de la famille d'hyperplans. Par suite un champ vectoriel $v : \Gamma + \beta \rightarrow E$ admettant ces trajectoires orthogonales pour lignes de flux est à divergence nulle si la norme et le sens de v sont constants sur chaque ligne (conservation du flux). On peut évidemment faire qu'un tel champ vectoriel soit indéfiniment différentiable, à support dans $C + \beta$, de flux total égal à 1 à travers chaque section normale. On le prolonge avec la valeur zéro hors de $C + \beta$.

REMARQUE. On pourrait à ce stade chercher à déduire 2. b. de 2. c. par une technique de régularisation, c'est-à-dire l'approximation des distributions par des fonctions. Mais il faut alors établir que l'image de $\mathcal{D}'(\Omega, R)$ par grad est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$; or on verra au paragraphe 4. a. que cette propriété de fermeture est banalement équivalente à la proposition 2. b elle-même. La régularisation semble donc ici un procédé sans utilité.

3. CARACTERISATION DES DISTRIBUTIONS DEFORMATIONS

3. a. DEUX LEMMES

Nous dirons que $e \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_S E)$ possède la propriété (P') si, pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes_S E)$, à divergence nulle (i. e. $s_{ij,j} = 0$) on a

$$(3.1) \quad \langle e_{ij}, s_{ij} \rangle = 0 .$$

Rappelons que si la distribution e "est" un champ tensoriel localement intégrable pour la mesure de Lebesgue $d\omega$, le premier membre de (3.1) s'écrit

$$(3.2) \quad \langle e_{ij}, s_{ij} \rangle = \int_{\Omega} e_{ij} s_{ij} d\omega .$$

LEMME 1 (3. a). Si $e \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_S E)$ (resp. $e \in \mathcal{D}^1(\Omega, E \otimes_S E)$) possède la propriété (P'), on a, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$, à divergence nulle,

$$(3.3) \quad \langle e_{ij,k} - e_{jk,i}, v_j \rangle = 0.$$

Preuve. L'égalité (3.3) équivaut à

$$(3.4) \quad \langle e_{ij}, v_{j,k} \rangle - \langle e_{jk}, v_{j,i} \rangle = 0.$$

En introduisant le symbole de Kronecker δ , on écrit :

$$\begin{aligned} \langle e_{ij}, v_{j,k} \rangle &= \langle e_{lm}, \delta_{il} v_{m,k} \rangle \\ \langle e_{jk}, v_{j,i} \rangle &= \langle e_{lm}, \delta_{km} v_{l,i} \rangle. \end{aligned}$$

Comme e_{lm} est symétrique en l et m , le premier membre de (3.4) s'écrit finalement

$$\frac{1}{2} \langle e_{lm}, \delta_{il} v_{m,k} + \delta_{im} v_{l,k} - \delta_{km} v_{l,i} - \delta_{kl} v_{m,i} \rangle.$$

Pour i et k fixés, notons s_{lm} le second facteur de ce crochet.

Cela définit un élément s de $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes_s E)$ dont la divergence est

$$\begin{aligned} s_{lm,m} &= \delta_{il} v_{m,km} + \delta_{im} v_{l,km} - \delta_{km} v_{l,im} - \delta_{kl} v_{m,im} \\ &= \delta_{il} (v_{m,m})_{,k} + v_{l,ki} - v_{l,ik} - \delta_{kl} (v_{m,m})_{,i} = 0. \end{aligned}$$

LEMME 2 (3. a). Si $e \in \mathcal{D}^1(\Omega, E \otimes_s E)$ (resp. $e \in \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_s E)$) possède la propriété (P') et si on note x_j les composantes de l'élément générique de E relativement à la base orthonormée choisie on a, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ à divergence nulle,

$$(3.5) \quad \langle x_j (e_{ij,k} + e_{ik,j} - e_{kj,i}), v_k \rangle = 0.$$

Preuve. L'égalité (3.5) équivaut à

$$(3.6) \quad \langle e_{ij}, (x_j v_k)_{,k} \rangle + \langle e_{ik}, (x_j v_k)_{,j} \rangle - \langle e_{kj}, (x_j v_k)_{,i} \rangle = 0$$

dont le premier membre s'écrit aussi (on rappelle que v est la dimension de E)

$$\begin{aligned} &\langle e_{ij}, \delta_{jk} v_k + x_j v_{k,k} \rangle + \langle e_{ik}, \delta_{jj} v_k + x_j v_{k,j} \rangle - \langle e_{kj}, \delta_{ji} v_k + x_j v_{k,i} \rangle \\ &= \langle e_{ij}, v_j \rangle + \langle e_{ik}, v v_k + x_j v_{k,j} \rangle - \langle e_{ki}, v_k \rangle - \langle e_{kj}, x_j v_{k,i} \rangle \\ &= \langle e_{lm}, \delta_{li} \delta_{mk} (v v_k + x_j v_{k,j}) - \delta_{lk} \delta_{mj} x_j v_{k,i} \rangle \\ &= \langle e_{lm}, v \delta_{li} v_m + \delta_{li} x_j v_{m,j} - x_m v_{l,i} \rangle \end{aligned}$$

Vu la symétrie de e_{lm} , on peut remplacer le second facteur de ce crochet par son symétrisé en l et m , c'est-à-dire, au facteur $\frac{1}{2}$ près,

$$v_{li} v_m^+ + v_{mi} v_l^+ + \delta_{li} x_j v_{m,j} + \delta_{mi} x_j v_{l,j} - x_m v_{l,i} - x_l v_{m,i} .$$

Pour chaque i , notons s_{lm} cette expression ; cela définit un élément s de $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes_s E)$ dont on calcule comme suit la divergence

$$\begin{aligned} s_{lm,m} &= v_{li} v_{m,m}^+ + v_{mi} v_{l,m}^+ + \delta_{li} \delta_{jm} v_{m,j} + \delta_{li} x_j v_{m,jm} + \delta_{mi} \delta_{jl} v_{l,j} + \delta_{mi} x_j v_{l,jm} \\ &\quad - \delta_{lm} v_{l,i} - x_m v_{l,im} - \delta_{lm} v_{m,i} - x_l v_{m,im} \\ &= v_{l,i}^+ v_{l,i} + x_j v_{l,ji} - v_{l,i} - x_m v_{l,im} - v_{l,i} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

3. b. PREUVE DE LA PROPOSITION 1. d.

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ et $e = \text{def } u$, on écrit, pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes_s E)$, à divergence nulle

$$\begin{aligned} \langle e_{ij}, s_{ij} \rangle &= \frac{1}{2} \langle u_{i,j}, s_{ij} \rangle + \frac{1}{2} \langle u_{j,i}, s_{ij} \rangle \\ &= \langle u_{i,j}, s_{ij} \rangle = - \langle u_i, s_{ij,j} \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Calcul semblable pour $u \in \mathcal{D}^1(\Omega, E)$ avec l'interprétation correspondante de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Inversement supposons que $e \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_s E)$ possède la propriété (P').

Le lemme 1 (3. a) et la proposition (2. b) entraînent que, pour tout i et tout k , il existe $f_{ik} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ défini à une constante additive près sur chaque composante connexe de Ω , tel que

$$(3.7) \quad f_{ik,j} = e_{ij,k} - e_{jk,i} .$$

Cette propriété implique

$$(f_{ik} + f_{ki})_{,j} = e_{ij,k} - e_{jk,i} + e_{kj,i} - e_{ji,k} = 0$$

donc $f_{ik} + f_{ki}$ est une distribution constante sur chaque composante connexe de Ω . Profitons des constantes arbitraires dans la construction des f_{ik} pour faire que

$$(3.8) \quad f_{ik} + f_{ki} = 0$$

Montrons alors qu'il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tel que

$$u_{i,k} = e_{ik} + f_{ik}$$

ce qui, vu (3.8), entraîne effectivement $e = \text{def } u$. On écrit

$$(3.9) \quad e_{ik} + f_{ik} = (x_j(e_{ij} + f_{ij}))_{,k} - x_j(e_{ij,k} + f_{ij,k})$$

Le premier terme du second membre fournit bien les composantes de la distribution tensorielle gradient d'un élément de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$. Il reste à prouver qu'il en est de même pour le dernier terme, c'est-à-dire, vu la proposition (2. b), que pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ tel que $\text{div } v = 0$, on a

$$\langle x_j(e_{ij,k} + f_{ij,k}), v_k \rangle = 0$$

Cela résulte du lemme 2 (3. a), puisque vu la condition imposée à f en (3. 7), on a :

$$e_{ij,k} + f_{ij,k} = e_{ij,k} + e_{ik,j} - e_{kj,i}$$

Reprenons maintenant ce raisonnement dans l'alternative

$e \in \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_S E)$. Le lemme 1 (3. a) et la proposition (2. b) impliquent l'existence des $f_{ik} \in \mathcal{E}^1(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant (3. 7) et (3. 8). Le lemme 2 (3. a) et la même proposition montrent que les $e_{ik} + f_{ik}$, tels qu'ils sont écrits en (3. 9) fournissent les composantes du champ tensoriel gradient d'un $u \in \mathcal{E}^1(\Omega, E)$. En fait comme les e_{ik} et f_{ik} appartiennent à $\mathcal{E}^1(\Omega, \mathbb{R})$, on a $u \in \mathcal{E}^2(\Omega, E)$.

REMARQUE. La proposition (1. d), dans sa version concernant les distributions, est tout à fait similaire à la proposition (2. b) caractérisant les distributions vectorielles qui sont des gradients de distributions scalaires. Par contre, lorsqu'il s'agit de fonctions, c'est-à-dire de champs vectoriels ou tensoriels au sens propre, on aura observé que la démonstration ci-dessus exige $e \in \mathcal{E}^1(\Omega, E \otimes_S E)$ tandis que la proposition (2. c) demandait seulement $g \in \mathcal{E}^0(\Omega, E)$. Si l'on part d'un $e \in \mathcal{E}^0(\Omega, E \otimes_S E)$ possédant la propriété (P'), il existe une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ telle que $e = \text{def } u$. On peut montrer que cette distribution vectorielle est un champ vectoriel continu

mais il n'est pas sûr qu'il soit différentiable, c'est-à-dire que $e = \text{def } u$ ait lieu au sens élémentaire. On entre là dans les problèmes de régularité locale qui feront l'objet d'autres rapports de ce Séminaire.

3. c. DEGRE D'INDETERMINATION DE u

On pourrait préciser ce degré d'indétermination en analysant la démonstration précédente ; plus directement :

PROPOSITION (3. c). Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$; la distribution $\text{def } u \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes_s E)$ est nulle si et seulement si pour chaque composante connexe de Ω , il existe des constantes $V \in E$ et $F \in E \wedge E$ (i. e. F est un tenseur antisymétrique d'ordre 2) tels que la distribution u ait même restriction à ladite composante connexe que le champ vectoriel $x \mapsto w(x)$ de composantes

$$(3. 10) \quad w_k(x) = V_k + F_{kj} x_j \quad .$$

Preuve. Il est immédiat que (3. 10) implique $\text{def } w = 0$. Inversement supposons que $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ ait une déformation nulle, c'est-à-dire

$$(3. 11) \quad u_{i,j} + u_{j,i} = 0 \quad .$$

La commutativité des dérivations permet d'écrire

$$u_{i,jk} - u_{i,kj} = 0$$

$$u_{j,ik} - u_{j,ki} = 0$$

$$u_{k,ij} - u_{k,ji} = 0 \quad .$$

En ajoutant membre à membre, compte tenu de (3. 11), on obtient :

$$2 u_{k,ij} = 0$$

prouvant que la distribution $u_{k,i}$ est une constante sur chaque composante connexe ω de Ω ; soit F_{ki} la valeur de cette constante, égale à $-F_{ik}$ vu

(3. 11). Interprétant la fonction $x \mapsto F_{kj} x_j$ comme une distribution sur ω ,

on a :

$$(u_k - F_{kj} x_j)_{,i} = u_{k,i} - F_{ki} = 0 \quad .$$

Donc la distribution $u_k - F_{kj} x_j$ est égale à une constante, soit V_k , sur la composante connexe ω .

4. ORTHOGONALITE ET FERMETURE

4. a. SITUATIONS COMPAREES DES SECTIONS 2 ET 3

On peut être surpris des complications rencontrées à la section 3. En effet, si on reformule la proposition (2. b) en munissant les g_i d'un indice de plus, il vient :

Soit $g \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$, de composantes $g_{ij} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ relativement à une base orthonormée de E . Pour qu'il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tel que $g_{ij} = u_{i,j}$ (ce qu'on peut exprimer en disant que la distribution tensorielle g est le gradient de la distribution vectorielle u) il faut et il suffit que g possède la propriété suivante

(P'') pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$ tel que $s_{ij,j} = 0$ on a

$$(4. 1) \quad \langle g_{ij}, s_{ij} \rangle = 0 .$$

La forme bilinéaire $\langle g, s \rangle$ écrite au premier membre met les espaces vectoriels $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ et $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$ en dualité ; les topologies usuelles de la théorie des distributions sont compatibles avec cette dualité. Les espaces vectoriels $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ et $\mathcal{D}(\Omega, E)$ sont mis en dualité de façon semblable. L'identité

$$\langle u_{i,j}, s_{ij} \rangle = - \langle u_i, s_{ij,j} \rangle$$

exprime que les deux applications linéaires $\text{grad} : \mathcal{D}'(\Omega, E) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ et $-\text{div} : \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega, E)$ sont transposées l'une de l'autre. Il en résulte banalement que l'orthogonal dans $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ du noyau de l'application $-\text{div}$ est l'adhérence de l'image de $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ par l'application grad . Le point non banal dans la proposition 2. b (sous la forme, adaptée aux distributions tensorielles, qu'on vient de lui donner) équivaut donc à l'assertion que l'image

en question est fermée, pour les topologies compatibles avec la dualité, par exemple la topologie forte de $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$.

Abordons dans le même cadre la proposition 1. d. Soit S' (resp. A') le sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ constitué par les distributions tensorielles symétriques (resp. antisymétriques) ; $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ est somme directe topologique de ces deux sous-espaces. Etant donné $e \in \mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ tel que $e = \text{def } u$ si et seulement si $e \in S' \cap (A' + \text{grad } \mathcal{D}'(\Omega, E))$. Si on note S l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$ qui prennent leurs valeurs dans $E \otimes_s E$, il est élémentaire que, au sens de la même dualité que plus haut, l'orthogonal de S dans $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$ est le sous-espace A' . Par suite l'orthogonal de $S \cap \ker \text{div}$ est l'adhérence de $A' + \text{grad } \mathcal{D}'(\Omega, E)$. La proposition 1. d consiste donc dans l'égalité

$$S' \cap \text{adh } (A' + \text{grad } \mathcal{D}'(\Omega, E)) = S' \cap (A' + \text{grad } \mathcal{D}'(\Omega, E)) .$$

Il suffit pour cela (on verrait même que c'est équivalent) que $A' + \text{grad } \mathcal{D}'(\Omega, E)$ soit fermé, par exemple pour la topologie forte de $\mathcal{D}'(\Omega, E \otimes E)$. Donc, là encore, le noeud de la question est une propriété de fermeture : nous ne voyons pas le moyen de l'établir par des arguments généraux d'analyse fonctionnelle.

4. b. PREDISTRIBUTIONS

L'auteur doit à P. Casal d'avoir attiré son attention sur la formalisation suivante de l'idée de multiplicateur de Lagrange :

PROPOSITION (4. b). Soient F, G, H trois espaces vectoriels ; toutes les flèches ci-dessous sont linéaires ; soient $a : F \rightarrow G$ et $b : F \rightarrow H$. L'inclusion $\ker b \subset \ker a$ équivaut à l'existence de $c : H \rightarrow G$ assurant la factorisation $a = c \circ b$.

Preuve. Soit $Q = F/\ker b$ et soit $\sigma : F \rightarrow Q$ la surjection canonique ; il existe $b_Q : Q \rightarrow H$, injectif tel que $b = b_Q \circ \sigma$. L'application $b_Q^{-1} : b(F) \rightarrow Q$ peut être prolongée à H entier (de façon en général non unique) en

$b_Q^{-1} : H \rightarrow Q$. Si $\ker b \subset \ker a$, deux éléments de F égaux modulo $\ker b$ le sont aussi modulo $\ker a$, de sorte qu'il existe une factorisation $a = a_Q \circ \sigma$ (avec $a_Q : Q \rightarrow G$ non unique si $\ker a$ est strictement plus grand que $\ker b$). Il n'y a qu'à écrire $a = a_Q \circ \sigma = a_Q \circ b_Q^{-1} \circ b_Q \circ \sigma$ et prendre $c = a_Q \circ b_Q^{-1}$.

Inversement la factorisation $a = c \circ b$ implique évidemment $\ker b \subset \ker a$.

Il s'agit là d'un résultat algébrique ; dans le cas d'espaces vectoriels topologiques où l'on demanderait la continuité des applications concernées, la principale difficulté serait d'assurer que b_Q^{-1} est continue.

Mais on peut appliquer ce lemme à la démonstration d'un analogue de la proposition 2. b dans le cadre des prédistributions, éléments du dual algébrique $\mathcal{D}^*(\Omega, \mathbb{R})$ de $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, et des prédistributions vectorielles, éléments de $\mathcal{D}^*(\Omega, E)$.

Si $f \in \mathcal{D}^*(\Omega, \mathbb{R})$, l'élément $g = \text{grad } f \in \mathcal{D}^*(\Omega, E)$ se définit, comme en théorie des distributions, par

$$(4. 2) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) : \quad \langle g_i, \phi \rangle = - \langle f, \phi_{,i} \rangle .$$

Pour un tel g on trouve, en notant v un élément de $\mathcal{D}(\Omega, E)$ l'implication

$$\text{div } v = 0 \Rightarrow \langle g_i, v_i \rangle = 0 .$$

Autrement dit, puisque $\text{div} : \mathcal{D}(\Omega, E) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ et $g : \mathcal{D}(\Omega, E) \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications linéaires,

$$(4. 3) \quad \ker \text{div} \subset \ker g .$$

Pour montrer qu'inversement cette inclusion assure l'existence de $f \in \mathcal{D}^*(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $g = \text{grad } f$ on invoque la proposition ci-dessus avec $F = \mathcal{D}(\Omega, E)$, $G = \mathbb{R}$, $H = \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, $a = g$, $b = \text{div}$. Ainsi (4. 3) implique l'existence de $c : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g = c \circ \text{div}$, c'est-à-dire que, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$, on a

$$\langle g_j, v_j \rangle = \langle c, v_{j,j} \rangle .$$

D'après la définition (4. 2) cela équivaut à $g = - \text{grad } c$ (prendre $v_j = \phi \delta_{ij}$); bref $f = - c$ répond à la question.

La proposition 1. d possède de même un analogue algébrique.

On note $\mathcal{D}^*(\Omega, E \otimes E)$ le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$. A la décomposition $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) = A \oplus S$ (A ensemble des éléments de $\mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$ à valeurs antisymétriques ; S ensemble des éléments à valeurs symétriques) correspond la décomposition $\mathcal{D}^*(\Omega, E \otimes E) = A^* \oplus S^*$ où A^* est l'orthogonal de S et S^* l'orthogonal de A ; un élément e de S^* a des composantes $e_{ij} \in \mathcal{D}^*(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant $e_{ij} = e_{ji}$. Notant sym la projection canonique de $A^* \oplus S^*$ sur S^* on définit, comme dans le cas des distributions, l'application $\text{def} = \text{sym grad}$. De même on note ant la projection canonique de $A \oplus S$ sur A . La propriété à établir est que, avec $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$ et $e \in S^*$, l'implication

$$(4. 4) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ant } s = 0 \\ \text{div } s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle e, s \rangle = 0$$

assure l'existence de $u \in \mathcal{D}^*(\Omega, E)$ tel que $e = \text{def } u$. On prend pour b l'application

$$(\text{ant}, \text{div}) : \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) \times \mathcal{D}(\Omega, E)$$

et pour a l'application

$$e : \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'implication (4. 4) signifie que $\ker b \subset \ker a$; d'après la proposition 4. b il existe alors

$$c : \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E) \times \mathcal{D}(\Omega, E) \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que $a = c \circ b$. Un tel c s'écrit $(c^1, c^2) \in \mathcal{D}^*(\Omega, E \otimes E) \times \mathcal{D}^*(\Omega, E)$,

c'est-à-dire que, pour tout $s \in \mathcal{D}(\Omega, E \otimes E)$, on a

$$\begin{aligned} \langle e, s \rangle &= \langle c^1, \text{ant } s \rangle + \langle c^2, \text{div } s \rangle \\ &= \langle \text{ant } c^1 - \text{grad } c^2, s \rangle. \end{aligned}$$

Donc $e = \text{ant } c^1 - \text{grad } c^2$; puisque $e \in S^*$ par hypothèse, cela entraîne $e = - \text{sym grad } c^2$.

5. REFERENCES

- [0] DUGUNDJI, J. Topology, Allyn and Bacon, 1966.
- [1] GURTIN, M.E. The linear theory of elasticity, in : Handbuch der Physics, b. VI a/2, Festkörpermechanik II, Springer-Verlag, 1972, p. 1-295.
- [3] MOREAU, J.J. On unilateral constraints, friction and plasticity, in : New variational techniques in Mathematical Physics, C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1974, p. 173-322.
- [3] MOREAU, J.J. La convexité en statique, in : Analyse convexe et ses applications (ed. by J.P. Aubin), Lecture Notes in Economies and Mathematical Systems, Springer-Verlag, 102 (1974), p. 141-167.
- [4] NAYROLES, B. Point de vue algébrique ; convexité et intégrales convexes en mécanique des solides, in : New variational techniques in Mathematical Physics, C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1974, p. 325-404.
- [5] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions, Hermann ; t. I, 1957 ; t. II, 1951.
- [6] SOLOMON, L. Elasticité linéaire, Masson, 1968.