



**HAL**  
open science

## Intersection de deux convexes mobiles

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Intersection de deux convexes mobiles. 1973. hal-02309467

**HAL Id: hal-02309467**

**<https://hal.science/hal-02309467>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## INTERSECTION DE DEUX CONVEXES MOBILES

J. J. MOREAU1- Introduction

Soit  $T$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  ; soit  $(A_t)$ ,  $t \in T$ , une famille de parties d'un espace métrique  $E$ , famille indexée dans  $T$ , ce qui peut aussi bien s'énoncer comme une multiapplication (ou application multivoque) de  $T$  dans  $E$ . Employant le langage de la cinématique on peut aussi interpréter la variable  $t$  comme le temps et dire que  $t \mapsto A_t$  est un ensemble mobile dans l'espace métrique  $E$ .

Plusieurs travaux récents concernant des équations d'évolution ou des propriétés de sélection (cf. [1]· [2]· [6]· [7]· [8]) mettent au premier plan la notion de variation d'une telle multiapplication, au sens de la distance de Hausdorff entre parties de  $E$ .

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux parties de  $E$ , nous introduisons l'écart non symétrique (cf. [7], [8]) :

$$(1.1) \quad e(A_1, A_2) = \sup_{x \in A_1} d(x, A_2)$$

(expression à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$  que nous appelons l'excès de  $A_1$  sur  $A_2$  ; le sup est entendu au sens de l'ordre de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , ce qui

donne  $e(A_1, A_2) = 0$  pour  $A_1 = \phi$  ; la distance de Hausdorff (éventuellement infinie) des ensembles  $A_1$  et  $A_2$  s'écrit alors

$$h(A_1, A_2) = \max \{e(A_1, A_2), e(A_2, A_1)\} .$$

Soit  $[s, t]$  un sous-intervalle compact de  $T$  ; à toute subdivision finie de cet intervalle, soit

$$S : \quad s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t ,$$

associons

$$V(S) = \sum_{i=1}^n h(A_{\tau_{i-1}}, A_{\tau_i}) .$$

Le sup des  $V(S)$  pour  $S$  décrivant l'ensemble des subdivisions finies de  $[s, t]$  est appelé variation de la multiapplication  $A$  sur l'intervalle  $[s, t]$  ; notation :  $\text{var}(A ; s, t)$  .

Si, pour tout  $[s, t] \subset T$  , cette variation est finie, nous dirons que  $A$  est à variation finie sur  $T$  ; dans ce cas on définit, à une constante additive arbitraire près, une fonction numérique croissante  $v : T \rightarrow \mathbb{R}$  , dite variation indéfinie de  $A$  sur  $T$  , telle que

$$\text{var}(A ; s, t) = v(t) - v(s) .$$

La fonction numérique  $v$  est absolument continue sur  $[s, t]$  si et seulement si à tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer  $\eta > 0$  tel que, pour  $]\sigma_i, \tau_i[$  famille de sous-intervalles ouverts deux à deux disjoints de  $[s, t]$  , on ait l'implication

$$\sum_i |\tau_i - \sigma_i| < \eta \quad \Rightarrow \quad \sum_i h(A_{\sigma_i}, A_{\tau_i}) < \varepsilon .$$

On dit alors que la multiapplication  $A$  est absolument continue sur  $[s, t]$  (resp. elle est dite localement absolument continue sur  $T$  si elle est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de  $T$ ).

Il existe alors  $\dot{v} \in L^1(s, t; \mathbb{R})$  (resp.  $L^1_{loc}(T, \mathbb{R})$ ), vitesse de l'ensemble mobile, telle que

$$\text{var}(A; s, t) = \int_s^t \dot{v}(\tau) d\tau .$$

La multiapplication  $A$  est dite lipschitzienne de rapport  $\ell$  si, quels que soient  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $T$ , on a

$$h(A_\sigma, A_\tau) \leq \ell |\sigma - \tau| .$$

Il faut et suffit pour cela qu'elle soit localement absolument continue, avec  $\dot{v} \leq \ell$  presque partout dans  $T$ .

Cela rappelé, voici l'objet du présent rapport : on suppose que  $E$  est un espace vectoriel normé réel, que  $T$  est un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et que  $t \mapsto A_t$ ,  $t \mapsto B_t$  sont deux multiapplications de  $T$  dans  $E$ , à valeurs convexes. Si ces deux multiapplications sont à variation finie continue, resp. absolument continues, resp. lipschitzienne, en est-il de même pour la multiapplication

$$t \mapsto A_t \cap B_t \quad ?$$

La réponse est affirmative si, pour chaque  $t \in T$ ,  $A_t$  rencontre l'intérieur de  $B_t$  avec, de plus,

$$\text{diam } A_t \cap B_t < +\infty .$$

Cette propriété est d'importance pratique pour l'exploitation de résultats que nous avons antérieurement formulés, lors de l'étude de certaines équations d'évolution introduites par la théorie des systèmes mécaniques élastoplastiques (cf. [5]).

Un cas particulier frappant est celui où  $B_t$  est une boule ouverte indépendante de  $t$  : il vient que si la multiapplication

$t \mapsto A_t$ , à valeurs convexes, possède une variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) il en est de même de sa trace sur la boule ouverte fixe en question, pour tout intervalle compact, si cette trace est non vide pour tout  $t$  dans l'intervalle en question.

Le rapport débute par trois paragraphes techniques où l'on établit diverses inégalités utiles pour la suite. Est étudiée, en particulier, la quantité  $e(A, E \setminus B)$  :  $A$  rencontre l'intérieur de  $B$  si et seulement si cette quantité est  $> 0$ .

Viennent, aux paragraphes 5 et 6, des propriétés de semi-continuité en un point, en supposant que  $T$  soit un espace topologique quelconque et que  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  soient deux multiapplications de  $T$  dans  $E$ , à valeurs convexes : si  $s$  est un point de  $T$  on formule des conditions assurant

$$\lim_{t \rightarrow s} e(A_t \cap B_t, A_s \cap B_s) = 0$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow s} e(A_s \cap B_s, A_t \cap B_t) = 0.$$

En même temps ressortent la semi-continuité inférieure ou la semi-continuité supérieure au point  $s$  pour les fonctions numériques  $t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$  et  $t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$ .

Le théorème annoncé est établi au paragraphe 7.

Un dernier paragraphe est consacré au cas particulier où  $E$  est un espace hilbertien : on peut obtenir dans ce cas des inégalités plus précises en s'appuyant sur des propriétés angulaires.

L'appendice donne une démonstration du fait assez connu que

voici : si  $A$  et  $B$  sont deux parties convexes d'un e. v. t. et si l'une d'elles rencontre l'intérieur de l'autre alors les adhérences de ces ensembles vérifient

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} .$$

## 2- A propos de diamètres.

Soit  $E$  un espace métrique et soit  $A \subset E$  ; considérons le diamètre de  $A$  :

$$\text{diam } A = \sup \{d(x, y) : x \in A, y \in A\} ,$$

expression à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ . (pour toutes ces questions concernant des distances nous conviendrons d'entendre les "sup" au sens de l'ensemble ordonné  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , ce qui fait  $\text{diam } \emptyset = 0$ ).

Si  $A'$  est une autre partie de  $E$ , on a, avec la notation e rappelée dans l'introduction,

$$(2.1) \quad \text{diam } A' \leq \text{diam } A + 2e(A', A) .$$

En effet, cette inégalité est banale si  $A$  ou  $A'$  est vide. Sinon, soient  $x'$  et  $y'$  dans  $A'$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $x$  et  $y$  dans  $A$  tels que

$$d(x', x) \leq d(x', A) + \varepsilon$$

$$d(y', y) \leq d(y', A) + \varepsilon .$$

Alors

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y')$$

$$\leq \text{diam } A + d(x', A) + d(y', A) + 2\varepsilon .$$

En prenant les  $\sup$  pour  $x'$  et  $y'$  décrivant  $A'$ , on obtient

$$\text{diam } A' \leq \text{diam } A + 2e(A', A) + 2\varepsilon$$

aussi petit que soit  $\varepsilon$ , d'où (2.1).

On établit d'une manière analogue la propriété suivante :

Quel que soit  $a \in A$  et quel que soit  $b \in E$ ,

$$(2.2) \quad d(a, b) \leq \text{diam } A + d(b, A).$$

### 3- Boules contenues dans des convexes.

Supposons encore, pour l'instant, que  $E$  soit un espace métrique quelconque et soit  $B \subset E$ . La boule ouverte de centre  $a$ , de rayon  $\rho$ , est contenue dans  $B$  si et seulement si

$$\rho \leq d(a, E \setminus B).$$

Donc le point  $a$  appartient à l'intérieur  $\overset{\circ}{B}$  de l'ensemble  $B$  si et seulement si

$$d(a, E \setminus B) > 0.$$

Par suite, si  $A$  est un autre ensemble, on a l'équivalence

$$(3.1) \quad A \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset \iff e(A, E \setminus B) > 0.$$

Désormais, supposons que  $E$  soit un espace vectoriel réel normé ; soit  $F$  son dual ; sur l'un ou l'autre de ces espaces, on note  $|\cdot|$  la norme.

LEMME. Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux parties convexes de  $E$  et soit  $a \in E$  ;

alors

$$(3.2) \quad d(a, E \setminus B_1) \leq d(a, E \setminus B_2) + e(B_1, B_2) .$$

Démonstration. Pour simplifier les calculs, supposons faite une translation telle que  $a = 0$ . Soient  $g_1$  et  $g_2$ , définies sur  $F$ , les fonctions d'appui respectives des convexes  $B_1$  et  $B_2$ ; si ces ensembles ne sont pas vides (sans quoi l'inégalité est banale)  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions sous-linéaires, à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ , nulles à l'origine.

Soit  $\rho > 0$ ; la boule fermée de  $E$  de centre  $O$ , de rayon  $\rho$ , a pour fonction d'appui  $y \mapsto \rho|y|$ . Donc l'inégalité

$$(3.3) \quad \forall y \in F : \rho|y| \leq g_1(y)$$

exprime que cette boule est contenue dans l'adhérence  $\overline{B_1}$  et, par suite, que la boule ouverte correspondante est contenue dans  $B_1$ . Vu ce qu'on a dit plus haut cette dernière propriété équivaut à

$$(3.4) \quad \rho \leq d(O, E \setminus B_1) .$$

Par ailleurs, comme la fonction  $g_1$  est positivement homogène, (3.3) équivaut à

$$(3.5) \quad \forall y \in \sigma : \rho \leq g_1(y) ,$$

$\sigma$  désignant la sphère unité de  $F$ . D'après [7], p. 13.16, équation (2.15), on a

$$\forall y \in \sigma : g_1(y) \leq g_2(y) + e(B_1, B_2) .$$

En supposant  $e(B_1, B_2) < +\infty$  (sans quoi l'inégalité (3.2) à démontrer est banale), il vient donc que (3.5) implique

$$\forall y \in \sigma : \rho - e(B_1, B_2) \leq g_2(y) ,$$

ce qui implique (banalement dans le cas  $\rho - e(B_1, B_2) \leq 0$ )

$$\rho - e(B_1, B_2) \leq d(0, E \setminus B_2) .$$

Bref, pour  $\rho > 0$ , (3.4) implique

$$\rho \leq d(0, E \setminus B_2) + e(B_1, B_2) ,$$

d'où l'inégalité (3.2).

De là nous tirons :

PROPOSITION. Soient  $B_1$  et  $B_2$  des convexes quelconques de l'espace normé  $E$  et soient  $A_1$  et  $A_2$  des parties quelconques de  $E$  ; alors

$$(3.6) \quad e(A_1, E \setminus B_1) \leq e(A_2, E \setminus B_2) + e(A_1, A_2) + e(B_1, B_2) .$$

En effet (3.2) entraîne

$$\sup_{a \in A_1} d(a, E \setminus B_1) \leq \sup_{a \in A_1} d(a, E \setminus B_2) + e(B_1, B_2) ,$$

c'est-à-dire

$$e(A_1, E \setminus B_1) \leq e(A_1, E \setminus B_2) + e(B_1, B_2) ,$$

d'où (3.6) en invoquant l'inégalité triangulaire :

$$e(A_1, E \setminus B_2) \leq e(A_1, A_2) + e(A_2, E \setminus B_2) .$$

#### 4- Inégalité fondamentale.

PROPOSITION. Soient  $A$  et  $B$  deux parties convexes de l'espace normé  $E$  ; on suppose qu'il existe une boule ouverte, de centre  $a \in A$ ,

de rayon  $\rho > 0$ , contenue dans  $B$ ; alors

$$(4.1) \quad \forall x \in E : d(x, A \cap B) \leq \left(1 + \frac{|x-a|}{\rho}\right)(d(x, A) + d(x, B)) .$$

Démonstration. Soient  $f$  et  $g$ , définies sur le dual  $F$  de  $E$ , les fonctions d'appui respectives de  $A$  et  $B$ . Il est assez classique (cf. par exemple, [4] ou [7]) que

$$d(x, A) = \sup \{ \langle x, u \rangle - f(u) : u \in F, |u| \leq 1 \}$$

et expression analogue pour  $d(x, B)$ , d'où

$$d(x, A) + d(x, B) = \sup \{ \langle x, u+v \rangle - f(u) - g(v) : |u| \leq 1, |v| \leq 1 \} .$$

Dans ce qui suit on posera

$$\varphi(u, v) = \langle x, u+v \rangle - f(u) - g(v) .$$

Cette fonction  $\varphi$  étant positivement homogène, il vient, plus généralement, que si  $k$  désigne un réel  $> 0$ , on a

$$(4.2) \quad k(d(x, A) + d(x, B)) = \sup \{ \varphi(u, v) : |u| \leq k, |v| \leq k \} .$$

Allégeons les calculs en supposant faite une translation telle que  $a = 0$ . L'hypothèse  $a \in A$  implique alors :

$$(4.3) \quad \forall u \in F : f(u) \geq 0$$

et l'hypothèse que la boule ouverte de centre  $a = 0$ , de rayon  $\rho > 0$  est contenue dans  $B$  :

$$(4.4) \quad \forall v \in F : g(v) \geq \rho |v| .$$

Constatons que la fonction d'appui de  $A \cap B$  est égale à l'inf-convolution  $f \nabla g$  :

$$(f \nabla g)(w) = \inf \{ f(u) + g(v) : u \in F, v \in F, u + v = w \} .$$

En effet,  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\Gamma(F, E)$  (pour tous les éléments de la théorie des fonctions convexes invoqués ici, voir [3]);  $f$  est minorée d'après (4.3) et, d'après (4.4),  $g$  est inf-compacte pour la topologie faible  $\sigma(F, E)$ ; donc  $f \nabla g$  appartient à  $\Gamma(F, E)$  ce qui fait qu'elle est égale à sa bipolaire  $(f \nabla g)^{**}$ . Or on sait que

$$(f \nabla g)^* = f^* + g^*$$

et que  $f^*$  et  $g^*$  sont les fonctions indicatrices  $\psi_{\bar{A}}$  et  $\psi_{\bar{B}}$  des adhérences des convexes  $A$  et  $B$ ; or

$$\psi_{\bar{A}} + \psi_{\bar{B}} = \psi_{\bar{A} \cap \bar{B}} .$$

De ce que  $A$  rencontre l'intérieur de  $B$  il résulte (cf. Appendice)

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B} .$$

Bref

$$(f \nabla g)^* = \psi_{\overline{A \cap B}} = (\psi_{A \cap B})^{**}$$

de sorte que  $f \nabla g$  est bien la fonction d'appui de  $A \cap B$ .

De là l'expression suivante pour la distance de  $x$  à  $A \cap B$ :

$$\begin{aligned} d(x, A \cap B) &= \sup \{ \langle x, w \rangle - (f \nabla g)(w) : |w| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \sup \{ \langle x, w \rangle - f(u) - g(v) : u+v = w \} : |w| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ \varphi(u, v) : |u+v| \leq 1 \} . \end{aligned}$$

Mais, vu (4.3) et (4.4), on a l'implication

$$|u+v| \leq 1 \implies \varphi(u, v) \leq |x| - \rho |v| ;$$

donc si  $|v| > \frac{|x|}{\rho}$ , la valeur de  $\varphi(u, v)$  est inférieure à  $\varphi(0, 0) = 0$ ; cela permet de remplacer l'expression ci-dessus par

$$(4.3) \quad d(x, A \cap B) = \sup \{ \varphi(u, v) : |u+v| \leq 1, |v| \leq \frac{|x|}{\rho} \} .$$

Mais

$$|u+v| \leq 1, |v| \leq \frac{|x|}{\rho} \Rightarrow |u| \leq 1 + \frac{|x|}{\rho}.$$

Donc si, en (4.2), on prend  $k = 1 + \frac{|x|}{\rho}$ , la comparaison des ensembles sur lesquels on prend le sup de  $\varphi(u, v)$  fournit

$$d(x, A \cap B) \leq \left(1 + \frac{|x|}{\rho}\right) (d(x, A) + d(x, B)),$$

ce qui est bien (4.1), vu la translation faite.

COROLLAIRE. Soient A et B deux parties convexes de E ; soient  $\alpha$  et  $\rho$  dans  $]0, +\infty[$  tels que

$$(4.4) \quad \alpha < \rho < e(A, E \setminus B).$$

Pour tout  $x \in E$  tel que

$$(4.5) \quad d(x, A) + d(x, B) \leq \alpha$$

on a

$$(4.6) \quad d(x, A \cap B) \leq \frac{\rho + \text{diam } A \cap B}{\rho - \alpha} (d(x, A) + d(x, B)).$$

(ce qui n'a d'intérêt que si  $\text{diam } A \cap B < +\infty$ ).

Démonstration. Vu (4.4), il existe  $a \in A$  vérifiant avec  $\rho$  les hypothèses de la Proposition précédente ; en invoquant (2.2) on a, d'autre part,

$$|x-a| \leq \text{diam } A \cap B + d(x, A \cap B).$$

Donc (4.1) entraîne

$$d(x, A \cap B) \leq \left(1 + \frac{\text{diam } A \cap B + d(x, A \cap B)}{\rho}\right) (d(x, A) + d(x, B))$$

En notant S le premier membre de (4.5) et D le premier membre

de (4.6), cela s'écrit

$$\rho D \leq (\rho + \text{diam } A \cap B + D) S .$$

Si  $x$  vérifie (4.5) on a  $\rho - S \geq \rho - a > 0$ , d'où

$$D \leq \frac{\rho + \text{diam } A \cap B}{\rho - S} S \leq \frac{\rho + \text{diam } A \cap B}{\rho - a} S$$

c'est-à-dire (4.6) .

Remarque. Le cas  $e(A, E \setminus B) = +\infty$  est sans intérêt ; si  $\text{diam } A \cap B < +\infty$ , il exige  $B = E$ . Si  $0 < e(A, E \setminus B) < +\infty$ , on peut choisir  $\rho$  arbitrairement voisin de cette quantité d'où, en passant à la limite, la possibilité de faire  $\rho = e(A, E \setminus B)$  en (4.6).

#### 5- Première semi-continuité.

PROPOSITION. Soit  $T$  un espace topologique et soient  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  deux multiapplications de  $T$  dans l'espace normé  $E$ , à valeurs convexes. Soit  $s \in T$  tel que

$$(5.1) \quad \text{diam } A_s \cap B_s < +\infty$$

$$(5.2) \quad A_s \overset{\circ}{\cap} B_s \neq \emptyset$$

$$(5.3) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(A_t, A_s) = 0$$

$$(5.4) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(B_t, B_s) = 0 .$$

Alors

$$(5.5) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(A_t \cap B_t, A_s \cap B_s) = 0$$

et les deux fonctions numériques

$$t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$$

$$t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$$

sont s. c. s. au point  $s$  .

Démonstration. Soient  $\alpha$  et  $\rho$  dans  $]0, +\infty[$  tels que

$$\alpha < \rho < e(A_s, E \setminus B_s) ;$$

le dernier membre est bien  $> 0$  , en vertu de l'hypothèse (5.2).

D'après (5.3) et (5.4) il existe  $V$  , voisinage de  $s$  dans  $T$  tel que, pour tout  $t \in V$  ,

$$e(A_t, A_s) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$e(B_t, B_s) \leq \frac{\alpha}{2} .$$

Donc, si  $t \in V$  et  $x \in A_t \cap B_t$  , on a

$$d(x, A_s) + d(x, B_s) \leq \alpha ,$$

ce qui permet d'invoquer l'inégalité (4.6) :

$$d(x, A_s \cap B_s) \leq \frac{\rho + \text{diam } A_s \cap B_s}{\rho - \alpha} (e(A_t, A_s) + e(B_t, B_s))$$

En prenant le sup , pour  $x \in A_t \cap B_t$  , on obtient une majoration de  $e(A_t \cap B_t, A_s \cap B_s)$  qui fait que (5.5) découle immédiatement de (5.3) et (5.4).

La semi-continuité supérieure de la fonction  $t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$  vient alors de l'inégalité (2.1) :

$$\text{diam } A_t \cap B_t \leq \text{diam } A_s \cap B_s + 2e(A_t \cap B_t, A_s \cap B_s) .$$

La semi-continuité supérieure de la fonction  $t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$

(banale dans le cas, d'ailleurs très spécial, où  $e(A_S, E \setminus B_S) = +\infty$ )  
découle de l'inégalité (3.6) :

$$e(A_t, E \setminus B_t) \leq e(A_S, E \setminus B_S) + e(A_t, A_S) + e(B_t, B_S) \quad .$$

Remarque : (5.3) ou (5.4) ont lieu, en particulier, si les multi-applications considérées sont semi-continues supérieurement au point  $s$  ; il y a même équivalence avec cette semi-continuité supérieure si on suppose de plus  $A_S$  (resp.  $B_S$ ) compact (cf. [7], p. 13.31).

#### 6- Seconde semi-continuité.

PROPOSITION. Soit  $T$  un espace topologique et soient  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  deux multiapplications de  $T$  dans l'espace normé  $E$ , à  
valeurs convexes. Soit  $s \in T$  tel que

$$(6.1) \quad \text{diam } A_s \cap B_s < +\infty$$

$$(6.2) \quad A_s \overset{\circ}{\cap} B_s \neq \emptyset$$

$$(6.3) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(A_s, A_t) = 0$$

$$(6.4) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(B_s, B_t) = 0 \quad .$$

Alors

$$(6.5) \quad \lim_{t \rightarrow s} e(A_s \cap B_s, A_t \cap B_t) = 0$$

et les deux fonctions numériques

$$t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$$

$$t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$$

sont s. c. i. au point  $s$  .

Démonstration. L'hypothèse (6.2) fournit  $r > 0$  et  $a \in A_s$  tels que

$$d(a, E \setminus B_s) > r .$$

Les hypothèses (6.3) et (6.4) fournissent  $V$ , voisinage de  $s$  dans  $T$  tel que, pour tout  $t \in V$ , on ait

$$\begin{aligned} e(A_s, A_t) &< \frac{r}{4} \\ e(B_s, B_t) &< \frac{r}{4} . \end{aligned}$$

Pour chaque  $t \in V$  on a donc

$$d(a, A_t) < \frac{r}{4} ,$$

ce qui assure l'existence de  $a_t \in A_t$  tel que

$$|a - a_t| < \frac{r}{4} .$$

Par ailleurs l'inégalité (3.2) :

$$d(a, E \setminus B_s) \leq d(a, E \setminus B_t) + e(B_s, B_t)$$

entraîne que, si  $t \in V$ ,

$$d(a, E \setminus B_t) > r - e(B_s, B_t) > \frac{3r}{4}$$

et comme

$$d(a, E \setminus B_t) \leq |a - a_t| + d(a_t, E \setminus B_t)$$

il en résulte

$$d(a_t, E \setminus B_t) \geq \frac{r}{2} .$$

Alors l'inégalité (4.1) fournit

$$\forall x \in E : d(x, A_t \cap B_t) \leq \left(1 + \frac{2|x - a_t|}{r}\right) (d(x, A_t) + d(x, B_t))$$

Si  $x \in A_s \cap B_s$  on a

$$d(x, A_t) \leq e(A_s, A_t)$$

$$d(x, B_t) \leq e(B_s, B_t)$$

$$|x - a_t| \leq |x - a| + |a - a_t| \leq \text{diam } A_s \cap B_s + \frac{r}{4} .$$

Donc

$$e(A_s \cap B_s, A_t \cap B_t) \leq \left( \frac{3}{2} + \frac{2 \text{ diam } A_s \cap B_s}{r} \right) (e(A_s, A_t) + e(B_s, B_t)),$$

ce qui fait que (6.5) découle de (6.3) et (6.4).

La semi-continuité inférieure de la fonction numérique  $t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$  résulte de l'inégalité (2.1) :

$$\text{diam } A_s \cap B_s \leq \text{diam } A_t \cap B_t + 2e(A_s \cap B_s, A_t \cap B_t) .$$

La semi-continuité inférieure de la fonction numérique  $t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$  résulte de (3.6) :

$$e(A_s, E \setminus B_s) \leq e(A_t, E \setminus B_t) + e(A_s, A_t) + e(B_s, B_t) .$$

En particulier, si  $e(A_s, E \setminus B_s) = +\infty$ , il existe un voisinage  $V$  de  $s$  dans  $T$  tel que  $e(A_t, E \setminus B_t) = +\infty$  pour tout  $t \in V$ .

Remarque. Les propriétés (6.3), (6.4) ou (6.5) impliquent que les multiapplications  $A$ ,  $B$  ou  $A \cap B$ , respectivement, sont semi-continues inférieurement au point  $s$  (cf. [7] p. 13.35).

7- Variation sur un intervalle compact.

PROPOSITION. Soit  $T$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  ; soient  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  deux multiapplications de  $T$  dans l'espace normé  $E$ , à valeurs convexes ; on suppose que, pour tout  $t \in T$ ,

$$(7.1) \quad \text{diam } A_t \cap B_t < +\infty$$

$$(7.2) \quad A_t \cap B_t^{\circ} \neq \emptyset .$$

Alors, si les deux multiapplications sont à variation finie continue sur  $T$  (resp. absolument continues, resp. lipschitziennes), il en est de même pour la multiapplication  $t \mapsto A_t \cap B_t$ .

Démonstration. Puisque

$$h(A_s, A_t) = \max \{e(A_s, A_t), e(A_t, A_s)\}$$

$$h(B_s, B_t) = \max \{e(B_s, B_t), e(B_t, B_s)\}$$

la continuité des deux multiapplications au sens de la distance de Hausdorff entraîne que les hypothèses des Propositions 5 et 6 sont vérifiées pour tout  $s \in T$ .

La fonction numérique à valeurs finies

$$t \mapsto \text{diam } A_t \cap B_t$$

est de la sorte s. c. s. en tout point du compact  $T$ , donc majorée par un  $R < +\infty$ .

De même la fonction numérique  $t \mapsto e(A_t, E \setminus B_t)$ , à valeurs  $> 0$  d'après (7.2), est s. c. i. en tout point de  $T$ , donc minorée par un  $\rho > 0$  ; choisissons  $\alpha \in ]0, \rho[$ .

Les fonctions "variations indéfinies" des deux multiapplications  $t \mapsto A_t$  et  $t \mapsto B_t$  sont des fonctions numériques finies continues sur

$T$ , donc uniformément continues ; par suite, il existe  $p > 0$  tel que, pour  $\sigma$  et  $\tau$  points de  $T$ , la condition

$$(7.3) \quad |\sigma - \tau| \leq p$$

implique

$$h(A_\sigma, A_\tau) \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\rho}{2}$$

$$h(B_\sigma, B_\tau) \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\rho}{2} .$$

S'il en est ainsi on peut appliquer l'inégalité (4.6) pour obtenir

$$\forall x \in A_\sigma \cap B_\sigma : d(x, A_\tau \cap B_\tau) \leq k(d(x, A_\tau) + d(x, B_\tau))$$

avec

$$k = \frac{\rho + R}{\rho - \alpha} .$$

En prenant les  $\sup$  pour  $x \in A_\sigma \cap B_\sigma$ , cela donne

$$e(A_\sigma \cap B_\sigma, A_\tau \cap B_\tau) \leq k(e(A_\sigma, A_\tau) + e(B_\sigma, B_\tau))$$

et une inégalité semblable en échangeant  $\sigma$  et  $\tau$ , d'où

$$h(A_\sigma \cap B_\sigma, A_\tau \cap B_\tau) \leq k(h(A_\sigma, A_\tau) + h(B_\sigma, B_\tau)) .$$

Il n'y a plus qu'à invoquer la définition de la variation d'une multiapplication sur un intervalle compact  $[s, t] \subset T$  (cf. Introduction), en se restreignant à des subdivisions assez fines pour que chaque sous-intervalle ait une longueur moindre que  $p$ . On obtient ainsi

$$\text{var}(A \cap B ; s, t) \leq k(\text{var}(A ; s, t) + \text{var}(B ; s, t)) ,$$

ce qui fournit les conclusions attendues (noter que, dans le cas lipschitzien, le rapport de Lipschitz de  $A \cap B$  est a priori inconnu).

COROLLAIRE. Soit  $T$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  ; soit  $t \mapsto A_t$  une multiapplication de  $T$  dans l'espace normé  $E$  , à valeurs convexes, et soit  $B$  une boule ouverte constante telle que

$$\forall t \in T : A_t \cap B \neq \phi .$$

Alors si  $t \mapsto A_t$  est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne), il en est de même de la multiapplication  $t \mapsto A_t \cap B$  .

Remarque. Avec  $T$  éventuellement non compact, les conclusions précédentes peuvent être exploitées à titre local : si les multiapplications  $A$  et  $B$  sont à variation finie continue sur  $T$  et si  $s \in T$  est tel que  $\text{diam } A_s \cap B_s < +\infty$  ,  $A_s \cap B_s \neq \phi$  , les semi-continuités formulées aux paragraphes 5 et 6 fournissent un intervalle compact, voisinage de  $s$  dans  $T$  , sur lequel ces deux conditions sont partout satisfaites ; la multiapplication  $A \cap B$  est donc à variation finie continue sur ce voisinage de  $s$  . De même la propriété pour les deux multiapplications  $A$  et  $B$  d'avoir des variations localement absolument continues (resp. localement lipschitzienne) passe à l'intersection  $A \cap B$  , tant que  $\text{diam } A \cap B < +\infty$  et  $A \cap B \neq \phi$  .

#### 8- Cas d'un espace hilbertien.

Si l'espace normé  $E$  est un hilbertien  $H$  on peut obtenir des inégalités, légèrement meilleures que celles du paragraphe 4 , qui peuvent rendre service dans l'étude de multiapplication à variation finie non continue. La situation est dominée, dans ce cas hilbertien,

par des considérations angulaires, d'où l'intervention de la trigonométrie.

PROPOSITION. Soient A et B deux parties convexes de l'espace hilbertien H ; on suppose que B rencontre l'intérieur de A , c'est-à-dire qu'il existe une boule de centre  $b \in B$  , de rayon  $\rho > 0$  , contenue dans A. Alors

$$(8.1) \quad \forall x \in H : d(x, A \cap B) \leq k(d(x, A) + d(x, B))$$

où l'on peut prendre

$$k = \max \left\{ 1, \frac{1}{\rho} \sup_{y \in A \cap B} |y-b| \right\}$$

ou aussi

$$k = \max \left\{ 1, \frac{|x-b|}{\rho} \right\}$$

(ou toute autre valeur majorant l'une de celles-là, par exemple

$$k = \max \left\{ 1, \frac{\text{diam } A \cap B}{\rho} \right\} .$$

Démonstration. Les hypothèses impliquent  $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$  (voir appendice) , quitte à remplacer les ensembles par leurs adhérences, on peut donc raisonner en supposant A et B fermés. Alors  $A \cap B$  est fermé et

$$d(x, A \cap B) = |x-y|$$

avec

$$(8.2) \quad y = \text{proj}(x, A \cap B) .$$

L'inégalité (8.1) est triviale s'il se trouve que  $x = y$  ; dans toute la suite on supposera donc  $x-y \neq 0$  . On sait que (8.2) équivaut à

$$x-y \in \partial_{A \cap B}(y)$$

et, comme il existe  $b$  où les deux fonctions indicatrices  $\psi_A$  et  $\psi_B$  sont finies, l'une continue, on a partout

$$\partial\psi_{A \cap B} = \partial(\psi_A + \psi_B) = \partial\psi_A + \partial\psi_B .$$

Donc (8.2) équivaut à

$$\exists p \in \partial\psi_A(y) , \quad \exists q \in \partial\psi_B(y) : \quad x-y = p+q .$$

Si  $p = 0$  , cela laisse

$$x-y \in \partial\psi_B(y)$$

c'est-à-dire  $y = \text{proj}(x, B)$ , d'où

$$d(x, A \cap B) = d(x, B)$$

de sorte que l'inégalité (8.1) est bien vérifiée ; même conclusion pour  $q = 0$  .

Supposons donc  $p$  et  $q$  non nuls, c'est-à-dire, puisque  $\partial\psi_A(y)$  et  $\partial\psi_B(y)$  sont des cônes, qu'il existe  $u$  et  $v$  tels que

$$(8.3) \quad |u| = 1 , \quad u \in \partial\psi_A(y)$$

$$(8.4) \quad |v| = 1 , \quad v \in \partial\psi_B(y)$$

ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  strictement positifs tels que

$$(8.5) \quad \begin{aligned} x-y &= \lambda u + \mu v \\ |x-y|^2 &= \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu(u|v) . \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$\begin{aligned} |x-y| &= \nu > 0 \\ (u|v) &= -\cos \gamma , \quad \gamma \in [0, \pi] . \end{aligned}$$

on a

$$\nu^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cos \gamma$$

ce qui, selon la trigonométrie élémentaire, est (nécessaire et) suffisant pour l'existence de  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $[0, \pi]$  tels que

$$(8.6) \quad \mu \cos \gamma + \nu \cos \beta = \lambda$$

$$(8.7) \quad \nu \cos \alpha + \lambda \cos \gamma = \mu$$

$$(8.8) \quad \lambda \cos \beta + \mu \cos \alpha = \nu$$

$$(8.9) \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad .$$

Les ensembles  $A$  et  $B$  sont respectivement contenus dans les demi-espaces

$$\Delta_A = \{z \in H : (z-y|u) \leq 0\}$$

$$\Delta_B = \{z \in H : (z-y|v) \leq 0\} \quad .$$

Donc

$$d(x, A) \geq d(x, \Delta_A) \quad , \quad d(x, B) \geq d(x, \Delta_B) \quad .$$

Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , notons  $\xi^+$  sa partie positive, c'est-à-dire

$$\xi^+ = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases} \quad .$$

Alors

$$d(x, \Delta_A) = (x-y|u)^+ = (\lambda + \mu(v|u))^+ = (\lambda - \mu \cos \gamma)^+ = \nu(\cos \beta)^+$$

vu (8.6) et, de même,

$$d(x, \Delta_B) = \nu(\cos \alpha)^+ \quad ;$$

donc

$$(8.10) \quad d(x, A) + d(x, B) \geq \nu((\cos \alpha)^+ + (\cos \beta)^+) \quad .$$

1ère éventualité :  $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$  .

Alors (8.9) implique  $\beta \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$  d'où

$$(\cos \alpha)^+ + (\cos \beta)^+ \geq \cos \alpha + \sin \alpha \geq 1$$

ce qui fait que l'inégalité (8.1) est bien vérifiée

2ème éventualité :  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  .

Alors

$$\begin{aligned} (8.11) \quad \sin \gamma &= \sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta \\ &\leq \sin \beta (\cos \alpha)^+ + \sin \alpha (\cos \beta)^+ \\ &\leq (\cos \alpha)^+ + (\cos \beta)^+ . \end{aligned}$$

On exploitera donc (8.10) en cherchant une minoration de  $\sin \gamma$  et c'est ici qu'intervient la boule de centre  $b \in B$ , de rayon  $\rho > 0$ , contenue dans  $A$ . A fortiori  $b$  appartient à  $\Delta_B$ , d'où

$$(8.12) \quad (b-y|v) \leq 0$$

et le point  $b + \rho u$  de la boule en question appartient à  $\Delta_A$ , d'où

$$(8.13) \quad (b-y|u) \leq -\rho .$$

Appelons  $s$  la projection orthogonale de  $b-y$  sur le plan engendré par  $u$  et  $v$  (ou sur la droite qu'ils engendrent dans le cas où  $u$  et  $v$  serait colinéaires) :

$$(8.14) \quad (s|u) \leq -\rho , \quad (s|v) \leq 0 .$$

Le déterminant de Gram de  $s, u, v$ , à savoir

$$\begin{vmatrix} (s|s) & (s|u) & (s|v) \\ (u|s) & 1 & -\cos \gamma \\ (v|s) & -\cos \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

est nul, d'où

$$|s|^2 \sin^2 \gamma = (s|u)^2 + (s|v)^2 + 2(s|u)(s|v) \cos \gamma .$$

Vu (8.14) et le fait que  $\cos \gamma \geq 0$  cela donne

$$|s|^2 \sin^2 \gamma \geq \rho^2 .$$

Alors (8.10) et (8.11) fournissent

$$d(x, A \cap B) \leq \frac{|s|}{\rho} (d(x, A) + d(x, B)) .$$

Comme  $|s| \leq |y-b|$  cela établit la Proposition, avec la première expression proposée pour  $k$  .

Quant à la seconde expression proposée pour  $k$  , elle s'obtient en remarquant que

$$|y-b| \leq |x-b| .$$

En effet, vu (8.12) et (8.13) , on a

$$(x-y|b-y) = \lambda(u|b-y) + \mu(v|b-y) \leq 0$$

ce qui donne

$$|x-b|^2 - |y-b|^2 = (x-y|x+y-2b) = |x-y|^2 + 2(x-y|y-b) \geq 0 .$$

Remarque. Cette dernière expression de  $k$  fournit une inégalité de même type que (4.6), mais affranchie de la restriction (4.5).

## 9- Appendice.

PROPOSITION. Soient  $A$  et  $B$  deux parties convexes d'un espace vectoriel topologique sur le corps des réels. On suppose que  $B$

rencontre l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$  ; alors

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B} .$$

Démonstration. Supposons faite une translation telle que l'origine appartienne à  $\overset{\circ}{A} \cap B$ . Alors la jauge de  $A$  est une fonction  $j$ , sous linéaire  $\geq 0$ , partout finie et continue et on sait que

$$j(x) < 1 \iff x \in \overset{\circ}{A}$$

$$j(x) \leq 1 \iff x \in \overline{A} .$$

Comme l'inclusion  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$  est banale, il reste à considérer un  $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$  et prouver que tout voisinage  $V$  de  $a$  rencontre  $A \cap B$ .

L'application  $F$  de  $E \times \mathbb{R}_+$  dans  $E$  :

$$(x, \rho) \mapsto F(x, \rho) = \frac{1}{\rho + \max\{1, j(x)\}} x$$

est continue et, comme  $a \in \overline{A}$ , on a  $j(a) \leq 1$ , d'où

$$F(a, 0) = \frac{1}{\max\{1, j(a)\}} a = a$$

Il existe donc un voisinage  $W$  de  $a$  dans  $E$  et un voisinage  $[0, \epsilon [$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}_+$  tels que

$$x \in W, \rho \in [0, \epsilon [ \implies F(x, \rho) \in V .$$

Choisissons  $x$  dans  $B \cap W$  (non vide puisque  $a \in \overline{B}$ ) et  $\rho \in ]0, \epsilon [$ . Alors la convexité de  $B$  fait que le point  $y = F(x, \rho)$  appartient à  $B$ ; en outre

$$j(y) = \frac{1}{\rho + \max\{1, j(x)\}} j(x) < 1 ,$$

donc  $y \in \overset{\circ}{A} \subset A$ . Bref  $V \cap A \cap B \neq \emptyset$ .

REFERENCES

- [1] HERMES (H.) On continuous and measurable selections and the existence of solutions of generalized differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 535-542.
- [2] KIKUCHI (N.), TOMITA (Y.), On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields, à paraître dans : Funkcialaj Ekvacioj.
- [3] MOREAU (J.J.) Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, Paris, 1967 (multigraphié 108 p.).
- [4] - Distance à un convexe d'un espace normé et caractérisation des points proximaux, Séminaire d'Analyse Unilatérale, Montpellier 1969, exposé n° 6, (multigraphié 28 p.).
- [5] - Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique C. R. Acad. Sci., Ser. A, 273 (1971), p. 118-121.
- [6] - Rafle par un convexe variable, Première partie, Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier 1971, exposé n° 15 (multigraphié 43 p.) ; deuxième partie ibid, 1972, exposé n° 3 (multigraphié 36 p.).
- [7] - Rétraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1972, exposé n° 13 (multigraphié 89 p.).
- [8] - Sélections de multiapplications à rétraction finie, C. R. Acad. Sci., Ser. A, 276 (1973).
-