



HAL
open science

Compléments sur les multiapplications à rétraction finie

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Compléments sur les multiapplications à rétraction finie. 1974. <hal-02309485>

HAL Id: hal-02309485

<https://hal.science/hal-02309485v1>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1974 Exposé n° 9

COMPLEMENTS SUR LES MULTIAPPLICATIONS

A RETRACTION FINIE

par

J.J. MOREAU

1 . INTRODUCTION

La théorie de la rétraction d'une multiapplication définie sur un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace métrique (E,d) , a été présentée, avec ses motivations dans un précédent rapport de ce Séminaire (MOREAU [1], référence désignée dans la suite par l'abréviation RM). Nous en reprenons les notations.

L'objectif principal était d'obtenir, pour les multiapplications à rétraction finie, une propriété d'approximation par des multiapplications localement en escalier ; de cette propriété d'approximation on tirait un théorème de sélection et un théorème d'existence pour un problème d'évolution formulée dans un espace hilbertien réel.

Après diverses considérations générales, des résultats substantiels ne pouvaient être obtenus qu'en introduisant l'une ou l'autre de deux hypothèses mettant en relief certaines compacités.

Reçu le 12 Avril 1974.

HYPOTHESE H_1 : L'espace métrique E est tel que les boules fermées soient compactes.

Un tel espace est évidemment complet et localement compact ;
exemple usuel : \mathbb{R}^n (qui rentre aussi bien d'ailleurs dans le cas suivant).

HYPOTHESE H_2 : L'espace E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X et les valeurs de la multiapplication A sont fermées pour la topologie faible $\sigma(E, X)$.

C'est dans ce dernier cas la compacité faible des boules de E qui joue le rôle crucial ; exemple usuel : espace de Banach réflexif, en particulier espace hilbertien.

Il est naturel d'examiner si des résultats analogues ne peuvent pas être obtenus en reportant l'hypothèse de compacité sur les valeurs de la multiapplication A elle-même. La section 2 du présent rapport reprend donc la théorie des approximantes localement en escalier en supposant :

HYPOTHESE H_3 : L'espace E est complet et les valeurs de la multiapplication A sont compactes.

On en tire un théorème de sélection pour les multiapplications à rétraction finie, à valeurs compactes dans un espace métrique quelconque.

La mise en oeuvre du théorème de Tychonoff pour établir ce théorème de sélection est assez différente de ce qui était fait dans le rapport précédent.

L'idée directrice sera de remplacer les fonctions définies sur I par des fonctions définies sur un ensemble de "germes" ou "début" de sous-intervalles de I .

Il paraîtrait naturel pour faire pendant à l'hypothèse H_2 d'examiner aussi le cas :

HYPOTHESE H_4 : L'espace E est un espace de Banach et les valeurs de la multiapplication A sont faiblement compactes.

En fait on montre au § 2.e que cette hypothèse ne mérite pas un traitement autonome : elle se ramène à l'hypothèse H_2 par immersion dans le bidual de E.

Tout ce qui précède fait jouer un rôle fondamental à la notion de limite d'une multiapplication à rétraction finie à droite d'un point. Les limites à gauche, n'ayant pas d'utilisation immédiate, n'avaient été étudiées que sommairement dans RM. Elles font l'objet de la section 3 du présent rapport. On montre d'abord que, si A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$ on a

$$\lim_{t \uparrow t_1} \inf A(t) = \lim_{t \uparrow t_1} \sup A(t) ;$$

cette valeur commune (éventuellement vide) est notée $A^-(t_1)$.

Des propriétés assez analogues à celles des limites à droite sont établies. Les résultats substantiels ne reposent pas sur des considérations de compacité, mais seulement sur l'hypothèse additionnelle que E soit complet ; dans cette hypothèse, on trouve en particulier que $A^-(t_1)$ est non vide dès que A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, à valeurs non vides.

La section 4 établit des liens entre les notions de rétraction, d'expansion et de variation d'une multiapplication (cette dernière notion étant entendue au sens de la distance de Hausdorff). On montre comment la connaissance des deux fonctions rétraction indéfinie et expansion indéfinie de la multiapplication A permet de déterminer celle de la fonction variation indéfinie de A.

2 . MULTIAPPLICATIONS A VALEURS COMPACTES ET THEOREME
DE SELECTION

2.a. Limite à droite

PROPOSITION. On suppose que l'espace métrique (E, d) est complet et que la multiapplication A est à rétraction bornée sur l'intervalle $]t_1, t_2]$, à valeurs précompactes non vides. Alors l'ensemble limite à droite $A^+(t_1)$ est compact non vide et, pour toute partie B de E , on a

$$(2.1) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = e(B, A^+(t_1)) .$$

Démonstration. On observe d'abord que

$$e(B, A(t)) \leq e(B, A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t))$$

et que le dernier terme a pour limite zéro, d'après RM, lemme 5.c ; donc

$$(2.2) \quad \limsup_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) \leq e(B, A^+(t_1))$$

(inégalité banale si $A^+(t_1) = \emptyset$).

Considérons d'autre part une suite infinie décroissante (τ_n) d'éléments de $]t_1, t_2]$ tendant vers t_1 et montrons que l'ensemble

$$K = \text{adh} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(\tau_n)$$

est compact. Comme E est complet, il suffit de montrer que la réunion des $A(\tau_n)$ est précompacte, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, cette réunion peut être recouverte par une famille finie de boules de rayon ε . De fait, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $r(\tau_m) - r^+(t_1) < \frac{\varepsilon}{2}$; alors, pour tout $n \geq m$ on a

$$e(A(\tau_n), A(\tau_m)) \leq r(\tau_m) - r(\tau_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'après l'hypothèse, on peut recouvrir $A(\tau_m)$ par une famille finie de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x \in A(\tau_n)$, $n \geq m$, on a $d(x, A(\tau_m)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$;

donc x est contenu dans une des boules de rayon ε concentriques aux précédentes ; ainsi est recouverte la réunion des $A(\tau_n)$, $n \geq m$; par ailleurs les $A(\tau_n)$, $n < m$, sont une famille finie d'ensembles précompacts de sorte que leur réunion est couverte aussi par une famille finie de boules de rayon ε .

Comme tout point de $A^+(t_1)$ est limite d'une sélection de A , cet ensemble est une partie (fermée) de K , donc est compact. Il est d'ailleurs non vide : par exemple, en choisissant un x_n dans chaque $A(\tau_n)$ on obtient une suite de points de K ; toute valeur d'adhérence de cette suite appartient à

$$\limsup_{t \downarrow t_1} A(t) = A^+(t_1) .$$

Enfin, soit b un point de E ; établissons l'inégalité

$$(2.3) \quad \liminf_{t \downarrow t_1} d(b, A(t)) \geq d(b, A^+(t_1)) .$$

Comme $A^+(t_1)$ est non vide, (2.2) montre que le premier membre est majoré.

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ strictement supérieur à ce premier membre, c'est-à-dire

$$\forall \theta \in]t_1, t_2], \exists t \in]t_1, \theta], \exists x(t) \in A(t) : \rho > d(b, x(t)).$$

Il existe alors une suite infinie décroissante (τ_n) d'éléments de $]t_1, t_2]$ tendant vers t_1 et une suite (x_n) d'éléments de E tels que $x_n \in A(\tau_n) \cap \beta$, en appelant β la boule fermée de centre b , de rayon ρ . Avec la même notation que plus haut, la suite (x_n) prend ses valeurs dans l'ensemble compact $K \cap \beta$; elle possède donc une valeur d'adhérence, soit x , dans cet ensemble ; comme $x \in A^+(t_1)$ on a $\rho \geq d(b, A^+(t_1))$ et cela prouve (2.3).

En passant au "sup", pour $b \in B$, (2.3) entraîne

$$\liminf_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) \geq e(B, A^+(t_1)) .$$

Par rapprochement avec (2.2), cela établit (2.1).

De la proposition précédente, on tire, en rapprochant de RM, Proposition 5.d :

COROLLAIRE. Si E est complet et si A est à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$, à valeurs précompactes, avec $A(t_1) \neq \emptyset$, l'ensemble $A^+(t_1)$ est compact non vide et l'on a

$$(2.4) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) = e(A(t_1), A^+(t_1))$$

2.b. Approximantes localement en escalier

On reprend les notions présentées dans RM, Section 6.

On considère toujours un intervalle I de \mathbb{R} , contenant son origine t_0 , non nécessairement fermé ni borné. On note $\mathfrak{P}(I)$ l'ensemble des partitions de I en sous-intervalles de forme quelconque (certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) partitions qui soient localement finies:

Un élément P de $\mathfrak{P}(I)$ est donc une suite finie ou non d'intervalles

$$P : I_0, I_1, \dots, I_i, \dots$$

indexés conformément à leur succession dans \mathbb{R} ; on note t_i l'origine de I_i , appartenant ou non à cet intervalle (évidemment l'origine de I_0 est aussi l'origine de I , déjà notée t_0 , et elle appartient à I_0).

Pour P et P' dans $\mathfrak{P}(I)$, on écrit $P \preccurlyeq P'$ si P' est plus fine que P (ou est un raffinement de P), c'est-à-dire si tout intervalle de P' est contenu dans un intervalle de P ; ainsi est défini sur $\mathfrak{P}(I)$ un ordre filtrant à droite.

Si A est une multiapplication à rétraction finie (ou plus généralement, possédant une limite à droite en tout point) de I dans E , on note A_p la multiapplication localement en escalier qui prend sur chaque

intervalle I_i de P la valeur constante déterminée comme suit :

$$A_P(I_i) = \begin{cases} A(t_i) & \text{si } t_i \in I_i \\ A^+(t_i) & \text{si } t_i \notin I_i \end{cases} .$$

Par les mêmes raisonnements que dans RM, § 6.c l'égalité (2.4) ci-dessus permet d'établir :

PROPOSITION. On suppose que l'espace (E, d) est complet, que la multiapplication A est à rétraction finie sur I , à valeurs précompactes, avec $A(t_0) \neq \emptyset$. Soit $P \in \mathcal{P}(I)$ une partition sur chaque intervalle de laquelle l'oscillation de la fonction r (rétraction de A) est $\leq \varepsilon$. Alors la multiapplication A_P est à valeurs précompactes non vides et vérifie :

$$(2.5) \quad \forall t \in I : e(A_P(t), A(t)) \leq \varepsilon$$

$$(2.6) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{ret}(A_P; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t) + \varepsilon$$

$$(2.7) \quad \forall t \in I : \text{ret}(A_P; t_0, t) \leq \text{ret}(A; t_0, t) .$$

Rappelons que, pour obtenir $P \in \mathcal{P}(I)$ satisfaisant à l'hypothèse, il suffit de prendre les images réciproques par r des membres d'une partition localement finie de \mathbb{R} en sous-intervalles de longueur $\leq \varepsilon$. Evidemment tout raffinement de P satisfait encore la même condition.

2.c. L'ensemble des débuts.

Introduisons maintenant un langage utile pour la suite.

On dira que deux sous-intervalles non vides J et J' de I ont même début s'ils ont même origine et, tous les deux, soit contiennent soit excluent cette origine. Il s'agit visiblement là d'une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-intervalles de I : l'ensemble quotient correspondant

s'appellera ensemble des débuts associé à I et noté $D(I)$. A chaque élément b de $D(I)$ correspond, non injectivement, l'élément t de I , origine de tout intervalle J représentant la classe d'équivalence b : On dira que t est l'origine de b ; et, naturellement, on dira que b est le début de J .

On munit $D(I)$ d'une relation d'ordre total : b et b' désignant deux éléments de cet ensemble, on écrira $b \leq b'$ s'il existe un intervalle de début b' contenu dans un intervalle de début b . Soient t et t' , éléments de I , les origines respectives de b et b' ; la relation $b \leq b'$ équivaut à : $t \leq t'$ et, si $t = t'$ et $b \neq b'$, l'élément b est un "début fermé".

Soit f une application (resp. multiapplication) définie sur I et possédant, en chaque point t de I , une limite à droite notée $f^+(t)$. On construit une extension \hat{f} de f à $D(I)$ en posant, pour tout $b \in D(I)$, d'origine t ,

$$\hat{f}(b) = \begin{cases} f(t) & \text{si } b \text{ est un "début fermé"} \\ f^+(t) & \text{si } b \text{ est un "début ouvert"} \end{cases}.$$

Si, par exemple, f est une fonction numérique croissante (au sens large) pour l'ordre de I , l'extension \hat{f} est croissante (au sens large) pour l'ordre de $D(I)$.

PROPOSITION. On suppose que E est complet et que A est à rétraction finie sur I à valeurs compactes. Alors pour b et b' dans $D(I)$ on a l'implication

$$(2.8) \quad b \leq b' \Rightarrow e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b).$$

Démonstration. Soient t et t' les origines respectives de b et b' .

Si b et b' sont des débuts fermés, (2.8) se réduit à une propriété banale

de $\text{ret}(A ; t, t')$. Si b est ouvert et b' fermé, on a quel que soit $\tau \in]t, t']$,

$$\begin{aligned} e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) &= e(A^+(t), A(t')) \leq e(A^+(t), A(\tau)) + e(A(\tau), A(t')) \\ &\leq e(A^+(t), A(\tau)) + r(t') - r(\tau) . \end{aligned}$$

Lorsque $\tau \downarrow t$ le premier terme du dernier membre tend vers zéro (cf. RM, proposition 5.c) et $r(\tau)$ tend vers $r^+(t) = \hat{r}(b)$, d'où encore (2.8). C'est seulement lorsque b' est ouvert que la compacité des valeurs de A et l'hypothèse que E est complet entrent en jeu. Dans ce cas, soit b'' le début fermé de même origine t' que b' ; on a $b \leq b'' < b$ et

$$e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leq e(\hat{A}(b), \hat{A}(b'')) + e(\hat{A}(b''), \hat{A}(b')) .$$

Le premier terme du second membre rentre dans les cas qu'on vient d'examiner, donc est majoré par $\hat{r}(b'') - \hat{r}(b)$, tandis que, d'après (2.4) le dernier terme est égal à

$$e(A(t'), A^+(t')) = r^+(t') - r(t') = \hat{r}(b') - \hat{r}(b'') ,$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. L'ensemble $D(I)$ pourrait aussi être présentée d'une autre manière, susceptible de généralisations utiles ; un élément b de $D(I)$ consiste en un élément t de I , affecté d'une virtualité choisie parmi deux possibles : la virtualité "début fermé" et la virtualité "début ouvert". Notant V l'ensemble de ces deux virtualités, on a donc $D(I) = I \times V$. On ordonne V en posant que la virtualité "début fermée" est plus petite que la virtualité "début ouvert" : l'ordre de $D(I)$ est alors le produit lexicographique des ordres de I et de V .

On peut appliquer la même idée, par exemple, à l'étude des applications de \mathbb{R} dans un espace topologique E , soit f , qui possèdent, outre leur valeur $f(t)$ en

chaque point $t \in \mathbb{R}$, une valeur limite à gauche et une valeur limite à droite, notées $f^-(t)$ et $f^+(t)$. On considérera alors un ensemble totalement ordonné V de trois virtualités nommées "gauche", "actuelle" et "droite". Une telle fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ engendre de façon naturelle une extension $\hat{f} : \mathbb{R} \times V \rightarrow E$; pour tout $b = (t, v)$ appartenant à cet ensemble produit, on pose

$$\hat{f}(b) = \begin{cases} f^-(t) & \text{si } v = \text{gauche} \\ f(t) & \text{si } v = \text{actuelle} \\ f^+(t) & \text{si } v = \text{droite} \end{cases} .$$

Lorsque, par exemple, $E = \mathbb{R}$ et que f est une fonction numérique croissante (au sens large), la fonction \hat{f} est croissante (au sens large) sur $\mathbb{R} \times V$ muni de l'ordre produit lexicographique.

2.d. Théorème de sélection

PROPOSITION. Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant son origine t_0 ; soit $t \mapsto A(t)$ une multiapplication de I dans l'espace métrique E , à valeurs compactes, à rétraction finie. Alors, pour tout $u_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $u : I \rightarrow E$ de A telle que $u(t_0) = u_0$ et telle que, pour tout sous-intervalle $[s, t] \subset I$ on ait

$$(2.9) \quad \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) .$$

Démonstration. Le plongement de E dans son complété étant une isométrie, on peut faire la démonstration en supposant E complet.

L'énoncé est sans objet si $A(t_0)$ est vide; on suppose donc $A(t_0) \neq \emptyset$, d'où $A(t) \neq \emptyset$ pour tout $t \in I$.

D'après le paragraphe 2.b, pour tout entier $n > 0$ il existe une partition $P(n) \in \mathcal{S}(I)$ telle que

$$(2.10) \quad \forall t \in I : e(A_{P(n)}(t), A(t)) \leq \frac{1}{n} .$$

$$(2.11) \quad \forall [s,t] \subset I : \text{ret}(A_{P(n)} ; s,t) \leq \text{ret}(A ; s,t) + \frac{1}{n} .$$

Utilisant le fait que l'ordre de $\mathcal{P}(I)$ est filtrant à droite, on peut obtenir que la suite des partitions $P(n)$ soit croissante. Alors si $b \in D(I)$ est, au sens du paragraphe précédent, le début d'un des intervalles constituant la partition $P(n_0)$, cet élément b est aussi pour tout $n \geq n_0$ le début d'un des intervalles de $P(n)$. Notons $B \subset D(I)$ l'ensemble des débuts de tous les intervalles des $P(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$: chaque $b \in B$ figure aussi comme début d'intervalle pour tous les $P(n)$ à partir d'un certain rang.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, construisons une fonction localement en escalier u^n , prenant sur chaque intervalle de $P(n)$ une valeur constante déterminée par la récurrence suivante : on note $I_0^n, I_1^n, \dots, I_i^n, \dots$ les intervalles constituant $P(n)$, ordonnés conformément à leur succession dans \mathbb{R} . On prend $u^n(I_0^n) = u_0$ puis, de proche en proche, $u^n(I_{i+1}^n)$ est choisi dans $A_{P(n)}(I_{i+1}^n)$ de manière que

$$(2.12) \quad d(u^n(I_i^n), u^n(I_{i+1}^n)) = d(u^n(I_i^n), A_{P(n)}(I_{i+1}^n)) .$$

Un tel choix est possible parce que les valeurs des $A_{P(n)}$ sont compactes non vides en vertu de la Proposition 2.a.

A partir de u^n on définit comme suit une fonction v^n sur l'ensemble B : si $b \in B$ est le début d'un des intervalles de $P(n)$, on prend pour $v^n(b)$ la valeur de u^n sur cet intervalle ; sinon, on prend pour $v^n(b)$ un élément arbitraire de l'ensemble $\hat{A}(b)$ (selon la notation posée au paragraphe précédent, \hat{A} représente l'extension de A à l'ensemble des débuts). Bref v^n est une sélection de \hat{A} et, si b et b' sont les débuts de deux intervalles consécutifs de $P(n)$, il résulte de (2.8) et de (2.12) que

$$\begin{aligned} d(v^n(b), v^n(b')) &= d(v^n(b), \hat{A}(b')) \\ &\leq e(\hat{A}(b), \hat{A}(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b) . \end{aligned}$$

Par addition on trouve que cette même inégalité

$$(2.13) \quad d(v^n(b), v^n(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b)$$

est vraie encore si $b \leq b'$ sont les débuts de deux intervalles quelconques de $P(n)$.

Toute sélection de \hat{A} peut s'interpréter comme un élément de l'espace produit

$$\prod_{b \in B} \hat{A}(b)$$

lequel, muni de la topologie produit, est compact, d'après Tychonoff. Pour cette topologie produit, la suite (v^n) possède donc au moins une valeur d'adhérence, soit v . Montrons que $v : B \rightarrow E$ est une fonction telle que

$$(2.14) \quad b \leq b' \Rightarrow d(v(b), v(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b) .$$

Soit $\epsilon > 0$; puisque v est valeur d'adhérence des v^n , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$d(v(b), v^n(b)) \leq \epsilon$$

$$d(v(b'), v^n(b')) \leq \epsilon$$

et cet n peut être pris assez grand pour que b et b' , supposés fixés, soient les débuts d'intervalles de $P(n)$. Vu (2.13) on obtient donc

$$d(v(b), v(b')) \leq \hat{r}(b') - \hat{r}(b) + \epsilon$$

d'où (2.14) puisque ϵ peut être choisi arbitrairement.

A partir de v on construit maintenant la fonction $u : I \rightarrow E$ attendue. Soit $t \in I$; soit $b_n \in B$ le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t . D'après la construction de $P(n)$, l'oscillation de r sur cet intervalle est $\leq \frac{1}{n}$, d'où

$$(2.15) \quad 0 \leq r(t) - \hat{r}(b_n) \leq \frac{1}{n} .$$

En rapprochant de (2.14), on conclut que la suite des $v(b_n)$ est de Cauchy dans E ; soit $u(t)$ sa limite.

Montrons que $u(t) \in A(t)$. Comme $v(b_n) \in \hat{A}(b_n)$ on a, vu (2.15),

$$d(v(b_n), A(t)) \leq e(\hat{A}(b_n), A(t)) \leq r(t) - \hat{r}(b_n) \leq \frac{1}{n} ;$$

donc , à la limite, $d(u(t), A(t)) = 0$.

Enfin pour établir (2.9), il suffit de prouver que, pour tout sous-intervalle compact $[t, t']$ de I , on a

$$d(u(t), u(t')) \leq r(t') - r(t) .$$

Avec la même définition de b_n que ci-dessus et en notant par ailleurs b'_n le début de l'intervalle de $P(n)$ contenant t' (évidemment $b_n \leq b'_n$ puisque $t \leq t'$), on applique (2.13) :

$$d(v^n(b_n), v^n(b'_n)) \leq \hat{r}(b'_n) - \hat{r}(b_n) .$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, le premier membre tend vers $d(u(t), u(t'))$, d'après la définition de u ; le second membre tend vers $r(t') - r(t)$, d'après (2.15).

2.e. Multiapplication à valeurs faiblement compactes dans un espace de Banach.

La théorie développée dans RM était présentée sous deux versions parallèles, reposant l'une et l'autre sur une hypothèse de compacité des boules fermées de E : dans la première version il s'agissait de compacité pour la topologie métrique de E ; dans la seconde. E était l'espace de Banach dual d'un espace normé X de sorte que les boules fermées étaient compactes pour la topologie faible $\sigma(E, X)$.

Dans le présent rapport l'hypothèse de compacité ne concerne plus les boules de l'espace E , mais les valeurs de la multiapplication A . Par analogie avec RM, il est naturel d'examiner si, dans le cas où E est

un espace de Banach, on peut se contenter d'une compacité faible. Au lieu de reprendre les raisonnements qui précèdent dans ce nouveau contexte, il sera plus expéditif de se ramener aux résultats de RM eux-mêmes.

PROPOSITION. On suppose que E est un espace de Banach et que A est à valeurs faiblement compactes.

Si la multiapplication A est à rétraction finie sur l'intervalle $[t_1, t_2]$; à valeurs non vides, l'ensemble $A^+(t_1)$ est faiblement compact non vide et la double égalité (2.4) a lieu.

Si A est à rétraction finie sur l'intervalle I (contenant son origine t_0) la propriété d'approximation formulée dans la Proposition 2.b ci-dessus est vraie, ainsi que la propriété de sélection formulée dans la Proposition 2.d .

En effet, appelons X le dual topologique de l'espace de Banach E et interprétons l'injection canonique de E dans le dual topologique E'' de X comme un plongement. Les résultats de RM s'appliquent à E'' , puisqu'il est le dual de l'espace normé X . La multiapplication A peut aussi bien s'interpréter comme prenant ses valeurs dans E'' , avec la même signification de l'excès et de la rétraction, puisque le plongement de E dans E'' est isométrique. Comme E est fermé dans E'' pour la topologie de la norme, l'ensemble $A^+(t_1)$ est aussi le même dans les deux points de vue. La topologie $\sigma(E'', X)$ induit sur E la topologie faible $\sigma(E, X)$; comme les $A(t)$ sont supposés compacts pour cette dernière, il sont aussi bien compacts pour la première, donc fermés. Les énoncés de RM s'appliquent; en particulier $A^+(t_1)$ est fermé pour $\sigma(E'', X)$; l'inégalité

$$e(A^+(t_1), A(t_2)) \leq r(t_2) - r^+(t_1)$$

entraîne que, comme $A(t_2)$, cet ensemble est borné, donc compact pour $\sigma(E'', X)$

et finalement compact pour $\sigma(E, X)$ puisqu'il est contenu dans E .

COROLLAIRE. On suppose que E est un espace vectoriel normé, non nécessairement complet et on appelle X son dual. On suppose que la multiapplication A , à rétraction finie de I dans E , a ses valeurs compactes pour la topologie $\sigma(E, X)$. Alors pour tout $u_0 \in A(t_0)$, il existe une sélection $u : I \rightarrow E$ de A telle que $u(t_0) = u_0$ et que, pour tout $[s, t] \subset I$, on ait

$$\text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(A; s, t).$$

On observe en effet que le plongement de E dans son complété \hat{E} est une isométrie et que X est aussi bien le dual de \hat{E} . Les valeurs de A s'interprètent donc comme des parties de \hat{E} , compactes pour la topologie $\sigma(\hat{E}, X)$ et la proposition ci-dessus s'applique.

3 . LIMITES A GAUCHE

3.a. Existence

PROPOSITION. Si A est une multiapplication à rétraction bornée d'un intervalle $[t_0, t_1[$ dans un espace métrique E, on a

$$\liminf_{t \uparrow t_1} A(t) = \limsup_{t \uparrow t_1} A(t) .$$

NOTATION. La valeur commune (éventuellement vide) de ces deux ensembles sera notée $A^-(t_1)$ et appelée limite à gauche de la multiapplication A au point t_1 .

Démonstration. Il suffit de montrer que \limsup est contenu dans \liminf . Soit $a \in \limsup$, ce qui signifie que zéro est valeur d'adhérence de la fonction $t \mapsto d(a, A(t))$ pour $t \uparrow t_1$. Puisque la fonction croissante r est majorée, elle possède à gauche de t_1 une limite finie $r^-(t_1)$, ce qui entraîne que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\theta \in [t_0, t_1[$ assurant l'implication

$$[\sigma, \tau] \subset [\theta, t_1[\Rightarrow r(\tau) - r(\sigma) \leq \frac{\epsilon}{2} .$$

Vu l'hypothèse faite sur a , il existe $\sigma \in [\theta, t_1[$ tel que

$$d(a, A(\sigma)) \leq \frac{\epsilon}{2} .$$

Alors, pour tout $\tau \in [\sigma, t_1[$, on a

$$\begin{aligned} d(a, A(\tau)) &\leq d(a, A(\sigma)) + e(A(\sigma), A(\tau)) \\ &\leq d(a, A(\sigma)) + r(\tau) - r(\sigma) \leq \epsilon . \end{aligned}$$

Cela prouve que zéro est limite de la fonction $t \mapsto d(a, A(t))$ pour $t \uparrow t_1$, c'est-à-dire $a \in \liminf$.

REMARQUE. Le cas le plus usuel est celui où A est définie au moins sur l'intervalle fermé $[t_0, t_1]$ et à rétraction finie ; alors elle est évidemment à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$. Inversement on a vu dans RM, § 4, b, que si A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$ on peut toujours la prolonger en une multiapplication A^* à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$: prendre par exemple $A^*(t_1) = E$ (ce qui donne d'ailleurs une multiapplication A^* à rétraction continue à gauche au point t_1). Noter que la condition $e(A^-(t_1), A^*(t_1)) < +\infty$ est nécessaire (en vertu du § 3.b, ci-après) pour que A^* soit à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$. Mais cette condition n'est pas suffisante (à moins que E ne soit complet ; cf. § 3.c ci-après, corollaire 4). Contre exemple : prendre pour E le complémentaire dans \mathbb{R}^2 de la demi-droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x=0, y \leq 0\}$; prendre, pour $t \in [t_0, t_1[, A(t) = \{(x, y) \in E : x = t - t_1\}$ et, par ailleurs, $A^*(t_1) = \{(x, y) \in E : x=1, y \geq 0\}$.

Le schéma d'implications est donc différent de celui qu'on rencontre lorsqu'on étudie la possibilité de prolonger une multiapplication A , à rétraction bornée sur un intervalle ouvert à gauche $]t_1, t_2]$ en une multiapplication A^* , à rétraction finie sur l'intervalle fermé $[t_1, t_2]$: cette fois la condition $e(A^*(t_1), A^+(t_1)) < +\infty$ est suffisante mais non nécessaire pour que A^* soit à rétraction finie sur $[t_1, t_2]$.

3.b. Saut de r à gauche de t_1 .

PROPOSITION. Si A est à rétraction finie sur l'intervalle compact $[t_0, t_1]$, on a

$$(3.1) \quad e(A^-(t_1), A(t_1)) \leq r(t_1) - r^-(t_1) = \lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), A(t_1))$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; d'après la définition de la rétraction, il existe une subdivision

$$t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1$$

telle que

$$\text{ret}(A ; t_0, t_1) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) .$$

Si $t \in [\tau_{n-1}, t_1]$, il en résulte par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \text{ret}(A ; t_0, t_1) &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) + e(A(\tau_{n-1}), A(t)) + e(A(t), A(t_1)) \\ &\leq \varepsilon + \text{ret}(A ; t_0, t) + e(A(t), A(t_1)) . \end{aligned}$$

Bref

$$t \in [\tau_{n-1}, t_1] \Rightarrow e(A(t), A(t_1)) + \varepsilon \geq \text{ret}(A ; t, t_1) .$$

Comme par ailleurs

$$e(A(t), A(t_1)) \leq \text{ret}(A ; t, t_1)$$

et que $\text{ret}(A ; t, t_1)$ possède, pour $t \uparrow t_1$, une limite égale à $r(t_1) - r^-(t_1)$ cela prouve l'existence de la limite de $e(A(t), A(t_1))$ et l'égalité des deux derniers membres de (3.1).

L'inégalité en (3.1) résulte de ce que tout $a \in A^-(t_1)$ est la limite pour $t \uparrow t_1$ d'une sélection $t \mapsto x(t) \in A(t)$. Or

$$d(x(t), A(t_1)) \leq e(A(t), A(t_1))$$

donc

$$d(a, A(t_1)) = \lim_{t \uparrow t_1} d(x(t), A(t_1)) \leq \lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), A(t_1)) .$$

COROLLAIRE. Si la fonction r est continue à gauche au point t_1

(ce qui équivaut à $\lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), A(t_1)) = 0$) on a

$$(3.2) \quad A^-(t_1) \subset \text{adh } A(t_1) .$$

Remarque : On aura besoin, au § 3.c ci-après, de supposer E complet pour obtenir inversement que (3.2) implique la continuité de r à gauche de t_1 . Au contraire, dans la situation similaire concernant les limites à droite (cf. RM § 5.c), on avait quel que soit l'espace E , l'équivalence entre la continuité de r à droite de t_1 et l'inclusion $A(t_1) \subset A^+(t_1)$ (cela, bien que l'égalité entre $e(A(t_1), A^+(t_1))$ et $r^+(t_1) - r(t_1)$ soit, elle aussi, subordonnée à des hypothèses complémentaires).

3.c. Cas où E est complet.

PROPOSITION. Si l'espace E est complet et si A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on a pour tout $t \in [t_0, t_1[$

$$(3.3) \quad e(A(t), A^-(t_1)) \leq r^-(t_1) - r(t) .$$

Démonstration. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ strictement supérieur au second membre de (3.3) et soit $a \in A(t)$ (si $A(t) = \emptyset$ l'inégalité est triviale); on va montrer que ρ est supérieur ou égal à $d(a, A^-(t_1))$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\rho - \alpha > r^-(t_1) - r(t) .$$

Soit (β_n) une suite infinie de réels > 0 tels que $\sum \beta_n = \alpha$; soit (τ_n) une suite infinie croissante d'éléments de $[t, t_1[$ avec $\tau_0 = t$ et $\lim \tau_n = t_1$. On construit par récurrence une suite infinie (x_n) d'éléments de E , telle que $x_0 = a$, $x_n \in A(\tau_n)$ et que

$$(3.4) \quad d(x_{n-1}, x_n) \leq r(\tau_n) - r(\tau_{n-1}) + \beta_n$$

Une telle suite existe puisque $x_{n-1} \in A(\tau_{n-1})$ implique

$$d(x_{n-1}, A(\tau_n)) \leq e(A(\tau_{n-1}), A(\tau_n)) \leq r(\tau_n) - r(\tau_{n-1}) .$$

Cette suite est de Cauchy car (3.4) entraîne, si $p \leq q$ sont deux entiers positifs,

$$(3.5) \quad d(x_p, x_q) \leq r(\tau_q) - r(\tau_p) + \sum_{m=p+1}^q \beta_m .$$

La limite x_∞ des x_n appartient à $A^-(t_1)$ et, vu (3.5), donne

$$d(x_0, x_\infty) \leq r^-(t_1) - r(t) + \alpha < \rho .$$

Donc

$$d(a, A^-(t_1)) < \rho .$$

COROLLAIRE 1. Si E est complet et si la multiapplication A, à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$ n'a pas ses valeurs partout vides, l'ensemble $A^-(t_1)$ est non vide.

En effet, s'il existe $t \in [t_0, t_1[$ tel que $A(t) \neq \emptyset$, l'inégalité (3.3) fournit $e(A(t), A^-(t_1)) < +\infty$, donc $A^-(t_1) \neq \emptyset$.

COROLLAIRE 2. Si E est complet et si la multiapplication A est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$, on a, pour tout $B \subset E$,

$$(3.5) \quad \lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), B) = e(A^-(t_1), B) .$$

En effet, dans l'inégalité

$$e(A(t), B) \leq e(A(t), A^-(t_1)) + e(A^-(t_1), B) ,$$

d'après (3.3), le premier terme du second membre a pour limite zéro lorsque $t \uparrow t_1$, donc

$$(3.6) \quad \limsup_{t \uparrow t_1} e(A(t), B) \leq e(A^-(t_1), B) .$$

Pour établir par ailleurs que

$$(3.7) \quad \liminf_{t \uparrow t_1} e(A(t), B) \geq e(A^-(t_1), B)$$

Choisissons $\rho \in \mathbb{R}$ strictement inférieur au second membre et supposons $A^-(t_1) \neq \emptyset$ (sinon (3.6), ayant son second membre nul, suffit pour établir le corollaire). Alors il existe $a \in A^-(t_1)$ tel que $d(a, B) > \rho$; cet a est limite d'une sélection $t \mapsto x(t) \in A(t)$. Pour tout t dans $[t_0, t_1[$ on a

$$d(x(t), B) \leq e(A(t), B)$$

d'où

$$d(a, B) = \lim_{t \uparrow t_1} d(x(t), B) \leq \liminf_{t \uparrow t_1} e(A(t), B);$$

donc ρ minore aussi le premier membre de (3.7).

En faisant $B = A(t_1)$ en (3.5), on obtient d'autre part :

COROLLAIRE 3. Si E est complet et si la multiapplication A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, le premier membre de (3.1) est égal aux deux autres. En particulier, dans ces hypothèses, la multiapplication A est à rétraction continue à gauche au point t_1 si et seulement si $A^-(t_1) \subset \text{adh } A(t_1)$.

Cette égalité des deux premiers membres de (3.1) permettrait de développer une théorie de l'approximation "à droite" des multiapplications à rétraction finie, à valeurs dans E complet, par des multiapplications localement en escalier, exactement comme on l'a fait précédemment moyennant d'autres hypothèses pour l'approximation "gauche". L'utilité n'en apparaît pas pour l'instant.

Enfin le corollaire que voici règle la question du prolongement soulevée au § 3.a, Remarque.

COROLLAIRE 4. On suppose que E est complet et que la multiapplication A , définie au moins sur $[t_0, t_1]$, est à rétraction bornée sur $[t_0, t_1[$. Alors A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$ si et seulement si

$$(3.8) \quad e(A^-(t_1), A(t_1)) < +\infty$$

En effet, si A est à rétraction finie sur $[t_0, t_1]$, (3.8) résulte de ce que le premier membre de (3.1) est égal au suivant. Inversement, $\text{ret}(A ; t_0, t_1)$ est la limite de sommes de la forme

$$R(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i))$$

expression majorée par

$$r(\tau_{n-1}) - r(t_0) + e(A(\tau_{n-1}), A(t_1)) .$$

Il n'y a plus qu'à invoquer le corollaire 2 ci-dessus.

4 . EXPANSION, RETRACTION ET VARIATION

4.a. Expansion d'une multiapplication

L'écart e n'étant pas symétrique, l'ordre de \mathbb{R} joue un rôle essentiel dans la théorie de la rétraction : on obtiendra une notion différente si on énumère dans l'ordre inverse les points d'une subdivision de l'intervalle $[s, t]$. Soit une telle subdivision

$$S : s = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t .$$

Posons

$$P(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})) .$$

DEFINITION. Le "sup" de $P(S)$, pour S décrivant l'ensemble des subdivisions finies de $[s, t]$ est appelé expansion de A sur l'intervalle $[s, t]$; notation $\exp(A ; s, t)$.

Evidemment $\exp(A ; s, t) = 0$ si et seulement si la multiapplication $\tau \mapsto \text{adh}'A(\tau)$ est (non strictement) décroissante sur l'intervalle $[s, t]$.

Il est classique, par ailleurs, d'appeler variation de la multiapplication A sur $[s, t]$, notation $\text{var}(A ; s, t)$, le "sup" de

$$V(S) = \sum_{i=1}^n h(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) .$$

La définition de la distance de Hausdorff h impliquant

$$h(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \leq e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) + e(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})) ,$$

on obtient

$$(4.1) \quad \max \{ \text{ret}(A ; s, t), \exp(A ; s, t) \} \leq \text{var}(A ; s, t) \\ \leq \text{ret}(A ; s, t) + \exp(A ; s, t) .$$

La multiapplication A est donc à variation finie sur un intervalle I si et seulement si elle est à la fois à rétraction finie et à expansion finie. Dans ce cas, choisissons un "point de repère" t_0 dans I et définissons la fonction expansion indéfinie de A :

$$p(t) = \begin{cases} \exp(A ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\exp(A ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} ,$$

ainsi que la fonction variation indéfinie de A :

$$v(t) = \begin{cases} \text{var}(A ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{var}(A ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 . \end{cases}$$

4.b. Construction de v à partir de r et p .

De (4.1) résultent des inégalités entre les trois fonctions r, p, v ; mais, de façon plus précise, la donnée des fonctions r et p détermine v . La construction peut se décrire comme suit :

PROPOSITION. Notons a l'application $t \mapsto (r(t), p(t))$ de I dans \mathbb{R}^2 ; munissons \mathbb{R}^2 de la norme

$$(4.2) \quad \| (x_1, x_2) \| = \max \{ |x_1|, |x_2| \} .$$

Alors, au sens de cette métrique de \mathbb{R}^2 , la variation de a sur un intervalle $[s, t]$ est

$$(4.3) \quad \text{var}(a ; s, t) = \text{var}(A ; s, t) ,$$

de sorte que la fonction v est variation indéfinie de l'application a .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; il existe une subdivision S_ϵ de $[s, t]$ telle que pour toute $S \supset S_\epsilon$ on ait

$$\text{ret}(A ; s, t) - \frac{\varepsilon}{3} < R(S) \leq \text{ret}(A ; s, t)$$

$$\text{exp}(A ; s, t) - \frac{\varepsilon}{3} < P(S) \leq \text{exp}(A ; s, t)$$

$$\text{var}(A ; s, t) - \frac{\varepsilon}{3} < V(S) \leq \text{var}(A ; s, t) .$$

La subdivision S étant explicitée comme ci-dessus, il existe alors des

$\varepsilon_i \geq 0$, de somme $\frac{\varepsilon}{3}$ tels que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on ait

$$r(\tau_i) - r(\tau_{i-1}) - \varepsilon_i \leq e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \leq r(\tau_i) - r(\tau_{i-1})$$

et des $\varepsilon_i' \geq 0$, de somme $\frac{\varepsilon}{3}$ tels que

$$p(\tau_i) - p(\tau_{i-1}) - \varepsilon_i' \leq e(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})) \leq p(\tau_i) - p(\tau_{i-1}) .$$

Avec la notation (4.2) on a donc

$$||a(\tau_i) - a(\tau_{i-1})|| - \varepsilon_i - \varepsilon_i' \leq h(A(\tau_i), A(\tau_{i-1})) \leq ||a(\tau_i) - a(\tau_{i-1})|| .$$

Par sommation cela donne

$$|V(S) - \sum_{i=1}^n ||a(\tau_i) - a(\tau_{i-1})|| | \leq \frac{2\varepsilon}{3} .$$

Donc $S \supset S_\varepsilon$ implique

$$|\text{var}(A ; s, t) - \sum_{i=1}^n ||a(\tau_i) - a(\tau_{i-1})|| | \leq \varepsilon .$$

ce qui établit (4.3) .

REFERENCES

J. J. MOREAU

- [1] Rétraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, Exposé n° 13 (90 p.).
- [2] Sélections de multiapplications à rétraction finie, C.R. Acad. Sci. ser. A, 276 (1973), 265-268.