



## Factorisation d'un processus de rafle discontinu

Jean Jacques Moreau

### ► To cite this version:

| Jean Jacques Moreau. Factorisation d'un processus de rafle discontinu. 1974. hal-02309492

**HAL Id: hal-02309492**

**<https://hal.science/hal-02309492>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1974 , Exposé n° 15

FACTORISATION D'UN PROCESSUS DE RAFLE DISCONTINU

par

J.J. MOREAU

1 . INTRODUCTION

Les notations sont celles des précédents rapports consacrés au processus de rafle (cf. [2], [3]) :  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , contenant son origine  $t_0$  ;  $C$  est une multiapplication de  $I$  dans  $H$  (espace hilbertien réel), à valeurs convexes fermées non vides, à rétraction finie ; on note

$$r(t) = \text{ret} (C ; t_0, t) .$$

Dans la formulation "forte" du processus de râfle

$$-\frac{du}{dt} \in \partial\psi (t, u(t))$$

( $\psi(t, .)$  : fonction indicatrice de  $C(t)$ ), on observe que le second membre est une partie conique de  $H$  ; cela, tout aussi bien que les illustrations mécaniques du processus, rend intuitive la propriété suivante : la chaîne des positions successives du point raflé  $u$  se trouve associée à la chaîne

---

Reçu le 10 Décembre 1974.



des positions successives du convexe mobile  $C$  d'une manière indépendante de l'horaire de cette succession. C'est ce qui se trouve précisé par la règle du changement de variable continu croissant (cf. [2]) :

Soit  $c$  une application surjective croissante (donc continue) de  $I$  sur un intervalle  $I'$  ; soit  $C' : I' \rightarrow H$  une multiapplication à rétraction finie, possédant comme fonction rétraction  $r' : I' \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors la multiapplication  $C' \circ c$  est à rétraction finie, avec pour fonction rétraction  $r = r' \circ c$ . Une fonction  $u : I \rightarrow H$  est solution faible du processus de rafle par  $C' \circ c$  si et seulement si elle se factorise sous la forme  $u = u' \circ c$ , où  $u' : I' \rightarrow H$  désigne une solution faible du processus de rafle par  $C'$ .

Cette propriété, de démonstration facile dès qu'on se reporte à la définition des solutions faibles d'un processus de rafle comme limites de fonctions localement en escalier, a joué un rôle essentiel dans notre étude des solutions fortes ; elle fournit en effet l'artifice suivant, qui ramène au cas lipschitzien celui d'une multiapplication donnée  $C$ , à rétraction continue. Dans ce cas, la fonction  $c : t \rightarrow t+r(t)$  est continue strictement croissante, d'où l'existence de la fonction inverse  $c^{-1}$ . On constate alors que la multiapplication  $C' = C \circ c^{-1}$  est à rétraction lipschitzienne de rapport 1, situation dans laquelle nous avons prouvé par ailleurs que toute solution faible  $u'$  du processus de rafle est en fait forte. Cela permet de discuter en quel sens la solution  $u = u' \circ c$  du processus de rafle par  $C = C' \circ c$  possède une dérivée  $du/dt$  vérifiant (1.1) .

Noter aussi que, si  $r$  est continue strictement croissante, le même procédé peut être appliqué en prenant  $C' = C \circ r^{-1}$  .



L'objet du présent rapport est de mettre en oeuvre une réduction au cas lipschitzien lorsque la fonction  $r$  n'est supposée ni continue ni strictement croissante. Une solution (faible)  $u : I \rightarrow H$  du processus de rafle par  $C$  est une fonction à variation bornée, à priori discontinue ; un changement de variable convenable réalisera, en quelque sorte, l'étalé-  
ment de ses discontinuités.

La motivation est d'étudier ultérieurement par ce moyen les mesures différentielles des solutions faibles du processus de rafle et de préciser en quel sens on peut déclarer que ces mesures vérifient la condition (1.1.) .

## 2 . LE GRAPHE $G$

Dans toute la suite, la multiapplication  $C : I \rightarrow H$  est supposée donnée. Sa fonction rétraction  $t \mapsto r(t) = \text{ret}(C ; t_0, t)$  envoie  $I$  dans  $\mathbb{R}_+$  ; soit  $J$  le plus petit intervalle de  $\mathbb{R}_+$  contenant  $r(I)$ .

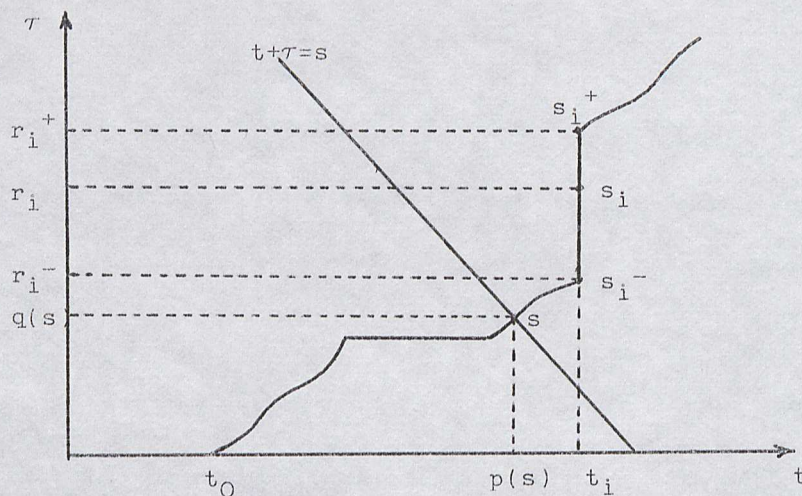
La fonction faiblement croissante  $r$  possède un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité. Soit  $t_i \in I$  l'un d'entre eux ; notons  $r(t_i) = r_i$  ,  $r^-(t_i) = r_i^-$  ,  $r^+(t_i) = r_i^+$  . Le graphe de  $r$  dans  $I \times J$  rencontre le segment  $\{t_i\} \times J$  au seul point  $(t_i, r_i)$  ; convenons d'adjoindre à ce graphe la totalité du segment ayant pour extrémités les points  $(t_i, r_i^-)$  et  $(t_i, r_i^+)$ .

Appelons  $G$  la réunion du graphe de  $r$  et de tous les segments ainsi associés aux points de discontinuité de  $r$ . L'ensemble  $G$  est un graphe monotone maximal dans  $I \times J$ . Cela se traduit élémentairement par les propriétés suivantes (indépendamment de l'idée de maximalité, on peut les établir par l'examen du graphe de la fonction  $f : t \mapsto t+r(t)$ , à compléter lui aussi par des segments, ce qui fournit l'application lipschitzienne  $p$  inverse



à gauche de  $f$ ).

Pour chaque  $s$  appartenant à l'intervalle  $I+J$  de  $\mathbb{R}$  la droite  $\{(t, \tau) \in I \times J : t + \tau = s\}$  rencontre  $G$  en un point et un seul, qu'on notera  $(p(s), q(s))$ .



Les deux applications  $s \mapsto p(s)$  et  $s \mapsto q(s)$  sont faiblement croissantes, lipschitziennes de rapport 1, elles fournissent une représentation paramétrique de  $G$ . Si on munit  $I \times J$  d'une métrique en définissant la distance de deux points  $(t, \tau)$  et  $(t', \tau')$  par

$$d((t, \tau), (t', \tau')) = |t' - t| + |\tau' - \tau|$$

$G$  apparaît comme une courbe rectifiable dans cet espace métrique et  $s$  n'est autre que l'abscisse curviligne du point qui lui correspond sur cette courbe. Par abus de langage on identifiera ce point au réel  $s$  lui même.

Le point  $(t_0, 0)$ , début de  $G$ , est donc identifié au réel  $s_0 = t_0$ .

Les fonctions  $p$  et  $q$  seront ainsi interprétées comme des applications de  $G$  dans  $I$  et  $J$  respectivement.

On notera  $f$  l'application  $t \mapsto t + r(t)$  de  $I$  dans  $G$ .



En résumé

$$(2.1) \quad p \circ f = \text{identité}$$

$$(2.2) \quad q \circ f = r$$

$$(2.3) \quad p + q = \text{identité} \quad .$$

Si  $t_i$  est un point de discontinuité de  $r$ , on posera  $s_i = t_i + r_i$ ,  $s_i^- = t_i + r_i^-$ ,  $s_i^+ = t_i + r_i^+$ .

### 3 . FACTORISATION PAR $f$

Soit  $a \in C(t_0)$  et soit  $u$  la solution faible du processus de rafle par  $C$  pour la donnée initiale  $u(t_0) = a$ .

La règle du changement de variable continu croissant donne immédiatement :

LEMME 1. La multiapplication  $\hat{D} = C \circ p$  de  $G$  dans  $H$  est à rétraction finie. La solution faible  $\hat{v}$  du processus de rafle par  $\hat{D}$ , pour la donnée initiale  $a$  est égale à  $u \circ p$ .

Notons  $B$  la boule unité fermée, centrée à l'origine de  $H$ .

Construisons une multiapplication  $D$  de  $G$  dans  $H$  de la manière suivante :

Si  $p(s) = t$  est un point de continuité de  $r$ , on prend  $D(s) = C(t)$

Si  $p(s)$  est le point de discontinuité  $t_i$  de  $r$ , avec  $s \in [s_i^-, s_i]$ , on prend

$$D(s) = C(t_i) + (s_i - s)B .$$

Si  $p(s) = t_i$ , avec  $s \in ]s_i, s_i^+]$  (intervalle éventuellement vide), on prend

$$D(s) = C^+(t_i) + (s_i^+ - s)B$$



Observer que

$$(3.1) \quad \forall t \in I : D(f(t)) = C(t) .$$

REMARQUE: Pour l'application de l'algorithme de rattrapage aux multiapplication  $D$  ou  $\hat{D}$  de  $G$  dans  $H$ , on sera amené plus loin à considérer les limites à droite  $D^+(s_i^+)$  et  $\hat{D}^+(s_i^+)$  correspondant à un point de discontinuité  $t_i$  de  $r$ . On aura besoin d'observer que

$$(3.2) \quad D^+(s_i^+) = \hat{D}^+(s_i^+) = C^+(t_i) .$$

En effet, soit  $(\tau_n)$  une suite de points de  $I$  tendant vers  $t_i$  par valeurs strictement supérieures. Puisque  $f$  est strictement croissante, les  $f(\tau_n)$  tendent vers  $f^+(t_i) = s_i^+$  par valeurs strictement supérieures.

On déduit alors immédiatement (3.2) de ce que

$$D(f(\tau_n)) = \hat{D}(f(\tau_n)) = C(\tau_n) .$$

De la même manière, si  $t$  est un point de continuité de  $r$  à droite, on a

$$(3.3) \quad D^+(f(t)) = \hat{D}^+(f(t)) = C^+(t) .$$

LEMME 2 : La multiapplication  $D$  admet pour fonction rétraction  $s \mapsto q(s)$  (lipschitzienne de rapport 1).

Démonstration. Établissons d'abord que, pour tout couple d'élément  $s$  et  $s'$  de  $G$  tels que  $s \leq s'$ , on a

$$(3.4) \quad e(D(s), D(s')) \leq q(s') - q(s) .$$

1er cas :  $s$  et  $s'$  appartiennent à  $f(I)$ , c'est à dire qu'il existe  $t$  et  $t'$  dans  $I$ , avec  $t \leq t'$ , tels que  $s = f(t)$ ,  $s' = f(t')$  ; alors

$$e(D(s), D(s')) = e(C(t), C(t')) \leq r(t') - r(t)$$

d'où (3.4) en vertu de (2.2).



2ème cas :  $s' \in f(I)$  et il existe  $t_i$ , point de discontinuité de  $r$  tel que  $s \in [s_i^-, s_i[$ . Alors

$$e(D(s), D(s')) \leq e(D(s), D(s_i)) + e(D(s_i), D(s')).$$

Comme  $s_i \in f(I)$  le dernier terme est majoré par  $q(s') - q(s_i)$  ;  
par ailleurs

$$e(D(s), e(D(s_i))) = e(C(t_i) + (s_i - s)B, C(t_i)) = s_i - s = q(s_i) - q(s).$$

3ème cas :  $s' \in f(I)$  et  $s \in ]s_i, s_i^+]$ .

$$e(D(s), D(s_i^+)) = s_i^+ - s = q(s_i^+) - q(s)$$

et il existe  $t' > t_i$  dans  $I$  tel que  $f(t') = s'$ , donc

$$e(D(s_i^+), D(s')) = e(C^+(t_i), C(t')) \leq r(t') - r^+(t_i)$$

où  $r(t') = q(s')$  et  $r^+(t_i) = q(s_i^+)$ .

4ème cas :  $s \in f(I)$  et  $s' \in [s_i^-, s_i[$ . La définition de  $D(s')$  fait que,  
pour tout  $x$  dans  $H$ ,

$$d(x, D(s')) \leq \max \{0, d(x, C(t_i)) - (s_i - s')\}$$

Donc, en prenant le sup pour  $x$  dans  $D(s) = C(t)$

$$e(D(s), D(s')) \leq \max \{0, \sup_{x \in C(t)} (d(x, C(t_i)) - (s_i - s'))\}$$

$$\leq \max \{0, e(C(t), C(t_i)) - (s_i - s')\}.$$

Or  $s_i - s' = q(s_i) - q(s')$  et

$$e(C(t), C(t_i)) \leq r(t_i) - r(t) = q(s_i) - q(s).$$

5ème cas :  $s \in f(I)$  et  $s' \in ]s_i, s_i^+]$ . Calcul semblable au précédent, en remplaçant  $C(t_i)$  par  $C^+(t_i)$ .



6ème cas :  $s$  et  $s'$  appartiennent l'un et l'autre à  $[s_i^-, s_i[$  ou à  $]s_i, s_i^+]$  : alors (3.4) est banalement une égalité.

Tout autre cas se ramène aux précédents en introduisant un point intermédiaire entre  $s$  et  $s'$  et en invoquant l'inégalité triangulaire pour l'écart  $e$ .

Ayant établi (3.4), on conclut que la multiapplication  $D$  est à rétraction finie lipschitzienne et que pour tout  $s^\#$  dans  $G$

$$(3.5) \quad \text{ret}(D ; s_0, s^\#) \leq q(s^\#) .$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Supposons d'abord  $s^\# \in f(I)$  ; il existe  $t^\# \in I$  tel que  $s^\# = f(t^\#)$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe une suite finie

$$t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t^\#$$

telle que

$$\text{ret}(C ; t_0, t^\#) - \varepsilon < \sum_{k=1}^n e(C(\tau_{k-1}), C(\tau_k))$$

c'est à dire, vu (3.1) et en posant  $\sigma_k = f(\tau_k)$ ,

$$q(s^\#) - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^n e(D(\sigma_{k-1}), D(\sigma_k)) .$$

Comme les  $\sigma_k$  forment une suite croissante dans  $[s_0, s^\#]$  le second membre est majoré par  $\text{ret}(D ; s_0, s^\#)$  ; cela prouve l'égalité en (3.5), puisque  $\varepsilon$  peut être pris arbitrairement petit.

Enfin si  $s^\#$  n'appartient pas à  $f(I)$ , il appartient soit à un intervalle  $]s_i, s_i^+]$ , soit à un intervalle  $[s_i^-, s_i[$ . Dans le premier cas, pour tout  $s \in ]s_i, s^\#]$ , la définition de  $D$  donne banalement

$$\text{ret}(D ; s, s^\#) = s^\# - s = q(s^\#) - q(s)$$

et, comme  $D$  est à rétraction continue, il n'y a qu'à faire tendre  $s$  vers  $s_i$ ,

$$\text{ret}(D ; s_i, s^\#) = q(s^\#) - q(s_i) ;$$



or  $s_i \in f(I)$  ce qui ramène au cas précédent par addition. Dans le dernier cas la définition de  $D$  donne

$$\text{ret}(D ; s_i^-, s^\#) = q(s^\#) - q(s_i^-) .$$

On peut trouver par ailleurs une suite  $(\sigma_j)$  de points de  $f(I)$  tendant vers  $s_i^-$  ;

$$\text{ret}(D ; s_0, \sigma_j) = q(\sigma_j)$$

d'où; par continuité

$$\text{ret}(D ; s_0, s_i^-) = q(s_i^-)$$

ce qui donne encore le résultat attendu, par addition.

Ces lemmes étant établis, voici la conclusion :

PROPOSITION. La solution faible  $u$  du processus de rafle par  $C$  pour la donnée initiale  $a$  est égale à  $v \circ f$ , où  $v : G \rightarrow H$  désigne la solution faible du processus de rafle par  $D$  pour cette même donnée initiale.

En effet, comme  $p \circ f = \text{identité}$ , cela revient à montrer que  $u \circ p \circ f = v \circ f$ , c'est à dire que  $u \circ p$  et  $v$  ont même restriction au sous-ensemble  $f(I)$  de  $G$ . Or  $u \circ p = \hat{v}$  est, d'après le lemme 1, la solution faible du processus de rafle correspondant à la multiapplication  $\hat{D} = C \circ p$ .

Soit  $s^\# \in f(I)$  et soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la définition des solutions faibles des processus de rafle, il existe une partition finie  $P$  de l'intervalle  $[s_0, s^\#]$  en sous-intervalles telle que, si  $v_p$  et  $\hat{v}_p$  désignent les fonctions en escalier construites sur cette partition par l'algorithme de rattrapage, à partir de la même donnée initiale  $a$ , pour les multiapplications respectives  $D$  et  $\hat{D}$ , on a  $|v_p - v| \leq \varepsilon$  et  $|\hat{v}_p - \hat{v}| \leq \varepsilon$  partout dans  $[s_0, s^\#]$  ; et cela sera vrai encore si on remplace  $P$  par toute partition plus fine.



Parmi les intervalles  $[s_i^-, s_i^+]$  associés aux éventuelles discontinuités de  $r$  il en existe au plus un nombre fini  $n$  qui contiennent des origines d'intervalles de  $P$ . Pour alléger l'écriture, supposons que ces intervalles correspondent aux valeurs  $1, 2, \dots, n$  de l'indice  $i$  et que cette indexation s'accorde avec leur succession dans  $[s_0, s^\#]$ . On obtient aussi une partition de l'intervalle  $[s_0, s^\#]$  de la forme

$$[s_0, s_1^-[ , [s_1^-, s_1[ , [s_1, s_1^+], ]s_1^+, s_2^-[ , \dots \\ \dots [s_i^-, s_i[ , [s_i, s_i^+], ]s_i^+, s_{i+1}^-[ \dots ]s_n^+, s^\#]$$

(avec des variantes évidentes dans les éventualités  $s_0 = s_1$  et  $s_n = s^\#$ ). Remplaçons maintenant  $P$  par la partition finie plus fine formée par les intersections des intervalles ci-dessus avec ceux qui constituaient  $P$ . Avec cette nouvelle signification de  $P$ , toute origine d'un intervalle de  $P$ , notons-la  $\sigma$ , qui se trouverait appartenir à un intervalle de la forme  $]s_i^+, s_{i+1}^-[$  est nécessairement l'image par  $f$  d'un point de continuité de  $r$ . Donc  $D(\sigma) = \hat{D}(\sigma)$  et aussi  $D^+(\sigma) = \hat{D}^+(\sigma)$  vu (3.3). En ce qui concerne les membres de  $P$  contenus dans  $]s_i^+, s_{i+1}^-[$  l'algorithme de rattrapage consiste donc en une suite de projections sur les mêmes ensembles convexes fermés, qu'il s'agisse d'appliquer cet algorithme à  $D$  ou à  $\hat{D}$ . On en conclut

$$(3.6) \quad |v_P^-(s_{i+1}^-) - \hat{v}_P^-(s_{i+1}^-)| \leq |v_P^+(s_i^+) - \hat{v}_P^+(s_i^+)|.$$

Etudions maintenant l'algorithme de rattrapage sur  $[s_i^-, s_i[$ . Comme la multiapplication  $\hat{D}$  conserve la valeur constante  $D(s_i)$  sur tout l'intervalle  $[s_i^-, s_i^+]$ , on a

$$\hat{v}_P(s_i) = \hat{v}_P(s_i^-) = \text{proj} (\hat{v}_P^-(s_i^-), D(s_i)).$$

Par ailleurs

$$v_P(s_i^-) = \text{proj} (v_P^-(s_i^-), D(s_i) + (s_i - s_i^-) B)$$



et la propriété de transitivité des projections sur une suite décroissante d'ensembles convexes fermés "parallèles" fait que, finalement

$$v_P(s_i) = \text{proj} (v_P^-(s_i^-), D(s_i)) .$$

Donc

$$(3.7) \quad |v_P(s_i) - \hat{v}_P(s_i)| \leq |v_P^-(s_i^-) - \hat{v}_P^-(s_i^-)| .$$

Enfin il a été vu en (3.2) que  $D^+(s_i^+) = \hat{D}^+(s_i^+) = C^+(t_i)$  ; donc l'algorithme de rattrapage sur  $[s_i, s_i^+]$  fournit,

$$\hat{v}_P^+(s_i^+) = \text{proj} (\hat{v}_P(s_i), C^+(t_i))$$

et, toujours en vertu de la transitivité des projections sur une suite décroissante de convexes fermés parallèles,

$$v_P^+(s_i^+) = \text{proj} (v_P(s_i), C^+(t_i)) .$$

Donc

$$(3.8) \quad |v_P^+(s_i^+) - \hat{v}_P^+(s_i^+)| \leq |v_P(s_i) - \hat{v}_P(s_i)| .$$

Comme  $v_P(s_0) = \hat{v}_P(s_0) = a$ , les inégalités telles que (3.6), (3.7), (3.8) donnent, de proche en proche,  $v_P = \hat{v}_P$  partout dans  $[s_0, s^\#]$ . Par suite  $|v - \hat{v}| \leq 2\varepsilon$  quel que soit  $\varepsilon$ , ce qui démontre la proposition.

#### 4 . FACTORISATION PAR $r$

Si  $u$  est une solution faible du processus de rafle par  $C$ , on sait que

$$(4.1) \quad t \leq t' \Rightarrow |u(t') - u(t)| \leq r(t') - r(t) .$$

L'application croissante  $r : I \rightarrow J$  n'est pas en général injective. L'image réciproque par  $r$  d'un point de  $J$  est a priori un



intervalle, mais (4.1) montre que  $u$  est constante sur cet intervalle ; il existe donc  $w : J \rightarrow H$  assurant la factorisation  $u = w \circ r$ . L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'on peut obtenir  $w$  comme solution faible d'un processus de rafle par un convexe  $E$  à rétraction lipschitzienne dans  $J$ . Toutefois on n'aura pas  $C = E \circ r$ .

Pour tout  $s^* \in G$ , l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $q(s) = q(s^*)$  est un intervalle fermé de  $G$ , donc contenant son origine laquelle sera notée  $\gamma(s^*)$  ; posons

$$(4.2) \quad D^*(s^*) = D(\gamma(s^*))$$

et établissons :

LEMME 1 : La multiapplication  $D^*$  de  $G$  dans  $H$  a même rétraction que  $D$  sur tout intervalle ; les solutions faibles du processus de rafle sont les mêmes pour  $D^*$  et pour  $D$ .

En effet la définition des rétractions sur l'intervalle  $[s_0, s]$  invoque des subdivisions finies de cet intervalle, soit

$$S : s_0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = s.$$

On pose 
$$R(D, S) = \sum_{i=1}^n e(D(\sigma_{i-1}), D(\sigma_i))$$

et définition semblable pour  $R(D^*, S)$ . L'ensemble  $\mathcal{P}$  des subdivisions finies de  $[s_0, s]$ , ordonné par l'inclusion est filtrant à droite et les fonctions  $S \mapsto R(D, S)$ ,  $S \mapsto R(D^*, S)$  sont croissantes ; on devra prendre leurs "sup" ou limites selon l'ordonné filtrant en question.

A partir de toute subdivision telle que  $S$  on peut en construire une autre plus fine, notons-la  $S'$ , en intercalant dans  $S$ , pour tout  $\sigma_i$  qui se trouverait appartenir à un intervalle non nul de constance de  $q$ , l'origine et la fin dudit intervalle (si tant est que cet intervalle possède



bien une fin dans  $[s_0, s]$ ). L'ensemble  $\mathcal{P}'$  des  $S'$  obtenus de cette façon est cofinal dans  $\mathcal{P}$ .

Choisissons  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $S \in \mathcal{P}'$  tel que

$$0 \leq \text{ret}(D ; s_0, s) - R(D, S) \leq \varepsilon .$$

Pour la construction de  $R(D, S)$ , on note que ceux des  $\sigma_{i-1}$  qui se trouvent être les fins d'intervalles non nuls de constance de  $q$  sont en nombre fini  $m \geq 0$  et c'est seulement pour les valeurs correspondantes de  $i$  que  $e(D(\sigma_{i-1}), D(\sigma_i))$  peut différer de  $e(D^*(\sigma_{i-1}), D^*(\sigma_i))$ . Dans chacun des intervalles  $]\sigma_{i-1}, \sigma_i[$  correspondant à ces valeurs de  $i$  on peut trouver  $\sigma'$ , n'appartenant pas à un intervalle non nul de constance de  $q$  et arbitrairement voisin de  $\sigma_{i-1}$ , donc tel que

$$e(D(\sigma_{i-1}), D(\sigma')) \leq \frac{\varepsilon}{m}$$

vu que  $D$  est à rétraction continue. En outre

$$\begin{aligned} e(D^*(\sigma_{i-1}), D^*(\sigma')) &= e(D(\gamma(\sigma_{i-1}), D(\sigma')) \\ &\leq e(D(\gamma(\sigma_{i-1})), D(\sigma_{i-1})) + e(D(\sigma_{i-1}), D(\sigma')) \end{aligned}$$

et le premier terme du dernier membre est nul. Donc, si on appelle  $S''$  la subdivision obtenu en intercalant dans  $S$  les  $m$  points  $\sigma'$  en question, on a

$$0 \leq R(D, S'') - R(D^*, S'') \leq \varepsilon .$$

Comme  $\varepsilon$  peut être pris arbitrairement petit, on conclut que  $D^*$  possède sur  $[s_0, s]$  une rétraction finie égale à  $\text{ret}(D ; s_0, s)$ .

Les solutions faibles de processus de rafle sont, par définition, des limites de fonction localement en escalier. De façon précise, si  $P$  est une partition localement finie de  $G$  en intervalles sur chacun desquels la rétraction de  $D$  ou  $D^*$  (c'est à dire l'oscillation de la fonction



numérique  $q$ ) est moindre qu'un certain  $\alpha > 0$  les fonctions localement en escalier  $v_p$  et  $v_p^*$  associées à cette partition et à la valeur initiale  $a$  par l'"algorithme de rattrapage", approchent respectivement les solutions faibles  $v$  et  $v^*$  des processus de rafle par  $D$  et  $D^*$  avec une erreur moindre que  $2\sqrt{\alpha q(t)}$ . Construisons  $P$  comme image réciproque par  $q$  d'une partition de  $J$  en intervalles de la forme  $[j\alpha, (j+1)\alpha[$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Comme  $q$  est continue croissante, ces images réciproques sont des intervalles contenant leurs origines ; et si une telle origine, soit  $s_j$ , appartient à un intervalle non nul de constance de  $q$ , on a visiblement  $\gamma(s_j) = s_j$ , donc  $D^*(s_j) = D(s_j)$ . Cela montre que les multiapplications localement en escalier  $D_p$  et  $D_p^*$  sont égales, d'où  $v_p = v_p^*$ . Cela aussi petit que soit  $\alpha$ , donc  $v = v^*$ , ce qui achève la démonstration du lemme.

Définissons maintenant une multiapplication  $E$  de  $J$  dans  $H$  : pour tout  $\tau \in J$ , on prend pour  $E(\tau)$  la valeur de  $D$  au début de l'intervalle  $q^{-1}(\tau)$ . Autrement dit  $E$  est la multiapplication fournissant la factorisation

$$(4.3) \quad D^* = E \circ q$$

Alors :

LEMME 2 : La multiapplication  $E$  est à rétraction finie, avec

$$\forall \tau \in J : \text{ret}(E ; 0, \tau) = \tau .$$

Si  $w$  est la solution faible du processus de rafle par  $E$  pour la donnée initiale  $a$ , on a  $v = w \circ q$ .

En effet, soit  $\tau \leq \tau'$  dans  $J$  ; soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  les débuts des intervalles  $q^{-1}(\tau)$  et  $q^{-1}(\tau')$  ; puisque  $q$  est fonction rétraction de  $D$ , on a

$$e(E(\tau), E(\tau')) = e(D(\sigma), D(\sigma')) \leq q(\sigma') - q(\sigma) = \tau' - \tau$$



On en tire que la rétraction de  $E$  surtout sous-intervalle de  $J$  est majorée par la longueur de cet intervalle. Mais alors la théorie du changement de variable continu croissant s'applique à (4.3) ; de la sorte, si on note  $\rho$  la fonction  $\tau \mapsto \text{ret}(E ; 0, \tau)$ , pour  $D^*$  la fonction rétraction nulle en  $s_0$  est  $\rho \circ q$ . Bref  $\rho \circ q = q$  et comme  $q$  est surjective, cela montre que  $\rho$  est l'identité. De même la théorie du changement de variable continu croissant donne  $v^* = w \circ q$  et cela achève d'établir le lemme, puisque  $v = v^*$ .

On a alors

PROPOSITION. La solution  $u$  du processus de rafle par  $C$  pour la donnée initiale  $u(t_0)=a$  est égale à  $w \circ r$ .

On a vu en effet au paragraphe 3 que  $u = v \circ f$  ; donc  $u = w \circ q \circ f$  ; or  $q \circ f = r$ .

REMARQUE. Vu (2.2), (4.2), (4.3) on a

$$E \circ r = E \circ q \circ f = D^* \circ f = D \circ \gamma \circ f.$$

Il peut être utile d'avoir une interprétation plus directe de l'ensemble  $E(r(t))$ . Pour chaque  $t \in I$ , l'ensemble

$$L(t) = \{\theta \in I : r(\theta) = r(t)\}$$

est un intervalle non vide.

Si cet intervalle est réduit à un point on a évidemment  $\gamma(f(t)) = f(t)$

donc  $E(r(t)) = C(t)$ . Supposons maintenant que  $L(t)$  soit un intervalle non nul et notons  $\delta(t)$  son origine. Si  $\delta(t) \in L(t)$ , c'est que la fonction  $r$  est continue à droite au point  $\delta(t)$  ; alors, même si  $\delta(t)$  est un point de discontinuité  $t_i$  de  $r$ , l'intervalle  $]s_i, s_i^+]$  correspondant est vide,



d'où  $\gamma(f(t)) = s_i$  donc  $E(r(t)) = D(s_i) = C(\delta(t))$ . Si enfin  $\delta(t) \notin L(t)$ , ce point est un point de discontinuité  $t_i$  de  $r$  avec  $]s_i, s_i^+]$  non vide et  $\gamma(f(t)) = s_i^+$  ; donc dans ce cas  $E(r(t)) = D(s_i^+) = C^+(\delta(t))$ .

#### REFERENCES

- [1] Ch. CASTAING. Version aléatoire du problème de rafle par un convexe, Séminaire d'Analyse Convexe, Vol IV, 1974, exp. n° 1 (11 p.), résumé dans : C.R.Acad. Sci., Ser. A, 277 (1973), 1057-1059.
- [2] J.J. MOREAU. Rafle par un convexe variable, 1ère partie, Séminaire d'Analyse Convexe, vol. I, (1971), exp. n° 15 (42p.) ; 2ème partie, ibid. vol II (1972), exp. n° 3 (36 p.) ; résumé dans C.R.Acad. Sci. , Ser. A, 276 (1973), 791-794.
- [3] - Rétraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, vol. II (1972) exp. n° 13 (90 p.) ; résumé dans C.R.Acad. Sci., Ser. A, 276 (1973), 791-794.  
Voir aussi article à paraître dans : Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.