



**HAL**  
open science

## Note complémentaire sur les intersections de convexes mobiles

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Note complémentaire sur les intersections de convexes mobiles. 1973. hal-02309469

**HAL Id: hal-02309469**

**<https://hal.science/hal-02309469>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1973, Exposé n° 16

NOTE COMPLEMENTAIRE SUR LES INTERSECTIONS  
DE CONVEXES MOBILES

par

J.J. MOREAU

Les besoins de la théorie des systèmes mécaniques élastoplastiques (cf. [2]) nous conduisent à apporter le complément suivant aux résultats des paragraphes 5 et 6 d'un rapport antérieur [1].

PROPOSITION. Soit  $T$  un espace topologique et soient  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  deux multiapplications de  $T$  dans l'espace normé  $E$ , à valeurs convexes. Soit  $s \in T$  tel que

$$(1) \quad A_s \cap \text{int } B_s \neq \emptyset$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow s} e(A_t, A_s) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{t \rightarrow s} e(A_s, A_t) = 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow s} e(B_t, B_s) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{t \rightarrow s} e(B_s, B_t) = 0).$$

Alors, si  $x$  est un point fixe de  $E$ , la fonction numérique  $t \mapsto d(x, A_t \cap B_t)$  est s.c.i. (resp. s.c.s.) au point  $s$ .

Démonstration de la semi-continuité inférieure : L'hypothèse (1) fait que  $d(x, A_s \cap B_s) < +\infty$ . On doit montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $V$ ,

---

Reçu le 21 Janvier 1974



voisinage de  $s$  dans  $T$  assurant l'implication

$$(2) \quad t \in V \Rightarrow d(x, A_t \cap B_t) \geq d(x, A_s \cap B_s) - \varepsilon.$$

Choisissons une boule ouverte  $\beta$ , de centre  $x$ , rencontrant  $A_s \cap \text{int } B_s$  ; pour établir (2) il suffit d'établir l'implication analogue où l'on remplace les ensembles considérés par leurs intersections avec  $\beta$ . En effet, si  $A_t \cap B_t \cap \beta \neq \emptyset$  on a  $d(x, A_t \cap B_t \cap \beta) = d(x, A_t \cap B_t)$  et si  $A_t \cap B_t \cap \beta = \emptyset$  c'est que  $d(x, A_t \cap B_t)$  est au moins égal au rayon de  $\beta$ , lequel est au moins égal à  $d(x, A_s \cap B_s)$ .

Notons  $B'_t = B_t \cap \beta$  et  $B'_s = B_s \cap \beta$  ; l'inégalité triangulaire pour l'écart  $e$ , appliquée aux ensembles  $\{x\}$ ,  $A_t \cap B'_t$ ,  $A_s \cap B'_s$  donne

$$(3) \quad d(x, A_s \cap B'_s) \leq d(x, A_t \cap B'_t) + e(A_t \cap B'_t, A_s \cap B'_s).$$

Or la proposition 5 du rapport cité montre, puisqu'on a maintenant des intersections bornées,

$$\lim_{t \rightarrow s} e(B'_t, B'_s) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow s} e(A_t \cap B'_t, A_s \cap B'_s) = 0.$$

Donc (3) entraîne l'existence de  $V$  assurant (2).

Démonstration de la semi-continuité supérieure : le début du paragraphe 6 du rapport cité n'invoque pas l'hypothèse  $\text{diam } A_s \cap B_s < +\infty$  et peut donc être repris : il existe  $r > 0$  et  $a \in A_s$  tels que

$$d(a, E \setminus B_s) > r$$



On obtient ensuite un voisinage  $V$  de  $s$  dans  $T$  tel que pour chaque  $t \in V$  il existe  $a_t \in A_t$  tel que

$$|a - a_t| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$d(a_t, E \setminus B_t) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc si on appelle  $\beta$  une boule fixe de centre  $x$  et de rayon au moins égal à  $|x - a| + \frac{\epsilon}{4}$  on a pour tout  $t \in V$

$$d(x, A_t \cap B_t) = d(x, A_t \cap B_t \cap \beta).$$

Il s'agit maintenant d'ensembles bornés, donc justiciables des résultats de ce paragraphe 3, c'est-à-dire que, si on note

$$B'_t = B_t \cap \beta, \text{ on a}$$

$$\lim_{t \rightarrow s} e(B'_s, B'_t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow s} e(A_s \cap B'_s, A_t \cap B'_t) = 0.$$

La semi continuité supérieure annoncée résulte alors de l'inégalité

$$d(x, A_t \cap B'_t) \leq d(x, A_s \cap B'_s) + e(A_s \cap B'_s, A_t \cap B'_t).$$

Entre autres usages de la proposition ci-dessus, mentionnons :

COROLLAIRE. Soit  $I$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  ; soient  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  deux multiapplications de  $I$  dans l'espace normé  $E$ , à valeurs convexes, soit  $x$  un point de  $E$ . On suppose que, pour tout  $t \in I$ ,

$$A_t \cap \text{int } B_t \neq \varnothing.$$

Alors, si les deux multiapplications sont à variation finie continue sur  $I$  (resp. absolument continues, resp. lipschitziennes) il en est de même pour



la fonction numérique

$$t \mapsto d(x, A_t \cap B_t).$$

En effet, la proposition précédente montre que la fonction numérique finie  $t \mapsto d(x, A_t \cap B_t)$  est s.c.s. sur l'intervalle compact  $I$ , donc strictement majorée par une constante  $R > 0$ . Pour tout  $t \in I$ , la boule ouverte  $\beta$ , de centre  $x$ , de rayon  $R$ , rencontre  $A_t \cap B_t$ , donc rencontre l'intérieur de  $B_t$ . On peut alors appliquer les résultats du paragraphe 7 du rapport cité aux ensembles  $A_t$  et  $B'_t = B_t \cap \beta$  : on conclut que la multiapplication  $t \mapsto A_t \cap B'_t$  est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne). Les conclusions concernant la fonction numérique

$$t \mapsto d(x, A_t \cap B_t) = d(x, A_t \cap B'_t)$$

résultent alors de l'inégalité

$$|d(x, A_t \cap B'_t) - d(x, A_s \cap B'_s)| \leq h(A_t \cap B'_t, A_s \cap B'_s)$$

pour tout  $t$  et tout  $s$  dans  $I$  (rappelons qu'on note  $h$  la distance de Hausdorff).

REFERENCES

- [1] J.J. MOREAU, Intersection de deux convexes mobiles,  
Séminaire d'Analyse convexe, 1973, exposé n°1.
- [2] \_\_\_\_\_ Systèmes élastoplastiques de liberté finie,  
ibid, 1973, exposé n° 12.