



HAL
open science

Systèmes élastoplastiques de liberté finie

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Systèmes élastoplastiques de liberté finie. 1973. hal-02309482

HAL Id: hal-02309482

<https://hal.science/hal-02309482>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1973, Exposé n° 12

SYSTEMES ELASTOPLASTIQUES DE LIBERTE FINIE

par

J.J. MOREAU

I - INTRODUCTION

1.a Formulation du problème.

L'objet de ce rapport est de développer, pour le cas particulier de systèmes à nombre fini de degrés de liberté, la méthode esquissée dans une publication antérieure (cf. MOREAU [5]) concernant l'étude de l'évolution quasi-statique d'un système élastoplastique.

Les notations sont les mêmes que dans la publication en question : sont considérés deux espaces vectoriels \mathcal{U} (espace des configurations et des vitesses) et \mathcal{F} (espace des forces, au sens général) ici de même dimension finie, mis en dualité séparante par la forme bilinéaire "travail virtuel". La loi d'élasticité se formule comme une application A , linéaire autoadjointe positive de \mathcal{U} dans \mathcal{F} . On la suppose bijective ce qui permet de simplifier beaucoup le formalisme en interprétant A comme une identification de \mathcal{F} avec \mathcal{U} ;

Reçu le 13 Novembre 1973.

de la sorte on ne met plus en oeuvre qu'un seul espace $\mathcal{U} = \mathcal{F} = H$, préhilbertien séparé, ici de dimension finie, c'est-à-dire un espace vectoriel euclidien ; la forme bilinéaire "travail virtuel" se confond avec le produit scalaire de cet espace euclidien, noté $(\cdot | \cdot)$.

Selon le schéma habituel de l'élastoplasticité le système est traité comme formé de deux constituants :

- Le constituant "visible" ou "exposé", de configuration $x \in H$; lui seul subit les forces extérieures ou charges et les liaisons.
- Le constituant "caché" ou "freiné", de configuration $p \in H$.

On pose $x-p=e$, écart élastique.

Les forces subies par le constituant p sont :

- Une force s de "rappel élastique" vers x , de la forme $A(e)$, c'est-à-dire, vu notre convention d'identification de \mathcal{F} avec \mathcal{U} ,

$$(1.1) \quad s = e .$$

- Une résistance f liée à la vitesse \dot{p} du constituant p (à tout instant où cette vitesse existe) par la loi (cf. MOREAU [4])

$$(1.2) \quad \dot{p} \in \partial \psi_C (-f)$$

où C est un ensemble convexe fermé fixe donné dans H , le convexe de rigidité (notre cadre est donc celui de la plasticité parfaite, c'est-à-dire sans écrouissage ; rappelons toutefois que les écrouissages peuvent être, au moins phénoménologiquement, ramenés au même modèle mathématique grâce à l'usage de variables cachées supplémentaires ; voir à ce sujet NAYROLES [1], [2], NGUYEN [1], [2], [3]).

Les forces subies par le constituant x sont :

- La réaction r d'une liaison bilatérale parfaite : cette liaison contraint x d'appartenir à tout instant à une variété affine de

mouvement imposé, soit $\mathcal{L} = U + g$ où U désigne un sous-espace vectoriel fixe de H , tandis que g est un élément de H , fonction donnée du temps t , qu'on peut appeler le "guidage" ou "entraînement forcé". On ne restreint évidemment pas la généralité en supposant que g prend ses valeurs dans V , l'espace orthogonal de U dans H . Dire que la liaison est parfaite ou "sans frottement" signifie que cette réaction, a priori inconnue, vérifie à tout instant

$$(1.3) \quad r \in V .$$

L'énumération des forces subies par x , s'achève comme suit :

- Une charge c , fonction donnée du temps ; quitte à corriger en fin de calcul la valeur trouvée pour r , on ne restreint pas la généralité en supposant que cette donnée c prend ses valeurs dans U .

- La force $-s$ de rappel élastique vers p (poser ainsi que, en tant qu'élément de l'espace vectoriel $\mathcal{S} = H$, cette force est opposée à la force élastique subie par p signifie simplement que la puissance totale des forces élastiques subies par le système est nulle dans toute évolution laissant invariant le vecteur écart élastique $x-p$; autrement dit, l'énergie élastique ne dépend que de cet écart).

Le problème est la détermination du mouvement de x et p , dans l'hypothèse d'une évolution assez lente pour que l'inertie soit négligeable.

On écrit donc le quasi-équilibre de x et p :

$$(1.4) \quad r + c - s = 0$$

$$(1.5) \quad s + f = 0 .$$

Eliminant par (1.1) l'inconnue e , par (1.3) l'inconnue r et par (1.5) l'inconnue f , on condense les conditions du problème dans

l'écriture suivante :

$$(1.6) \quad x \in U + g$$

$$(1.7) \quad s \in V + c$$

$$(1.8) \quad x = p + s$$

$$(1.9) \quad \dot{p} \in \partial \psi_C(s) .$$

Par solution, on entend un système de trois fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto s(t)$, $t \mapsto p(t)$, absolument continues sur un intervalle $[0, T]$, donc presque partout dérivables, et vérifiant ces quatre conditions pour presque tout t .

On supposera naturellement que les données
 $t \mapsto c(t) \in U$ et $t \mapsto g(t) \in V$ sont elles-mêmes des fonctions
absolument continues.

1.b Résultats

L'objet de la section 2 de ce rapport est essentiellement de prouver l'existence (on a d'ailleurs l'unicité en ce qui concerne la fonction s) d'une solution du problème d'évolution précédent, consécutive à chaque paire de données initiales

$$x(0) = x_0 \quad , \quad s(0) = s_0$$

données supposées telles, évidemment, que

$$x_0 \in U + g(0) \quad , \quad s_0 \in V + c(0)$$

$$s_0 \in C .$$

Cette dernière restriction est exigée par (1.9) ; une autre condition nécessaire à vérifier par les données ressort du rapprochement de (1.7) et (1.9) : la variété affine $V+c(t)$ doit (au moins pour presque

tout t) rencontrer le convexe C , sans quoi il ne saurait exister de valeurs de s fournissant pour (1.9) un second membre non vide. On explique en 2.b que le problème ne peut être considéré comme physiquement bien posé que si on fait l'hypothèse plus forte suivante :

Hyp. 1 : Pour tout t , le point $c(t)$ appartient à l'intérieur de l'ensemble $\text{proj}_{\mathbb{U}} C$.

Nous lui adjoignons, dans ce rapport, l'hypothèse usuelle :

Hyp. 2 : L'ensemble C possède un intérieur non vide.

et nous montrons, au même paragraphe, que la conjonction de ces deux hypothèses équivaut à :

Hyp. 3 : Pour tout t dans l'intervalle considéré, la variété affine $V + c(t)$ rencontre l'intérieur de C ,

ce que nous appelons hypothèse de la charge sûre.

Moyennant cette hypothèse (dont on tire d'abord, en 2.c, une conséquence techniquement utile pour la suite), le théorème d'existence est prouvé en 2.c. On a préalablement, en 2.a, introduit deux nouvelles fonctions inconnues

$$\begin{aligned} y &= s - c - g = - \text{proj}_V p \\ z &= x - c - g = \text{proj}_{\mathbb{U}} p \end{aligned}$$

qui permettent une formulation plus simple.

Le fonction $t \mapsto y$, à valeurs dans le sous-espace hilbertien V est déterminée comme solution du processus de rafle par le convexe mobile $(C - c(t) - g(t)) \cap V$. L'existence d'une telle solution résulte de travaux antérieurs de l'auteur (cf. MOREAU [8], [7], [10]) en observant que ce convexe mobile est absolument continu au sens de la distance de Hausdorff ; ce dernier fait résulte de Hyp.3 et d'un théorème général d'intersection (cf. MOREAU [8], [11]) qui a été établi

spécialement en vue de l'usage présent. On note l'unicité de cette solution $t \mapsto y(t)$, et par suite, en ce qui concerne le problème initialement formulé, l'unicité de la fonction $x \mapsto s(t)$, pour chaque donnée initiale $s(0) \in C$. Un simple changement de variable explicité en 2.f permet d'ailleurs de caractériser $t \mapsto s(t)$ comme solution de

$$(1.10) \quad - \dot{s} \in \dot{g} + \partial \psi_{C \cap (V+c)}(s)$$

équation d'évolution analogue à celle du processus de rafle.

La démonstration du théorème d'existence s'achève en associant une fonction $t \mapsto z(t)$ à la fonction $t \mapsto y(t)$ trouvée : la dérivée \dot{z} est une sélection d'une certaine multiapplication mesurable, à valeurs convexes compactes ; il n'y a pas unicité, en général, pour z , donc pas unicité en ce qui concerne les fonctions $t \mapsto p(t)$ et $t \mapsto x(t)$; ce fait est bien connu des mécaniciens.

La troisième et dernière section de ce rapport vise à rejoindre certaines préoccupations des auteurs ayant antérieurement étudié l'évolution des systèmes élastoplastiques (cf. KOITER [1]) : il était naturel pour eux de chercher à caractériser cette évolution par des équations différentielles au sens traditionnel, c'est-à-dire d'exprimer, pour chaque état éventuellement atteint par le système, les valeurs des vitesses \dot{x} et \dot{s} . Cette expression de \dot{x} et \dot{s} consiste en fait en propriétés de minimisation de certaines fonctions numériques sur certains ensembles. Les méthodes modernes de l'analyse convexe que nous employons permettent de reprendre cette question avec beaucoup plus de précision et de souplesse. Il se trouve inutile de faire, comme les auteurs antérieurs, l'hypothèse que la frontière

de C est différentiable par morceaux. C'est, par exemple, sans supposer cette différentiabilité que nous établissons, en 3.a, l'orthogonalité classique des vitesses \dot{p} et \dot{s} . La propriété de minimisation trouvée en 3.b pour la vitesse \dot{s} se présente sous deux variantes : l'ensemble sur lequel on minimise peut être, au choix, soit une certaine variété affine, soit un certain ensemble convexe qui la contient. Choix semblable entre deux variantes en 3.c, pour la caractérisation de \dot{x} . Tout cela n'a pour nous, au stade actuel, qu'un intérêt spéculatif : la caractérisation en question de \dot{s} peut bien s'écrire, si l'on veut, avec un f compliqué invoquant l'opération de "proximation", sous la forme $\dot{s} = f(t, s)$ ce qui constitue une équation différentielle au sens traditionnel. Cette équation différentielle se trouve équivalente à l'équation d'évolution "à second membre multivoque" (1.10) mais ne présente, par rapport à elle, que des désavantages, tant pour l'étude théorique que pour l'élaboration de méthodes numériques.

Signalons toutefois la remarque 3 du paragraphe 3.c : si, à un certain instant, la valeur de $s = x-p$ est connue ainsi que la vitesse de guidage \dot{g} , on étudie dans cette remarque la relation entre la vitesse de charge et la vitesse visible \dot{x} : cette relation est sous-différentielle ; on explique en quoi cette propriété peut être utile.

2 - QUESTION D'EXISTENCE

2.a Réécriture des conditions

Les conditions (1.6) à (1.8) peuvent se réécrire

$$x-g \in U$$

$$c-s \in V$$

$$(x-g) + (c-s) = p+c-g ,$$

ce qui se formule de façon équivalente en invoquant les opérations de projection orthogonale sur les sous-espaces U et V , supplémentaires orthogonaux dans H :

$$x-g = \text{proj}_U (p+c-g)$$

$$c-s = \text{proj}_V (p+c-g) .$$

Comme $c \in U$ et $g \in V$, cela équivaut à

$$(2.1) \quad \text{proj}_U p = x-c-g$$

$$(2.2) \quad \text{proj}_V p = c+g-s$$

Il est intéressant de constater que les données c et g apparaissent ici seulement par leur somme $c+g$: cette donnée globale est une fonction à valeurs dans H dont les composantes en U et en V constituent respectivement la charge c et l'entraînement forcé g .

A ce stade il apparaît commode d'introduire deux nouvelles inconnues

$$(2.2) \quad y = s-c-g = - \text{proj}_V p$$

$$(2.3) \quad z = x-c-g = \text{proj}_U p ,$$

de sorte que

$$(2.4) \quad p = z-y .$$

Si l'on invoque (2.2), (2.3), (2.4) pour passer du système d'inconnues (p, x, s) au système d'inconnues (y, z) on trouve que le problème formulé par les conditions (1.6) à (1.9) est équivalent à

$$(2.5) \quad \begin{cases} z - \dot{y} \in \partial\psi_C(y + c + g) \\ z \in U, \quad y \in V. \end{cases}$$

2.b Hypothèse de la charge sûre.

L'ensemble $\partial\psi_C(s)$ étant vide si $s \notin C$, une condition nécessaire évidente pour l'existence d'une solution de (1.7), (1.9) sur un intervalle I est que, pour presque tout t dans I , la variété affine mobile $V+c(t)$ rencontre l'ensemble C ; cela s'écrit aussi bien

$$(2.6) \quad c(t) \in \text{proj}_U C.$$

La signification mécanique de cette condition nécessaire est claire : une charge $c(t)$ ne vérifiant pas cette condition ne peut certainement pas être "équilibrée" (compte tenu de la liaison parfaite, de réaction r , orthogonale à U) par un $s \in C$; or seules des valeurs de s appartenant à C sont permises par la loi de plasticité (1.9). Cela veut dire que, si, à partir d'une configuration définie par des valeurs quelconques de x et p , le système subit une charge ne vérifiant pas (2.6), il ne peut présenter qu'une évolution brutale, non quasi-statique; naturellement, il arrive aussi qu'une charge vérifiant (2.6) ne produise pas une évolution quasi-statique : une autre condition nécessaire est que la configuration (x, p) à l'instant où cette charge est appliquée vérifie

$$x - p \in V + c$$

c'est-à-dire $c = \text{proj}_U (x-p)$,

conséquence de (1.7) et (1.8) .

Nous ferons dans toute la suite l'hypothèse suivante, plus forte que (2.6) :

Hyp. 1 : Pour tout t dans I , $c(t)$ appartient à l'intérieur de l'ensemble $\text{proj}_U C$.

Le problème de rechercher l'évolution quasi-statique du système pour une charge qui ne vérifierait pas Hyp. 1 est physiquement mal posé ; en effet une donnée physique telle que c est toujours essentiellement entachée d'incertitude : si cette donnée appartient à la frontière de $\text{proj}_U C$, la "vraie valeur" qu'elle est censée approcher peut, quelle que soit la qualité de l'approximation, ne pas appartenir à $\text{proj}_U C$.

L'hypothèse Hyp.1 implique un intérieur non vide pour l'ensemble $\text{proj}_U C$. Faisons de plus l'hypothèse :

Hyp.2 : L'ensemble convexe C est d'intérieur non vide

Il est alors utile de savoir :

PROPOSITION. La conjonction des hypothèses Hyp.1 et Hyp.2 équivaut à la suivante :

Hyp. 3 : Pour tout t dans I , la variété affine $V+c(t)$ rencontre l'intérieur de C .

En effet Hyp.3 implique Hyp.1 et Hyp.2, vu que

$$\text{proj}_U \text{int } C \subset \text{int } \text{proj}_U C .$$

Inversement, supposons Hyp.2 et non Hyp.3 : il existe t et il existe Π , hyperplan fermé de H séparant (peut être non strictement) la variété affine $V+c(t)$ de l'ensemble convexe C . Cet hyperplan est parallèle

à V , donc sa projection orthogonale sur U est un hyperplan fermé de U , séparant (peut être non strictement) le point $c(t)$ de l'ensemble $\text{proj}_U C$: cela contredit Hyp.1 .

Nous intitulerons Hyp.3 : Hypothèse de la charge sûre.

2.c Une conséquence de cette hypothèse

PROPOSITION. On suppose que Hyp.3 est vérifiée pour un intervalle I compact et que la fonction c est continue sur cet intervalle ; alors il existe un réel $\rho > 0$ et une fonction $h : I \rightarrow H$ continue telle que, pour tout t dans I , on ait $h(t) \in C \cap (V + c(t))$ et que la boule (fermée) de centre $h(t)$, de rayon ρ soit contenue dans C .

Démonstration. Pour des parties A et B quelconques d'un espace métrique (E, d) , nous utiliserons la notation (cf. MOREAU [7], [9]) :

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) ;$$

Le fait que $V+c(t)$ rencontre l'intérieur de C s'écrit alors

$$(2.6) \quad e(V + c(t), H \setminus C) > 0 .$$

Pour t et t' dans I , les ensembles $V + c(t)$ et $V + c(t')$ sont des variétés affines parallèles, d'où

$$e(V + c(t), V + c(t')) = e(V + c(t'), V + c(t)) = |c(t') - c(t)|$$

(rappelons que c prend ses valeurs dans U).

L'écart e vérifiant l'inégalité triangulaire, cela donne

$$(2.7) \quad e(V + c(t'), H \setminus C) \leq |c(t') - c(t)| + e(V + c(t), H \setminus C)$$

On en tire la continuité de la fonction $t \mapsto e(V + c(t), H \setminus C)$.

En effet (2.7) montre que, si cette fonction prend la valeur $+\infty$ en un point de l'intervalle I , elle vaut $+\infty$ partout, auquel cas la continuité est banale ; dans le cas contraire, si on réécrit (2.7) en permutant t et t' , on obtient finalement

$$|e(V + c(t'), H \setminus C) - e(V + c(t), H \setminus C)| \leq |c(t') - c(t)|$$

d'où la continuité annoncée, vu celle de c .

Comme I est, par hypothèse, compact, la fonction $t \mapsto e(V + c(t), H \setminus C)$ possède un minimum, lequel est strictement positif d'après (2.6) ; choisissons $\rho > 0$ strictement inférieur à ce minimum. Posons

$$C_\rho = \{x \in H : d(x, H \setminus C) \geq \rho\},$$

ensemble convexe fermé, d'intérieur non vide (c'est en effet l'ensemble des centres des boules de rayon ρ contenues dans C). Pour tout t dans I , la variété affine $V + c(t)$ rencontre l'intérieur de C_ρ . Comme $t \mapsto V + c(t)$ constitue une multiapplication continue au sens de la distance de Hausdorff, on conclut (cf. MOREAU [8], [11]) qu'il en est de même pour

$$t \mapsto C_\rho \cap (V + c(t))$$

et par suite, que cette dernière multiapplication possède une sélection continue, soit $h(t)$ (cf. MOREAU [7], [9] ou simplement la théorie du processus de rafle). D'après la définition de C_ρ , pour tout t dans I ,

$$d(h(t), H \setminus C) \geq \rho,$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Si, plus spécialement, on suppose que la fonction $c : I \rightarrow H$ est absolument continue, avec une dérivée appartenant, par exemple, à $L^\alpha(I, H)$, $\alpha \in [1, +\infty]$, la multiapplication $t \mapsto V + e(t)$ est absolument continue au sens de la distance de Hausdorff avec une "vitesse numérique" appartenant à $L^\alpha(I, \mathbb{R})$ et il en est de même pour son intersection avec C_ρ ; on conclut dans ce cas qu'on peut construire la sélection h elle-même absolument continue, à dérivée dans $L^\alpha(I, H)$.

2.d Caractérisation de la fonction y par un processus de rafle.

Nous tirons dans ce paragraphe une conséquence des conditions (2.5).

PROPOSITION. Si les conditions (2.5) sont vérifiées pour presque tout t , on a, pour ces valeurs de t ,

$$(2.8) \quad -\dot{y} \in \partial\psi_{C-c-g}(y) + \partial\psi_V(y) .$$

Si de plus l'hypothèse de la charge sûre est vérifiée, cette propriété équivaut à

$$(2.9) \quad -\dot{y} \in \partial\psi_{(C-c-g) \cap V}(y) .$$

En effet, la seconde ligne de (2.5) implique $-\dot{z} \in U$, donc $-\dot{z} \in \partial\psi_V(y)$; on obtient donc (2.8) en notant que

$$\partial\psi_C(y+c+g) = \partial\psi_{C-c-g}(y) .$$

Par ailleurs

$$\psi_{(C-c-g) \cap V} = \psi_{C-c-g} + \psi_V$$

et, si la condition de charge sûre est remplie, cette égalité "passe aux sous-différentiels" parce qu'alors le sous-espace V rencontre l'intérieur de $C-c-g$ (c'est un des cas classiques d'additivité des sous-différentiels).

REMARQUE. Comme, par essence, y et \dot{y} appartiennent à V , il est indifférent, en (2.9), d'interpréter le sous-différentiel au sens de la dualité de H avec lui-même ou de la dualité de V avec lui-même. De toutesmanières cette propriété (2.9) définit la fonction $t \mapsto y(t)$ comme solution du problème de rafle pour le convexe mobile $(C-c-g) \cap V$ (cf. MOREAU [3], [7], [10]).

Sans qu'on ait d'ailleurs à faire l'hypothèse de la charge sûre, le fait que le second membre de (2.3) constitue une multiapplication monotone entraîne, par un raisonnement classique :

COROLLAIRE. Si deux solutions éventuelles (absolument continues) de (2.5) correspondent à une même valeur initiale de y , ces deux solutions coïncident en ce qui concerne la fonction y , pour tout instant ultérieur.

2.e Théorème d'existence

PROPOSITION. On suppose que les données $t \mapsto c(t)$ et $t \mapsto g(t)$ sont absolument continues sur un intervalle compact $[0, T]$ et on suppose vérifiée l'hypothèse de la charge sûre sur cet intervalle. Alors quel que soit y_0 dans $V \cap [C-c(0)-g(0)]$, quel que soit z_0 dans U , il existe au moins une paire de fonctions $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$, absolument continues sur $[0, T]$, vérifiant (2.5) pour presque tout t dans $[0, T]$ ainsi que les conditions initiales $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

Première étape : Les hypothèses ci-dessus font qu'il existe une fonction absolument continue sur $[0, T]$, notons-la tout de suite y , vérifiant (2.9) pour presque tout t ainsi que la condition $y(0) = y_0$. En effet cet y est la solution du problème de rafle pour la condition initiale

en question et le convexe mobile $t \mapsto (C-c(t)-g(t)) \cap V$. Ce convexe mobile est à variation absolument continue parce qu'il en est bien ainsi pour $t \mapsto C-c(t)-g(t)$ (convexe subissant une translation absolument continue) et que V est un convexe fixe rencontrant l'intérieur de ce dernier (sur la continuité absolue d'une telle intersection cf. MOREAU [8], [11]). Ayant ainsi choisi y , on a $y(t) \in V$ pour tout $t \in [0, T]$, donc $\partial\psi_V(y) = U$. L'équivalence de (2.8) et (2.9) permet donc d'affirmer, pour presque tout t , l'existence d'au moins un élément de U , notons-le tout de suite $\dot{z}(t)$, tel que

$$\dot{z}(t) - \dot{y}(t) \in \partial\psi_{C-c-g}(y(t)) = \partial\psi_C(y(t)+c(t)+g(t))$$

ce qui est la première des conditions (2.5).

En d'autres termes, pour chacun de ces t il existe au moins un $\dot{z} \in U$ tel que le point $\dot{z} - \dot{y}$ soit conjugué du point $y+c+g$ par rapport au couple de fonctions mutuellement polaires γ (fonction d'appui de C) et ψ_C . Puisque $y+c+g$ appartient à C par construction, cette propriété de conjugaison s'écrit aussi

$$\gamma(\dot{z} - \dot{y}) - (\dot{z} - \dot{y} \mid y+c+g) = 0 .$$

Si l'on revient à la variable $\dot{p} = \dot{z} - \dot{y}$, cela veut dire que, pour presque tout t , l'ensemble (convexe fermé)

$$(2.10) \quad \Gamma(t) = \{\dot{p} \in H : \gamma(\dot{p}) - (\dot{p} \mid y+c+g) = 0\} \\ = \{\dot{p} \in H : \gamma(\dot{p}) - (\dot{p} \mid y+c+g) \leq 0\}$$

possède une intersection non vide avec la variété affine $U-\dot{y}(t)$.

Comme γ est une fonction numérique indépendante de t et que $t \mapsto y+c+g$ est une application continue de $[0, T]$ dans H , on

constate que $t \mapsto \Gamma(t)$ est une multiapplication mesurable (au sujet de la mesurabilité des multiapplications, théorie qui doit beaucoup, entre autres, à C. CASTAING, on trouvera l'exposé de faits fondamentaux dans ROCKAFELLAR [1]); de même la multiapplication $t \mapsto U-\dot{y}(t)$, donc aussi l'intersection des deux, laquelle intersection constitue une multiapplication à valeurs (convexes) fermées, non vides pour presque tout t . De là classiquement l'existence d'une famille dense de sélections mesurables de cette dernière multiapplication. La démonstration s'achèvera en montrant que ces sélections appartiennent à $L^1(0, T; H)$, donc sont les dérivées de fonctions $t \mapsto p(t)$ constituant une solution de notre problème.

Deuxième étape : L'intervalle $[0, T]$ étant compact, on invoque la proposition 2.c. Il existe $\rho > 0$ et $h : [0, T] \rightarrow H$ continue (et même absolument continue, à dérivée dans $L^1(0, T; H)$) telle que $h(t) \in V+c(t)$ pour tout $t \in [0, T]$ et que la boule de centre $h(t)$, de rayon ρ soit contenue dans C . Cette inclusion se traduit par l'inégalité suivante entre fonctions d'appui :

$$(2.11) \quad \forall \dot{p} \in H : \rho |\dot{p}| + (h(t)|\dot{p}) \leq \gamma(\dot{p})$$

On transforme la définition (2.10) de $\Gamma(t)$ en écrivant, pour chaque t ,

$$\begin{aligned} (\dot{p}|y+c+g) &= (\dot{p}|h) + (\dot{p}|y+c+g-h) \\ &= (\dot{p}|h) + (\dot{p} + \dot{y}|y+c+g-h) - (\dot{y}|y+c+g-h) \end{aligned}$$

Si on se rappelle que $\dot{p} + \dot{y} = \dot{z} \in U$, que $c-h \in V$, que $g \in V$, que $\dot{y} \in V$, que $c \in U$, il reste

$$(\dot{p}|y+c+g) = (\dot{p}|h) - (\dot{y}|y+g-h)$$

En rapprochant (2.10) et (2.11) on obtient donc que tout \dot{p} appartenant à $\Gamma(t)$ vérifie l'inégalité

$$\rho |\dot{p}| + (h|\dot{p}) \leq (\dot{p}|h) - (\dot{y}|y+g-h)$$

et par suite

$$(2.12) \quad |\dot{p}| \leq -\frac{1}{\rho} (\dot{y}|y+g-h) \leq \frac{1}{\rho} |\dot{y}| |y+g-h| \leq \frac{M}{\rho} |\dot{y}|$$

où on note M un majorant sur $[0, T]$ de la fonction continue $t \mapsto |y+g-h|$. Comme $t \mapsto \dot{y}$ est une fonction appartenant à $L^1(0, T; H)$, cette majoration montre que toute sélection mesurable $t \mapsto \dot{p}$ de $\Gamma(t)$ appartient à $L^1(0, T; H)$: elle est donc la dérivée presque partout d'une fonction $t \mapsto p$, absolument continue, vérifiant la condition initiale

$$p(0) = p_0 = x_0 - s_0.$$

En résumé on peut caractériser comme suit les solutions du problème posé : On construit $t \mapsto y(t)$ (d'où ensuite $s = y+c+g$) comme solution du processus de rafle pour le convexe mobile $t \mapsto (C-c-g) \cap V$ et la condition initiale donnée ; cette fonction y (unique) étant obtenue, on obtient toutes les solutions du problème en prenant pour \dot{p} les sélections mesurables de la multiapplication $t \mapsto \Gamma(t) \cap (U-\dot{y}(t))$; ces sélections sont dans $L^1(0, T; H)$: leurs primitives, à construire en tenant compte des données initiales, constituent toutes les solutions p du problème (d'où ensuite $x = p+s$).

REMARQUE. Les majorations obtenues dans ce qui précèdent montrent que si les données c et g ont leurs dérivées dans $L^\alpha(0, T; H)$, $\alpha \in [1, +\infty]$, les solutions y, z, x, p, s , ont aussi leurs dérivées dans $L^\alpha(0, T; H)$.

2.f Equation concernant la fonction s

Le passage de y à s par (2.2)

$$s = y+c+\dot{g}$$

permet de caractériser la fonction s en réécrivant (2.8) sous la forme

$$-\dot{s} + \dot{c} + \dot{g} \in \partial\psi_C(s) + \partial\psi_{V+c}(s) .$$

Comme $\partial\psi_{V+c}(s) = U$ ou \emptyset et que $\dot{c} \in U$ cela équivaut à

$$(2.13) \quad -\dot{s} + \dot{g} \in \partial\psi_C(s) + \partial\psi_{V+c}(s) .$$

Si, de plus, on fait l'hypothèse de la charge sûre cette dernière condition équivaut à

$$(2.14) \quad -\dot{s} \in -\dot{g} + \partial\psi_C \cap (V+c)(s) ,$$

ou

$$-\dot{s} \in \partial f(t,s)$$

en posant

$$f(t,s) = \psi_C \cap (V+c(t))(s) - (\dot{g}(t)|s) .$$

L'équation (2.14) est très voisine de celle d'un processus de râfle dans l'espace H ; moyennant les hypothèses de la proposition 2.e , elle possède une solution et une seule consécutive à chaque donnée initiale $s(0)$ appartenant à $C \cap (V+c(0))$.

3 - CARACTERISATION INSTANTANEE DES VITESSES

3.a Orthogonalité de \dot{p} et \dot{s} ,

La théorie classique de la plasticité (cf. KOITER [1]) cherche à caractériser les valeurs instantanées de la vitesse "visible" \dot{x} ou de la "vitesse de tension" \dot{s} , cela notamment au moyen de propriétés variationnelles. Dans ces considérations, un rôle central est tenu par la propriété d'orthogonalité des vecteurs \dot{p} et \dot{s} ; les auteurs classiques l'établissent en supposant que la frontière du "convexe de rigidité" est formé d'un nombre fini de portions de surfaces régulières. Nous nous affranchissons ici de cette hypothèse.

PROPOSITION. A tout instant où les dérivées \dot{p} et \dot{s} existent (c'est-à-dire pour presque tout t , si les hypothèses de la proposition 2.e sont remplies), on a

$$(3.1) \quad (\dot{p} | \dot{s}) = 0 .$$

En effet si t est tel que la dérivée à droite

$$\dot{s}^+ = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{s(t+\varepsilon) - s(t)}{\varepsilon}$$

existe, le fait que $s(t) \in C$ et $s(t+\varepsilon) \in C$ entraîne que cette dérivée appartient au cône convexe (de sommet 0) noté Q : adhérence du cône engendré par l'ensemble $C - s(t)$. De même si t est tel que la dérivée à gauche

$$\dot{s}^- = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{s(t-\varepsilon) - s(t)}{-\varepsilon}$$

existe, cette dérivée appartient à $-Q$.

On sait que le cône polaire de Q n'est autre que le sous-différentiel $\partial\psi_C(s(t))$; on le notera désormais P :

$$P = \{u \in H : \forall v \in Q, (u|v) \leq 0\} .$$

Il découle alors de (1.9) que

$$(\dot{s}^+ | \dot{p}) \leq 0$$

$$(\dot{s}^- | \dot{p}) \geq 0 ,$$

d'où (3.1) si $\dot{s}^+ = \dot{s}^- = \dot{s}$.

Nous en tirons :

COROLLAIRE. A tout instant où \dot{s} et \dot{p} existent on a

$$(3.2) \quad \dot{p} = \text{proj}_P \dot{x}$$

$$(3.3) \quad \dot{s} = \text{proj}_Q \dot{x}$$

$$(3.4) \quad \dot{p} = \text{proj}_{P-P} \dot{x}$$

$$(3.5) \quad \dot{s} = \text{proj}_{Q \cap -Q} \dot{x} .$$

En effet, si \dot{s} et \dot{p} existent, (1.8) entraîne l'existence de

$$(3.6) \quad \dot{x} = \dot{p} + \dot{s} .$$

Comme $\dot{p} \in P$, $\dot{s} \in Q$, $(\dot{p}|\dot{s}) = 0$, (3.2) et (3.3) résultent du théorème des deux cônes (cf. MOREAU [1], [2]).

On a vu plus haut que \dot{s} se trouve appartenir au sous-ensemble $Q \cap -Q$ de Q , donc (3.3) implique a fortiori (3.5). Or $Q \cap -Q$ est un sous-espace vectoriel de H ; l'orthogonalité de \dot{p} et \dot{s} fait, vu (3.6), que \dot{p} est la projection de \dot{x} sur le supplémentaire orthogonal de $Q \cap -Q$: on sait que ce supplémentaire est l'adhérence de $P-P$ (en fait l'espace vectoriel $P-P$ lui-même puisqu'on suppose ici H de dimension finie), d'où (3.4).

3.b Caractérisation de \dot{y} ou \dot{s} .

PROPOSITION. Comme ci-dessus, on note P le cône convexe fermé

$$P = \partial\psi_C(s(t)) = \partial\psi_{C-c-g}(y(t))$$

et on note Q son cône polaire, adhérence du cône engendré par

$$C-s(t) = C-y(t)-c(t)-g(t) .$$

A tout instant où les dérivées \dot{c} , \dot{g} , \dot{y} existent, la valeur de \dot{y} est l'élément de norme minimum dans l'ensemble $V \cap (Q-\dot{c}-\dot{g})$.

Démonstration. Comme $s = y+c+g$, les raisonnements du paragraphe 3.a montrent que

$$(3.7) \quad \dot{y} + \dot{c} + \dot{g} \in Q \cap -Q ,$$

de sorte que \dot{y} appartient bien à l'ensemble en question. Selon la caractérisation connue de la projection d'un point (ici l'origine) sur un convexe fermé, nous devons de plus établir que, pour tout v dans $V \cap (Q-\dot{c}-\dot{g})$, on a

$$(\dot{y} | \dot{y}-v) \leq 0 .$$

De fait, en introduisant l'élément \dot{z} du paragraphe 2.a, on a

$$(\dot{y} | \dot{y}-v) = (\dot{z}-\dot{y} | v+\dot{c}+\dot{g}) + (\dot{z} | \dot{y}-v) - (\dot{z}-\dot{y} | \dot{y}+\dot{c}+\dot{g})$$

Or, vu (2.5), le premier des trois termes du second membre est ≤ 0 parce que $\dot{z}-\dot{y} \in P$ et $v+\dot{c}+\dot{g} \in Q$. Le deuxième est nul parce que $\dot{z} \in U$ et $\dot{y}-v \in V$. Le troisième est nul parce que $\dot{z}-\dot{y} \in P$ et $\dot{y}+\dot{c}+\dot{g} \in Q \cap -Q$.

Autre démonstration. A titre d'illustration des techniques du

"calcul sous-différentiel" donnons aussi le raisonnement suivant :

Nous devons prouver que la fonction

$$v \mapsto \psi_{V \cap (Q-\dot{c}-\dot{g})}(v) + \frac{1}{2} |v|^2$$

présente un minimum pour $v = \dot{y}$ (minimum d'ailleurs strict, vu la stricte convexité de la fonction $v \mapsto \frac{1}{2} |v|^2$) ; cela s'écrit

$$0 \in \partial \psi_{V \cap (Q-\dot{c}-\dot{g})} + \frac{1}{2} |\cdot|^2 (\dot{y})$$

En vertu d'inclusions évidentes de sous-différentiels, il suffit pour établir cela de constater que

$$0 \in \partial \psi_V (\dot{y}) + \partial \psi_{Q-\dot{c}-\dot{g}} (\dot{y}) + \dot{y}$$

c'est-à-dire encore (car $\dot{y} \in V$ entraîne $\partial \psi_V (\dot{y}) = U = -U$)

de constater que

$$(U-\dot{y}) \cap \partial \psi_{Q-\dot{c}-\dot{g}} (\dot{y}) \neq \emptyset .$$

De fait, d'après (2.5), l'élément $\dot{z}-\dot{y} \in U-\dot{y}$ appartient à P . Or, de (3.7), on tire aisément que P est contenu dans

$$\partial \psi_Q (\dot{y}+\dot{c}+\dot{g}) = \partial \psi_{Q-\dot{c}-\dot{g}} (\dot{y}) .$$

COROLLAIRE 1. A tout instant où les dérivées \dot{c} , \dot{g} , \dot{y} existent, la valeur de \dot{y} est l'élément de norme minimum dans la variété affine

$$V \cap ((Q \cap -Q) - \dot{c}-\dot{g}) .$$

En effet, (3.7) montre que \dot{y} appartient bien à cette variété affine, laquelle est un sous-ensemble de $V \cap (Q-\dot{c}-\dot{g})$.

En changeant de notation on obtient :

COROLLAIRE 2. A tout instant où les dérivées \dot{c} , \dot{g} , \dot{s} existent la valeur de \dot{s} est le point le plus proche de $\dot{c}+\dot{g}$ dans l'ensemble $(V+\dot{c}) \cap Q$ ainsi que dans la variété affine $(V+\dot{c}) \cap (Q \cap -\dot{c})$.

REMARQUE. La proposition précédente et le corollaire 1, montrent que la fonction y est non seulement solution de l'équation différentielle à second membre multivoque (2.8), mais de

$$\dot{y} = \text{proj} (0, V \cap (Q(t, y) - \dot{c}(t) - \dot{g}(t)))$$

et de

$$\dot{y} = \text{proj} (0, V \cap ((Q(t, y) \cap -Q(t, y)) - \dot{c}(t) - \dot{g}(t)))$$

qui sont des équations différentielles ordinaires : on a noté ici

$Q(t, y)$ le cône polaire de $\partial\psi_{C-c(t)-g(t)}(y)$.

La tendance traditionnelle serait de préférer à la condition multivoque (2.8) une telle condition explicite concernant \dot{y} , mais ce serait évidemment ici une maladresse : Outre que leurs seconds membres sont très compliqués, chacune de ces deux équations formule pour la fonction inconnue y une exigence à première vue plus forte que (2.8) ; l'existence de solution doit donc, a priori, être plus difficile à prouver ; or, par ailleurs, (2.8) est déjà une condition assez forte pour assurer (grâce à la propriété de monotonie de l'opérateur multivoque écrit au second membre) l'unicité de la solution consécutive à chaque donnée initiale. Pour l'élaboration d'algorithmes numériques également, l'exploitation de (2.8) est bien plus simple que celle de ces équations différentielles (algorithme de rattrapage ; cf. MOREAU [6], [7]).

De même, le corollaire 2 se traduit pour la fonction s en deux équations différentielles ordinaires qu'il serait maladroit de préférer à (2.14).

3.c Caractérisation de \dot{x}

Comme précédemment, la valeur de s à l'instant en cause est traitée comme connue, donc aussi le cône $P = \partial\psi_C(s)$ et son cône polaire Q ; notons q la fonction numérique définie pour tout $u \in H$

par

$$q(u) = \frac{1}{2} [\text{dist}(u, P)]^2$$

On sait (cf. MOREAU [2]) que cette fonction est partout différentiable au sens de Fréchet et que

$$(3.8) \quad \text{grad } q(u) = \text{proj}_Q u$$

PROPOSITION. A tout instant où les dérivées \dot{c} , \dot{g} , \dot{s} , \dot{p} existent,
la valeur de $\dot{x} = \dot{p} + \dot{s}$ est un point de la variété affine $U + \dot{g}$ en lequel
la restriction à cette variété de la fonction

$$(3.9) \quad u \mapsto q(u) - (\dot{c}|u)$$

atteint son minimum.

Démonstration. La dérivation de (1.6) et (1.7) fournit

$$(3.10) \quad \dot{x} \in U + \dot{g}$$

$$(3.11) \quad \dot{s} \in V + \dot{c}$$

et cette dernière inclusion équivaut à

$$\text{proj}_U \dot{s} = \dot{c} .$$

En invoquant (3.3) et (3.8), cela s'écrit

$$\text{proj}_U \text{grad } q(\dot{x}) = \dot{c}$$

ou, puisque $\dot{c} \in U$,

$$(3.12) \quad \text{proj}_U \text{grad } (q - (\dot{c}|.))(\dot{x}) = 0$$

ce qui exprime bien la propriété annoncée.

REMARQUE 1. Réciproquement, notons \dot{x} un point de $U + \dot{g}$ possédant la propriété de minimum en question, c'est-à-dire vérifiant (3.12) ; si on lui associe \dot{s} par $\dot{s} = \text{proj}_Q \dot{x}$, le calcul ci-dessus montre qu'on a (3.11) ; et si de plus on lui associe \dot{p} par $\dot{p} = \text{proj}_P \dot{x}$ le théorème des deux cônes montre que $\dot{x} = \dot{p} + \dot{s}$ avec évidemment $\dot{p} \in P$.

Il résulte de là, par exemple, que si on part d'une fonction absolument continue $t \mapsto s(t)$ vérifiant (2.13) (rappelons qu'il en existe au plus une pour chaque donnée initiale $s(0)$ à cause de la monotonie du second membre) et qu'on lui associe une fonction $t \mapsto \dot{x}(t)$ appartenant à $L^1_{\mathbb{H}}$, dont la valeur \dot{x} possède pour presque tout t la propriété de minimum ci-dessus, on aura pour presque tout t , l'égalité $\dot{s} = \text{proj}_Q \dot{x}$ et toute primitive x de cette fonction \dot{x} (pourvu, naturellement, que $x(0) \in U + g(0)$) constitue avec s une solution du problème d'évolution (1.6), (1.7), (1.8), (1.9).

En ce sens on peut dire que la condition de minimum en question, à vérifier pour presque tout t , est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $t \mapsto x(t)$, absolument continue, soit une solution du problème.

REMARQUE 2. La proposition montre que si notre problème d'évolution possède une solution, alors, pour presque tout t , la restriction à $U + \dot{g}$ de la fonction (3.9) possède un minimum. Il est intéressant de rapprocher ce fait de la condition de charge sûre : cette condition implique directement l'existence du minimum. En effet $s+Q$ contient C ; donc si la variété $V+c = V+s$ rencontre l'intérieur de C , elle rencontre l'intérieur de $s+Q$, c'est-à-dire que l'espace vectoriel V rencontre l'intérieur du cône Q (noter que, par dualité, on montre que cela équivaut à l'existence d'un hyperplan parallèle à U et rencontrant P selon une semelle compacte). Pour établir l'existence du minimum attendu il suffit de prouver que la fonction $q+\psi_{U+\dot{g}}$ est inf-compacte pour toute pente (cf. MOREAU [3]) c'est-à-dire que sa fonction duale est partout finie et continue. Comme q est partout finie et continue, cette fonction duale est donnée par l'inf-convolution

$$(3.13) \quad q^* \nabla_{U+\dot{g}} \psi^* = q^* \nabla_V (\psi_V + (\dot{g}|\cdot))$$

Or

$$q = \psi_P \nabla - \frac{1}{2} |\cdot|^2$$

d'où

$$q^* = \psi_Q + \frac{1}{2} |\cdot|^2$$

L'ensemble des points où q^* est finie et continue est l'intérieur de Q ; l'ensemble des points où la fonction écrite en (3.13) est finie et continue est donc $V + \text{int } Q$, à savoir l'espace H entier (puisque $\text{int } Q$ contient des boules de rayon arbitrairement grand centrées en des points de V).

REMARQUE 5. Ecrivons (3.12) sous la forme

$$(3.14) \quad \dot{c} = \text{proj}_U \text{grad } q(\dot{x})$$

Toutes choses étant fixées par ailleurs, c'est-à-dire en supposant connues la "tension" s et la vitesse de déplacement forcé \dot{g} , cette relation lie la vitesse de charge \dot{c} et la vitesse de déplacement visible $\dot{x} \in U + \dot{g}$. Rappelons qu'on avait supposé que la fonction charge $t \mapsto c$, donc aussi la vitesse de charge \dot{c} , prennent leurs valeurs dans U ; cela parce que deux charges ayant pour différence un élément de V sont équivalentes au regard du problème d'évolution en présence de la liaison parfaite $x \in U + \dot{g}$. Autrement dit, dans la formulation du problème d'évolution, la charge n'intervenait que par sa composante en U et c'est cette composante qui est notée c . Il sera plus clair ici d'introduire la totalité de la charge, élément de H noté c' , d'où une vitesse de charge notée \dot{c}' ; alors

$$\dot{c} = \text{proj}_U \dot{c}'$$

De la sorte (3.14) équivaut à

$$\dot{c}' \in V + \text{grad } q(\dot{x})$$

c'est-à-dire, compte tenu de $\dot{x} \in U + \dot{g}$,

$$(3.15) \quad \dot{c}' \in \partial(q + \psi_{U+\dot{g}}) (\dot{x}) .$$

Telle est, selon l'argumentation de la remarque 1, une condition nécessaire et suffisante de compatibilité entre \dot{c}' et \dot{x} . Cette relation équivaut, si on préfère, à

$$(3.16) \quad \dot{x} \in \partial(q + \psi_{U+\dot{g}})^* (\dot{c}') ,$$

écriture qui implique $\dot{x} \in U + \dot{g}$; le calcul de $(q + \psi_{U+\dot{g}})^*$ a été développé dans la remarque 2.

Le fait que cette relation entre les éléments "visibles" \dot{c}' et \dot{x} est une relation sous-différentielle, au sens de la dualité de H avec lui-même, nous semble important pour la raison suivante : la théorie développée dans ce rapport est celle d'un système présentant une plasticité parfaite. Mais B. NAYROLES [1] et Q.S. NGUYEN [1], [2], [3] suggèrent que les plasticités avec écrouissage peuvent être décrites comme des plasticités parfaites, moyennant l'introduction d'un nombre suffisant de paramètres cachés, tels que p , c'est-à-dire en utilisant un espace H suffisamment grand. La propriété que nous venons de dégager, concernant les éléments visibles \dot{c}' et \dot{x} (nous nous sommes limités toutefois au cas où la forme quadratique "énergie élastique" est définie positive sur H ; une théorie plus générale fera l'objet d'un autre rapport) fournit un test susceptible éventuellement d'infirmar par l'expérience ce "postulat de plasticité parfaite sous-jacente".

Certes, la difficulté expérimentale est notable : toute valeur non nulle de \dot{x} risque a priori de correspondre à une valeur non nulle de \dot{p} , c'est-à-dire que l'expérience une fois faite laissera l'échantillon dans un état altéré même si les variables visibles sont ensuite ramenées à leurs valeurs initiales ; il faudra donc disposer d'une collection d'échantillons pour lesquels on puisse affirmer que les variables cachées ont la même valeur. Toute étude expérimentale de l'écroutissage se heurte à des difficultés de cette sorte.

REMARQUE 4. On peut reprendre la démonstration de la proposition en remplaçant (3.2) et (3.3) par (3.4) et (3.5). Si on note q' la fonction

$$q'(u) = \frac{1}{2} [\text{dist}(u, P-P)]^2 .$$

A tout instant où les dérivées \dot{c} , \dot{g} , \dot{s} , \dot{p} existent, la valeur de $\dot{x} = \dot{p} + \dot{s}$ est un point de la variété affine $U + \dot{g}$ en lequel la restriction à cette variété de la fonction

$$u \mapsto q'(u) - (\dot{c}|u)$$

atteint son minimum.

La fonction q' est, a priori, plus maniable que q : c'est le demi-carré de la distance à un sous-espace vectoriel, de H , donc une forme quadratique. Mais dans ce cadre, on n'a plus la propriété réciproque dégagée dans la remarque 1 : si, partant d'un \dot{x} possédant la propriété de minimum ci-dessus, on lui associe $\dot{s} = \text{proj}_{Q \cap -Q} \dot{x}$ et $\dot{p} = \text{proj}_{P-P} \dot{x}$, on a bien toujours $\dot{s} \in V + \dot{c}$ et $\dot{x} = \dot{p} + \dot{s}$, mais il n'est plus assuré que \dot{p} appartienne à P .

REFERENCES

KOITER W.T.

- [1] General theorems for elastic-plastic solids, in Progress in Solid Mechanics (I.N. SNEDDON, R. HILL, editors), vol 1, North Holland Pub. Co. (1964), p.166-221.

MOREAU J.J.

- [1] Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes convexes mutuellement polaires, C.R. Acad. Sci., 255 (1962), 238-240
- [2] Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 273-299.
- [3] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux Dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1967 (multigraphié 108 p.).
- [4] Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C.R. Acad. Sci., ser. A 271 (1970), 603-611.
- [5] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, C.R. Acad. Sci. sér. A, 273 (1971), 118-121.
- [6] Rafle par un convexe variable, 1ère partie, Séminaire d'Analyse Convexe, 1971, exp. n° 15 (42 p.) ; 2ème partie, *ibid.*, 1972, exp. n° 3 (36 p.).
- [7] Rétraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, 1972, exp. n° 13 (90 p.).
- [8] Intersection de deux convexes mobiles, Séminaire d'Analyse Convexe, 1973, exp. n° 1 (26 p.).
- [9] Sélections de multiapplications à rétraction finie, C.R. Acad. Sci., Sér. A, 276 (1973), 265-268.

- [10] Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien, C.R. Acad. Sci., Sér. A, 276 (1973), 791-794.
- [11] Intersection de deux convexes mobiles dans un espace normé, C.R. Acad. Sci., Sér. A, 276 (1973), 1505-1508.

NAYROLES B.

- [1] Structure algébrique des théories classiques de plasticité, Séminaire "Plasticité et viscoplasticité", Thème 3, Ecole Polytechnique, Paris 1972.

NGUYEN Q.S.

- [1] Quelques problèmes relatifs aux matériaux élastoplastiques avec écrouissage négatif ou positif, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Paris.
- [2] Evolution de la contrainte et de l'écrouissage pour certains matériaux à écrouissage positif, Séminaire "Plasticité et Viscoplasticité", Thème 3, Ecole Polytechnique, Paris, 1972.
- [3] Sur les lois de comportement élasto-visco-plastique à potentiel généralisé, C.R. Acad. Sci, Sér A, 277 (1973), 319-322.

ROCKAFELLAR R.T.

- [1] Convex integral functionals and duality, in E.H. ZARANTONELLO, editor, contributions to nonlinear functional analysis, Academic Press, 1971, p.215-236.

COMPLEMENT A LA DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.e.

Invoyer le théorème d'intersection (cf. MOREAU [8], § 7) pour obtenir la continuité absolue du convexe mobile $t \mapsto (C-c(t) - g(t)) \cap V$ suppose que cette intersection est bornée, c'est-à-dire que le cône de récession de C a une intersection avec V réduite à $\{0\}$. Dans le cas général on peut procéder comme suit pour établir l'existence de la fonction y solution de (2.9) s'accordant à la donnée initiale y_0 .

LEMME. Soit G un convexe fermée mobile de H et soit B une boule fermée fixe. Une fonction y , à valeurs dans l'intérieur de B , est solution du processus de raffle par G si et seulement si elle est solution du processus de raffle par $G \cap B$.

Evident, puisque

$$y \in G \cap \text{int } B \text{ implique}$$

$$\partial_{G \cap B} \psi(y) = \partial_G \psi(y) + \partial_B \psi(y) = \partial_G \psi(y).$$

On va donc chercher à exhiber une boule B telle que la solution du processus de raffle, pour la donnée initiale considérée, par le convexe mobile borné $(C-c-g) \cap V \cap B$ prenne ses valeurs dans $\text{int } B$, de sorte que cette fonction sera aussi solution de (2.9).

On utilise pour cela un complément au théorème d'intersection (voir la démonstration dans : NOTE COMPLEMENTAIRE SUR LES INTERSECTIONS DE CONVEXES MOBILES, Séminaire d'Analyse Convexe, 1973, Exposé n° 16) de ce que l'intérieur du convexe mobile $t \mapsto C - c(t) - g(t)$ non nécessairement borné, à variation (absolument) continue, possède pour tout $t \in [0, T]$

une intersection non vide avec V , ce complément permet de conclure que la fonction numérique finie

$$t \mapsto d(y_0, (C-c(t) - g(t)) \cap V)$$

est continue sur $[0, T]$, donc majorée par un réel R_0 . Soit B_1 une boule fermée de centre y_0 , de rayon $R_1 > R_0$. Pour tout $t \in [0, T]$, l'intérieur de B_1 rencontre l'intérieur de $C - c(t) - g(t)$; il s'agit maintenant d'intersection bornée, donc le théorème d'intersection s'applique pour montrer que le convexe mobile

$$t \mapsto (C-c(t) - g(t)) \cap V \cap B_1, \text{ noté } D_1(t),$$

est absolument continu. Le processus de rafle par D_1 possède donc une solution pour toute donnée initiale dans $D_1(0)$; de plus, la fonction $t \mapsto \text{var}(D_1; 0, t)$ étant continue, il existe une subdivision finie

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$$

de l'intervalle $[0, T]$ telle que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on ait

$$\text{var}(D_1; t_{i-1}, t_i) < R_1 - R_0.$$

Notons u_i une solution du processus de rafle par D_1 sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$; on sait que la variation de cette fonction est majorée par celle de D_1 ; choisissons la valeur initiale $u_i(t_{i-1})$ à une distance de y_0 moindre que R_0 ; alors on est assuré que $u_i(t) \in \text{int } B_1$ pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Soit B une boule de centre y_0 , de rayon $R > R_1$ et soit y la solution du processus de raffle, pour la donnée initiale $y(0) = y_0$, par le convexe mobile

$$t \mapsto (C-c(t) - g(t)) \cap V \cap B, \text{ noté } D(t),$$

Vu le lemme de tout à l'heure la fonction u_i définie ci-dessus est aussi solution du processus de rafle par D sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, ce qui fait que, sur cet intervalle, la fonction numérique

$$t \mapsto |u_i(t) - y(t)|$$

est décroissante. Il en résulte visiblement que, pour tout $t \in [0, T]$, la distance $|y_0 - y(t)|$ est majorée par un réel M dont la construction fait intervenir les $2n$ points $u_i(t_{i-1}), u_i(t_i)$, ainsi que R_0 et R_1 , mais non la valeur de R . Si donc on choisit $R > M$, on sera assuré que $y(t)$ prend ses valeurs dans l'intérieur de B , donc est solution de (2.9), d'après le lemme.