



**HAL**  
open science

## Rétraction d'une multiapplication

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Rétraction d'une multiapplication. 1972. hal-02309466

**HAL Id: hal-02309466**

**<https://hal.science/hal-02309466>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## RETRACTION D'UNE MULTIAPPLICATION

par

J. J. MOREAU

## 1. INTRODUCTION

1.a. Un problème d'évolution à contrainte unilatérale.

La motivation initiale de la théorie qu'on va exposer se trouve dans l'étude de l'équation différentielle à second membre multivoque

$$(1.1) \quad -\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u) ,$$

où l'inconnue  $u$  est une application absolument continue d'un intervalle  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  dans un espace hilbertien réel  $H$ . Pour chaque  $t \in [0, T]$ , la fonction  $x \mapsto \psi(t, x)$  est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé non vide donné  $C(t) \subset H$  (c'est-à-dire  $\psi(t, x) = 0$  si  $x \in C(t)$ , sinon  $+\infty$ ) ; on sait que l'ensemble sous-différentiel  $\partial\psi(t, x)$  constitue le cône des vecteurs normaux (dans le sens sortant) au point  $x$  de  $C(t)$  (cône vide si  $x \notin C(t)$  ; réduit à  $\{0\}$  en particulier si  $x$  est point intérieur de  $C(t)$ ) (1). En interprétant  $t$  comme le temps on a, au moins lorsque  $C(t)$  possède un intérieur non vide, l'image intuitive suivante de la loi d'évolution (1.1) : le point mobile  $u$  reste au repos tant qu'il est inté-

---

(1) Il sera très peu fait usage dans ce rapport des notions de sous-différentiabilité et de dualité des fonctions convexes ; en cas de besoin consulter MOREAU [1] ou ROCKAFELLAR [1].

rieur à l'ensemble convexe mobile  $C$  ; si la frontière de  $C$  vient à l'atteindre, le point mobile prend une vitesse dirigée selon une normale entrante de ce convexe, de manière à continuer d'appartenir à  $C$ . C'est ce que nous appelons un processus de rafle.

Dans deux rapports antérieurs de ce Séminaire (MOREAU [3], [4]) nous avons montré, moyennant certaines hypothèses sur la donnée  $t \mapsto C(t)$ , l'existence d'une solution  $t \mapsto u(t)$  de l'équation (1.1), pour chaque donnée initiale

$$(1.2) \quad u(0) = a \in C(0) ;$$

l'unicité résulte banalement de ce que la multiapplication  $x \mapsto \partial\psi(t, x)$  est monotone au sens de Minty (pour un exposé de travaux récents sur les équations de la forme  $-\frac{du}{dt} \in A(t, u)$  avec  $A(t, \cdot)$  multiapplication monotone de  $H$  dans lui-même, voir BREZIS [1]). Le premier mémoire utilise une technique de pénalisation (ce qui revient, si on préfère, à effectuer sur la multiapplication  $\partial\psi$  une régularisation de Yosida), le second une méthode d'approximation par des fonctions en escalier. Les deux procédés invoquent les mêmes hypothèses de régularité quant à l'évolution du convexe mobile  $C$  ; cette régularité se formule au moyen de la fonction numérique  $t \mapsto v(t)$ , variation de la multiapplication  $C$  sur l'intervalle  $[0, t]$  : c'est la notion traditionnelle de variation d'une fonction définie sur un intervalle, à valeurs dans un espace métrique, la métrique étant ici fournie par la distance de Hausdorff entre parties de l'espace hilbertien  $H$ . Il vient que, si la fonction numérique  $v$  est finie et absolument continue, le problème (1.1), (1.2) possède une solution  $u : [0, T] \rightarrow H$  absolument continue au sens de la métrique de  $H$ . Une notion de solution faible s'introduit d'ailleurs, dès que  $v$  est à valeurs finies, éventuellement discontinue.

Les hypothèses concernant la variation de la multiapplication  $t \mapsto C(t)$ , à valeurs convexes fermées non vides, se transcrivent d'ailleurs aisément en formulations invoquant la fonction d'appui  $y \mapsto \gamma(t, y)$  de  $C(t)$  (cf. paragraphe 2.c, ci-après). L'usage de la fonction d'appui est ici tout naturel ; c'est en effet une propriété essentielle de  $C(t)$ , ensemble convexe fermé, que d'être l'intersection des demi-espaces fermés minimaux le contenant ; justement la fonction numérique  $t \mapsto \gamma(t, y)$  définit, pour chaque  $y \in H$ , la loi d'évolution d'un tel demi-espace minimal. D'ailleurs  $y \mapsto \gamma(t, y)$  étant la fonction duale de  $x \mapsto \psi(t, x)$ , (1.1) s'écrit tout aussi bien

$$(1.3) \quad u \in \partial \gamma(t, -\frac{du}{dt})$$

Là réside, à notre point de vue, l'intérêt principal des deux rapports en question : les techniques employées suggèrent des généralisations à des équations d'évolution plus générales que (1.1) ou (1.3), ce qui a été fait par PERALBA [1] [2].

Mais pour ce qui est du processus de rafle, tel qu'on l'a décrit ci-dessus, des hypothèses invoquant la distance de Hausdorff se révèlent inutilement restrictives. Il est intuitif en effet que si, au voisinage du point  $u(t_1) \in H$ , le convexe mobile  $C$  se trouve "en expansion" sur un intervalle de temps  $[t_1, t_1 + \epsilon]$ , la fonction constante  $u(t) = u(t_1)$  est solution de (1.1) sur cet intervalle, sans qu'il soit besoin d'invoquer aucune hypothèse de régularité du mouvement de  $C$ . Une telle régularité n'est utile qu'en cas de "rétraction" de  $C$ .

Interact de e : les saisons... (part. sur  
laissent souvent fait de 2 parts. complètement  
différents. (pour concerner d(A,B) - 13.4 -)

### 1.b. Retraction.

Dans la majeure partie de ce rapport on considère, plus généralement qu'un hilbertien, un espace métrique quelconque  $E$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties quelconques de  $E$ , c'est un préliminaire usuel à l'introduction de la distance de Hausdorff que de considérer l'écart non symétrique

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

que nous appelons excès de  $A$  sur  $B$  (nous n'excluons pas que les ensembles  $A$  ou  $B$  soient vides : il faudra seulement entendre les "sup" au sens de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , c'est-à-dire que le "sup" est 0 pour une partie vide). Les paragraphes 2.a et 2.b établissent quelques propriétés de  $e$ , notamment l'inégalité triangulaire; le paragraphe 2.c évalue  $e(A, B)$  en termes de fonctions d'appui lorsque  $E$  est un espace normé et que les ensembles  $A$  et  $B$  sont convexes.

Soit  $t \mapsto A(t)$  une multiapplication d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace métrique  $E$ ; soient  $s$  et  $t$  dans  $I$ ,  $s \leq t$ ; pour toute subdivision finie  $S$  de l'intervalle  $[s, t]$ , soit

$$S : s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t,$$

on note

$$R(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)).$$

Le sup des  $R(S)$  pour  $S$  décrivant l'ensemble de toutes les subdivisions finies de  $[s, t]$  est noté  $\text{ret}(A; s, t)$ , rétraction de  $A$  sur  $[s, t]$ . Cette quantité est nulle si et seulement si la multiapplication  $\tau \mapsto \overline{A(\tau)}$  (adhérence de  $A(\tau)$ ; cette multiapplication a évidemment même rétraction que  $A$ ) est croissante sur l'intervalle  $[s, t]$ .

On dit que  $A$  est une rétraction finie sur  $I$  si  $\text{ret}(A; s, t) < +\infty$  pour tout sous-intervalle  $[s, t] \subset I$ ; dans ce cas on peut définir (à une constante additive arbitraire près) une application croissante  $r : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telle que

$$\text{ret}(A; s, t) = r(t) - r(s).$$

La multiapplication  $A$  sera dite à rétraction continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) si  $r$  est continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne). On montre en 3.d que toute multiapplication  $A$  à rétraction (finie) continue se factorise sous la forme  $A = L \circ c$  où  $c$  est une application continue strictement croissante de  $I$  sur un intervalle  $J$  et  $L$  une multiapplication lipschitzienne de  $J$  dans  $E$ .

Si en particulier  $E$  est un espace normé et que la multiapplication est à valeurs convexes, les propriétés de la rétraction se traduisent naturellement en termes de fonctions d'appui (paragraphe 3.f).

#### 1.c. Limites à droite.

La section 4 étudie quelques questions concernant des limites à gauche; mais les limites à droite, qui font l'objet de la section 5 sont beaucoup plus importantes pour la suite.

$E$  étant un espace métrique quelconque, supposons d'abord que la multiapplication  $A$  soit définie, à rétraction finie, sur un intervalle "ouvert à gauche"  $]t_1, t_2]$  et que la fonction  $r$  soit minorée, de sorte qu'existe

$$\lim_{t \downarrow t_1} r(t), \text{ noté } r^+(t_1).$$

Le paragraphe 5.c établit dans ce cas que les deux ensembles classiquement appelés limite inférieure et limite supérieure de la multiapplication  $A$ , à savoir

$$\liminf_{t \downarrow t_1} A(t) = \{x \in E : \lim_{t \downarrow t_1} d(x, A(t)) = 0\},$$

$$\limsup_{t \downarrow t_1} A(t) = \{x \in E : 0 \text{ est valeur d'adhérence de la fonction } t \mapsto d(x, A(t)) \text{ pour } t \downarrow t_1\}$$

sont égaux à un ensemble noté  $A^+(t_1)$  (fermé, éventuellement vide).

Supposons maintenant que  $A$  soit définie, à rétraction finie, sur l'intervalle fermé  $[t_1, t_2]$  (alors  $r$  est évidemment minorée sur  $]t_1, t_2[$ ); avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$(1.4) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1)).$$

La fonction  $r$  est continue à droite au point  $t_1$  si et seulement si la valeur commune des deux premiers membres est 0; on montre que cela équivaut à  $e(A(t_1), A^+(t_1)) = 0$ , c'est-à-dire  $A(t_1) \subset A^+(t_1)$ . Une autre condition nécessaire et suffisante pour cela est que la famille de fonctions numériques  $t \mapsto d(a, A(t))$ , indexée par  $a \in E$ , soit uniformément s.c.s. à droite au point  $t_1$ .

Les paragraphes 5.e et 5.7 forment chacun des conditions suffisantes pour que  $A^+(t_1)$  soit non vide et que le dernier membre de (1.4) soit égal aux deux premiers: la multiapplication  $A$  est toujours supposée à rétraction finie, avec  $A(t_1) \neq \emptyset$ ; en 5.e on suppose l'espace métrique  $E$  tel que les boules fermées soient compactes; en 5.f on prend pour  $E$  l'espace de Banach dual d'un espace métrique  $X$  et on suppose que les  $A(t)$  sont fermés pour la topologie faible  $\sigma(E, X)$ .

Le paragraphe 5.g se place dans le cas plus spécial où  $E$  est

un espace hilbertien réel ; on suppose la multiapplication  $A$  définie sur  $[t_1, t_2]$ , à rétraction finie, à valeurs convexes fermées non vides. Alors, pour tout  $a \in E$ ,

$$\lim_{t \downarrow t_1} \text{proj} (a, A(t)) = \text{proj} (a, A^+(t_1)).$$

1.d. Approximations localement en escalier.

Sous le nom de partition localement finie d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , nous entendrons toujours une partition de  $I$  en sous-intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts ; certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) tels que toute partie compacte de  $I$  soit recouverte par un nombre fini d'entre eux.

Une application, ou multiapplication, définie sur  $I$  est dite localement en escalier si elle est constante sur chacun des intervalles d'une partition localement finie de  $I$ .

Dans toute la suite on suppose, pour abrégé, que  $I$  contient son origine  $t_0$ .

Alors, en se plaçant dans l'une des deux hypothèses 5.e ou 5.f indiquées ci-dessus, on obtient une propriété d'approximation "à gauche" : quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $P$ , partition localement finie de  $I$ , et une multiapplication localement en escalier  $A_P$ , constante sur chaque intervalle de  $P$ , à valeurs non vides, telle que

$$(1.5) \quad \forall t \in I : e(A_P(t), A(t)) \leq \varepsilon$$

$$\forall [s, t] \subset I : \text{ret}(A_P ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) + \varepsilon .$$

Les limites à droite dont on a parlé plus haut jouent un rôle essentiel dans la construction de  $A_P$ .



Ces approximations localement en escalier sont mises à profit dans la section 7 pour établir des théorèmes de sélection ; en supposant, par exemple, comme en 5.f, que  $E$  est le dual d'un espace normé  $X$ , que  $A$  est une multiapplication à rétraction finie de  $I$  dans  $E$ , à valeurs  $\sigma(E, X)$ -fermées on obtient : quel que soit  $a_0 \in A(t_0)$ , il existe une application  $u : I \rightarrow E$  telle que  $u(t_0) = a_0$ , et

$$\forall t \in I : u(t) \in A(t)$$

et dont la variation vérifie

$$(1.6) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t).$$

Cette dernière inégalité montre que, si la multiapplication  $A$  est à rétraction finie continue (resp. à rétraction absolument continue, resp. à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$ ), l'application  $u$  est à variation finie continue (resp. est absolument continue, resp. est lipschitzienne de rapport  $\ell$ ). On obtient donc une large généralisation de résultats de KIKUCHI, TOMITA [1], lesquels se plaçaient dans des espaces de dimension finie et considéraient des multiapplications à variation absolument continue ou lipschitzienne au sens de la distance de Hausdorff.

1.e. Le processus de rafle.

La huitième et dernière section met à profit ce qui précède pour l'étude du problème formulé en 1.a.

La donnée est une multiapplication  $t \mapsto C(t)$  de l'intervalle  $I$  (contenant son origine  $t_0$ ) dans l'espace hilbertien réel  $H$ , à valeurs convexes fermées non vides, à rétraction finie.

L'idée est de considérer les partitions localement finies,

soit  $P$ , de l'intervalle  $I$  et d'associer à chacune d'elle, comme on l'avait fait plus haut, la multiapplication localement en escalier  $C_P$  qui approche  $C$  au sens d'une inégalité de la forme (1.5). Une définition du processus de rafle correspondant à une telle multiapplication s'introduit très naturellement : toute solution  $u_P : I \rightarrow H$  est posée comme constante sur chaque intervalle de la partition  $P$  ; reste seulement à définir la loi de saut reliant la valeur de  $u_P$  sur un intervalle  $I_i \in P$  à la valeur sur l'intervalle précédent  $I_{i-1}$  ; plusieurs raisons concourent pour suggérer la loi :

$$u_P(I_i) = \text{proj} (u_P(I_{i-1}), C_P(I_i)).$$

Cette cascade de projections sur les convexes  $C_P(I_i)$  définit évidemment une fonction  $u_P$ , localement en escalier, et une seule pour chaque "donnée initiale"  $u_P(t_0) = a \in C(t_0)$ .

Sur l'ensemble  $\mathcal{P}$  des partitions localement finies de  $I$  on définit un ordre filtrant à droite en posant  $P \prec P'$  si la partition  $P'$  est un raffinement de la partition  $P$ . On montre au paragraphe 8.b que la "suite généralisée" des fonctions en escalier  $u_P$ , correspondant à une même donnée initiale  $a$ , converge uniformément vers une  $u : I \rightarrow H$  qu'on appellera solution faible du problème de rafle correspondant à la multiapplication  $C$  et à la donnée initiale  $a$ . Cette même fonction  $u$  peut d'ailleurs aussi être atteinte comme limite des suites ordinaires de fonctions localement en escalier associées à des choix spéciaux des partitions ; de là des algorithmes utilisables au point de vue numérique.

Diverses propriétés de ces solutions faibles sont étudiées dans les paragraphes 8.c, 8.d, 8.f : discontinuités de  $u$  à droite ou à gauche d'un point  $t_1 \in I$ , restrictions à des sous-intervalles de  $I$

et recollements, changement de variable, etc... La plus significative est l'inégalité

$$\forall [s, t] \subset I : \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(C ; s, t),$$

semblable à (1.6) et dont on tire les mêmes conséquences.

Le paragraphe 8.h a pour objet la comparaison des solutions  $u$  et  $u'$  respectivement associées à deux multiapplications  $C$  et  $C'$ . On trouve que, si  $\mu(t)$  est un majorant de la distance de Hausdorff  $h(C(\theta), C'(\theta))$  pour  $\theta \in [t_0, t]$ , on a

$$|u(t) - u'(t)|^2 \leq |u(t_0) - u'(t_0)|^2 + 2\mu(t) (\text{ret}(C ; t_0, t) + \text{ret}(C' ; t_0, t)).$$

Cette inégalité exprime la stabilité de la solution  $u$  à l'égard de perturbations de la multiapplication  $C$  et de la donnée initiale  $u(t_0)$ , propriété essentielle pour les applications pratiques (voir aussi MOREAU [4] quant à l'exploitation de majorations de cette sorte pour l'étude de régularisations et la démonstration de convergence d'algorithmes).

L'aboutissement du rapport est le paragraphe 8.i dans lequel on montre que si la multiapplication  $C$  est à rétraction (localement) absolument continue, toute solution faible  $u$  est en fait solution forte, c'est-à-dire qu'elle est (localement) absolument continue et vérifie pour presque tout  $t$  l'équation différentielle (1.1).

2. UN ECART NON SYMETRIQUE SUR L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN  
ESPACE METRIQUE

2.a. Excès d'un ensemble sur un autre.

DEFINITION. Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un espace métrique  $E$  ; on appelle excès de  $A$  sur  $B$  l'expression suivante, à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ ,

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b),$$

où le sup est pris au sens de l'ensemble ordonné  $\overline{\mathbb{R}}_+$  (dans cet ensemble, le sup de la partie vide est 0).

Evidemment, si  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont les adhérences de  $A$  et  $B$ ,

$$(2.1) \quad e(A, B) = e(\bar{A}, B) = e(A, \bar{B}) = e(\bar{A}, \bar{B}).$$

En outre

$$(2.2) \quad e(A, B) = 0 \iff A \subset \bar{B}.$$

Noter que si on prend pour  $A$  la partie vide de  $E$ , on obtient, quel que soit  $B$  (éventuellement vide lui-même)

$$(2.3) \quad e(\phi, B) = 0.$$

Et, si on prend pour  $B$  la partie vide,

$$\forall a \in E : d(a, \phi) = +\infty$$

donc

$$(2.4) \quad A \neq \phi \implies e(A, \phi) = +\infty.$$

La classique distance de Hausdorff entre deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  s'écrit d'ailleurs

$$(2.5) \quad h(A, B) = \max \{e(A, B), e(B, A)\};$$

il n'est toutefois pas très usuel, dans le maniement de cette dernière notion, d'aller jusqu'à la considération d'ensembles éventuellement vides. A notre avis cette considération permet des énoncés plus substantiels et plus cohérents.

PROPOSITION. Si  $A, B, C$  sont trois parties quelconques de  $E$ , on a l'inégalité triangulaire

$$(2.6) \quad e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) .$$

En effet, pour tout  $\rho \in \mathbb{R}$  strictement supérieur au second membre de (2.6) il existe  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\rho = \sigma + \tau$  et que

$$\sigma > \sup_{a \in A} d(a, B) , \quad \tau > \sup_{b \in B} d(b, C) .$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A , \exists b \in B : \sigma > d(a, b) \\ \forall b \in B : \tau > d(b, C) . \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $a \in A$ , on peut écrire

$$d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, C) \leq \sigma + \tau = \rho ,$$

d'où  $e(A, C) \leq \rho$ , ce qui prouve (2.6).

## 2.b. La multiapplication "boule".

Si  $b$  est un point de l'espace métrique  $E$  et si  $\rho \in \mathbb{R}_+$  nous notons  $\beta(b, \rho)$  (resp.  $\beta_0(b, \rho)$ ) la boule fermée (resp. ouverte) de centre  $b$ , de rayon  $\rho$ .

On peut interpréter  $b \mapsto \beta(b, \rho)$  (resp.  $b \mapsto \beta_0(b, \rho)$ ) comme une multiapplication de  $E$  dans lui-même ; alors, si  $B$  est une

partie quelconque de  $E$ , la notation habituelle d'image d'un ensemble par une multiapplication donne ici

$$\beta(B, \rho) = \bigcup_{b \in B} \beta(b, \rho)$$

(et écriture semblable pour  $\beta_0$ ).

Notons par ailleurs  $g$  la fonction définie, pour tout  $x \in E$ , par

$$(2.7) \quad g(x) = d(x, B)$$

et considérons ses "tranches" :

$$\begin{aligned} g^<(\rho) &= \{x \in E : g(x) < \rho\} \\ g^{\leq}(\rho) &= \{x \in E : g(x) \leq \rho\} \end{aligned}$$

On trouve immédiatement, pour tout  $\rho \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(2.8) \quad g^<(\rho) = \beta_0(B, \rho) \subset \beta(B, \rho) \subset g^{\leq}(\rho).$$

D'un autre côté (pour  $g$  fonction numérique quelconque, définie sur un ensemble  $E$  quelconque), on a, si  $A$  est une partie de  $E$ ,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sup g(A) &= \inf \{\rho : A \subset g^<(\rho)\} \\ &= \inf \{\rho : A \subset g^{\leq}(\rho)\} \end{aligned}$$

En effet soit  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $k > \sup g(A)$ ; alors

$$\forall a \in A : k > g(a) \quad \text{i.e.} \quad a \in g^<(k)$$

donc  $A \subset g^<(k)$ , d'où

$$k \geq \inf \{\rho : A \subset g^<(\rho)\},$$

ce qui prouve

$$(2.10) \quad \sup g(A) \geq \inf \{\rho : A \subset g^<(\rho)\}.$$

Soit, d'autre part  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $k > \inf \{ \rho : A \subset g \leq (\rho) \}$  ; alors

$$\exists \rho_0 \quad : \quad k > \rho_0 \quad , \quad A \subset g \leq (\rho_0) \quad ,$$

d'où

$$\forall a \in A \quad : \quad g(a) \leq \rho_0 \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\sup g(A) \leq \rho_0 < k$$

ce qui prouve

$$(2.11) \quad \inf \{ \rho : A \subset g \leq (\rho) \} \geq \sup g(A) .$$

Comme le second membre de (2.10) est essentiellement supérieur ou égal au premier membre de (2.11), cela établit (2.9) .

Appliquant cela à la fonction  $g$  définie par (2.7), on obtient une nouvelle expression de  $e(A, B)$ , en notant indifféremment  $B_\rho$  l'un quelconque des quatre ensembles qui figurent en (2.8) :

$$(2.12) \quad e(A, B) = \inf \{ \rho \in \mathbb{R}_+ : A \subset B_\rho \} .$$

### 2.c. Cas d'un espace vectoriel normé.

On suppose dans ce paragraphe que  $E$  est un espace vectoriel normé ; la norme sera notée  $|\cdot|$  .

Si  $B$  est une partie convexe de cet espace vectoriel, il est élémentaire que les quatre ensembles figurant en (2.8) sont convexes. Alors, si on note  $\text{conv}$  l'enveloppe convexe d'un ensemble, (2.12) montre que

$$(2.13) \quad B \text{ convexe} \Rightarrow e(A, B) = e(\text{conv } A, B)$$

Plus généralement, pour  $B$  quelconque, l'inclusion  $B \subset \text{conv } B$

donc égale à sa bipolaire. Cela donne

$$\begin{aligned} d(a, C') &= \sup_{y \in F} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y) - \psi_B(y)] \\ &= \sup_{y \in B} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y)]. \end{aligned}$$

En théorie des fonctions polaires les "sup" sont naturellement pris au sens de l'ordre de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Mais comme  $C$  et  $C'$  sont non vides, ces mêmes "sup" peuvent être employés dans la définition de  $e$ ; donc

$$\begin{aligned} e(C, C') &= \sup_{a \in C} \sup_{y \in B} [\langle a, y \rangle - \gamma'(y)] \\ &= \sup_{y \in B} \sup_{a \in C} [-\gamma'(y) \dagger \langle a, y \rangle] \end{aligned}$$

où l'opération  $\dagger$  prolonge l'addition classique selon la convention  $(+\infty) \dagger (-\infty) = -\infty$ . On invoque alors une règle de calcul des "sup" (cf. MOREAU [1]) :

$$\begin{aligned} e(C, C') &= \sup_{y \in B} [-\gamma'(y) \dagger \sup_{a \in C} \langle a, y \rangle] \\ &= \sup_{y \in B} [-\gamma'(y) \dagger \gamma(y)]. \end{aligned}$$

Bref :

Si  $C$  et  $C'$  sont deux parties convexes non vides de  $E$  et si  $B$  est la boule unité fermée de  $F$ , on a, en faisant la convention  $\infty - \infty = -\infty$ ,

$$(2.15) \quad e(C, C') = \sup_{y \in B} [\gamma(y) - \gamma'(y)].$$

Vu cette convention, tout  $y$  tel que  $\gamma'(y) = +\infty$  peut être omis dans la construction du "sup", c'est-à-dire que (on note classiquement  $\text{dom } \gamma' = \{y \in F : \gamma'(y) < +\infty\}$ )

$$e(C, C') = \sup_{y \in B \cap \text{dom } \gamma'} [\gamma(y) - \gamma'(y)].$$

$$\forall y \in B : e(C, C') \geq \gamma(y) - \gamma'(y)$$

$$\text{d'où } \forall y \in B : \gamma'(y) + e(C, C') \geq \gamma(y)$$



fait que

$$(2.14) \quad e(A, B) \geq e(A, \text{conv } B) = e(\text{conv } A, \text{conv } B) .$$

D'ailleurs, vu (2.1), on peut aussi bien considérer ici des enveloppes convexes fermées.

On portera dans la suite un intérêt particulier aux ensembles convexes fermés.

Soit  $F$  le dual topologique de  $E$  ; on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire de cette dualité.

A toute partie  $C$  de  $E$  ; on associe sa fonction d'appui  $\gamma$  , définie sur  $F$  par

$$\gamma(y) = \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle$$

C'est la fonction polaire de  $\psi_C$  , fonction indicatrice de  $C$  (i.e.  $\psi_C(x) = 0$  si  $x \in C$  et  $\psi_C(x) = +\infty$  si  $x \notin C$ ) ; pour l'usage fait ici de la théorie des fonctions polaires, consulter MOREAU [1].

Soient donc  $\gamma$  et  $\gamma'$  les fonctions d'appui de deux parties convexes  $C$  et  $C'$  de  $E$  , supposées non vides. Pour tout  $a \in E$  , on a

$$\begin{aligned} d(a, C') &= \inf_{x' \in C'} \|a - x'\| = \inf_{x' \in E} [\psi_{C'}(x') + \|a - x'\|] \\ &= (\psi_{C'} \nabla \|\cdot\|)(a) . \end{aligned}$$

La fonction polaire de l'inf-convolution  $\psi_{C'} \nabla \|\cdot\|$  est la somme des fonctions polaires de  $\psi_{C'}$  et de  $\|\cdot\|$  , à savoir, respectivement  $\gamma'$  et  $\psi_B$  , en désignant ici par  $B$  la boule unité fermée de  $F$  . Comme par ailleurs  $\|\cdot\|$  est convexe partout finie et continue, que  $\psi_{C'}$  est convexe (et finie en un point au moins puisque  $C'$  est non vide), la fonction  $\psi_{C'} \nabla \|\cdot\|$  est convexe partout finie et continue,

On en tire en particulier l'implication

$$e(C, C') < +\infty \Rightarrow (\forall y \in B \cap \text{dom } \gamma' : \gamma(y) < +\infty)$$

c'est-à-dire, vu que  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont des fonctions positivement homogènes,

$$(2.16) \quad e(C, C') < +\infty \Rightarrow \text{dom } \gamma' \subset \text{dom } \gamma .$$

On sait que, si les convexes  $C$  et  $C'$  sont fermés, leurs cônes asymptotiques (ou cônes de récession) sont respectivement les cônes polaires, au sens de la dualité  $(F, E)$ , des cônes convexes  $\text{dom } \gamma$  et  $\text{dom } \gamma'$  ; (2.16) fournit donc entre ces cônes asymptotiques une relation d'inclusion, par ailleurs évidente.

Le cas le plus simple est celui où  $C$  et  $C'$  sont bornés ; alors évidemment  $e(C, C') < +\infty$  et, d'ailleurs,  $\text{dom } \gamma = \text{dom } \gamma' = F$  .

### 3. RETRACTION D'UNE MULTIAPPLICATION

#### 3.a. Définition.

Soit  $t \mapsto A(t)$  une multiapplication d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace métrique  $E$ . Soient  $s$  et  $t$  dans  $I$ , avec  $s \leq t$ . Pour toute subdivision finie  $S$  de l'intervalle  $[s, t]$ , à savoir

$$S : s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t,$$

notons

$$(3.1) \quad R(S) = \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

Le sup des  $R(S)$  pour  $S$  décrivant l'ensemble de toutes les subdivisions finies de  $[s, t]$  est appelé rétraction de la multiapplication  $A$  sur l'intervalle  $[s, t]$ ; notation  $\text{ret}(A ; s, t)$  (à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ).

La multiapplication  $t \mapsto \overline{A}(t)$  (adhérence de  $A$ ) a même rétraction que  $A$ .

Evidemment, si  $[\sigma, \tau]$  est un sous-intervalle de  $[s, t]$ ,

$$(3.2) \quad e(A(\sigma), A(\tau)) \leq \text{ret}(A ; \sigma, \tau) \leq \text{ret}(A ; s, t)$$

Il résulte alors de (2.2) que  $\text{ret}(A ; s, t) = 0$  si et seulement si la multiapplication  $\tau \mapsto \overline{A}(\tau)$  est (non strictement) croissante sur l'intervalle  $[s, t]$ .

Rappelons (cf. KIKUCHI, TOMITA [1]; MOREAU [3]) que la variation de  $A$  sur  $[s, t]$ , notée  $\text{var}(A ; s, t)$ , est définie de la même manière, en invoquant la distance de Hausdorff  $h$  au lieu de  $e$ ; vu (2.5) on a

$$(3.3) \quad \text{ret}(A ; s, t) \leq \text{var}(A ; s, t).$$

Comme l'écart  $e$  est dissymétrique on obtient une notion différente si, en (3.1), on échange  $A(\tau_i)$  et  $A(\tau_{i-1})$ . Le "sup" correspondant peut être appelé expansion de la multiapplication  $A$  sur l'intervalle  $[s, t]$ ; c'est aussi bien la rétraction de la multi-application  $\tau \mapsto A(-\tau)$  sur l'intervalle  $[-t, -s]$ .

3.b. Additivité.

L'ensemble  $\mathcal{S}(s, t)$  des subdivisions finies de  $[s, t]$ , ordonné par l'inclusion, est évidemment filtrant à droite. Et il résulte de l'inégalité triangulaire que la fonction numérique  $S \mapsto R(S)$  est croissante sur cet ensemble ordonné : son "sup" est donc aussi bien sa limite selon la base de filtre des sections de l'ensemble ordonné.

Soient  $s \leq t \leq u$  dans  $I$ ; la réunion d'une subdivision finie  $S$  de  $[s, t]$  et d'une subdivision finie  $S'$  de  $[t, u]$  fournit une subdivision finie de  $[s, u]$ , soit  $S''$ , admettant  $t$  pour noeud et

$$R(S'') = R(S) + R(S') .$$

Comme l'ensemble des subdivisions finies de  $[s, u]$  admettant  $t$  pour noeud est visiblement cofinal dans l'ordonné  $\mathcal{S}(s, u)$ , il vient à la limite :

$$(3.4) \quad \text{ret}(A ; s, u) = \text{ret}(A ; s, t) + \text{ret}(A ; t, u) .$$

Soit  $t_0$  un "point de repère" dans  $I$ ; pour tout  $t \in I$  posons

$$(3.5) \quad r(t) = \begin{cases} \text{ret}(A ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{ret}(A ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} .$$

On tire d'abord de (3.4) que la fonction  $r$  ainsi définie (on peut

l'appeler "rétraction indéfinie" de  $A$ ) sur  $I$  est croissante. En outre, si deux des trois quantités écrites en (3.4) sont finies, la troisième l'est aussi ; par suite :

La fonction  $r$  est partout finie sur  $I$  si et seulement si  $\text{ret}(A ; s, t) < +\infty$  pour tout sous-intervalle  $[s, t] \subset I$  ; on dit alors que la multiapplication  $A$  est à rétraction finie sur  $I$  ; dans ce cas (3.4) donne

$$\text{ret}(A ; s, t) = r(t) - r(s) .$$

Ici, comme dans les propriétés qui vont suivre , le choix du point de repère  $t_0$  utilisé pour définir  $r$  est indifférent.

REMARQUE 1. (2.3) montre que si  $A(t)$  est vide pour tout  $t \in [t_1, t_2[$  on a  $\text{ret}(A ; t_1, t_2) = 0$  .

Par ailleurs supposons  $A$  à rétraction finie sur  $I$  et soit  $t_1 \in I$  ; si  $A(t_1) \neq \phi$  , (2.4) montre que  $A(t) \neq \phi$  pour tout  $t > t_1$  . De même si  $A(t_1) = \phi$  , (2.4) montre que  $A(t) = \phi$  pour tout  $t < t_1$  .

REMARQUE 2. Soit  $\pi$  une application surjective croissante (peut être non strictement) d'un intervalle  $I'$  sur l'intervalle  $I$ . On note naturellement  $A \circ \pi$  la multiapplication  $t' \mapsto A(\pi(t'))$  de  $I'$  dans  $E$  . Soit  $[s', t'] \subset I'$  ; on vérifie immédiatement que

$$\text{ret}(A \circ \pi ; s', t') = \text{ret}(A ; \pi(s'), \pi(t'))$$

Par suite, si la fonction  $r : I \rightarrow \mathbb{R}$  est rétraction indéfinie de  $A$  , la fonction  $r \circ \pi$  est rétraction indéfinie de  $A \circ \pi$  .

3.c. Rétraction absolument continue.

On dit que la multiapplication A est à rétraction absolument continue (resp. localement absolument continue) sur l'intervalle I si la fonction numérique r est finie et absolument continue (resp. localement absolument continue) sur cet intervalle.

Cela équivaut à l'existence d'une vitesse de rétraction  $\dot{r}$  fonction positive appartenant à  $L^1(I)$  (resp. appartenant à  $L^1_{loc}(I)$ ) telle que

$$(3.6) \quad \forall [s, t] \subset I : e(A(s), A(t)) \leq \int_s^t \dot{r}(\tau) d\tau .$$

La caractérisation classique des fonctions numériques absolument continues fournit en outre :

La multiapplication A est absolument continue sur l'intervalle compact  $[s, t]$  si et seulement si à tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer  $\eta > 0$  tel que, pour toute famille finie d'intervalles ouverts  $]\sigma_i, \tau_i[ \subset [s, t]$  deux à deux disjoints, on ait l'implication

$$\sum_i (\tau_i - \sigma_i) < \eta \implies \sum_i e(A(\sigma_i), A(\tau_i)) < \varepsilon .$$

L'inégalité (3.3) fait que si A est à variation absolument continue (au sens de la distance de Hausdorff), a fortiori elle est à rétraction absolument continue.

3.d. Rétraction lipschitzienne.

On dit que la multiapplication A est à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$  sur I si la fonction numérique r est (finie et) lipschitzienne de rapport  $\ell$  sur I .

Cela équivaut à

$$(3.7) \quad \forall [s, t] \subset I : e(A(s), A(t)) \leq (t-s)\ell .$$

Il faut et suffit pour cela que  $A$  soit à rétraction localement absolument continue, avec  $\dot{r} \leq \ell$  presque partout.

A fortiori, il en est ainsi lorsque  $A$  est à variation lipschitzienne de rapport  $\ell$ , pour la distance de Hausdorff.

Voici une propriété de factorisation :

PROPOSITION. Si la multiapplication  $A$  est à rétraction continue finie sur  $I$ , il existe une application  $c$  continue strictement croissante de  $I$  sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  et une multiapplication  $L$ , à rétraction lipschitzienne de  $J$  dans  $E$ , telles que  $A = L \circ c$ .

En effet, soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs ; si la fonction  $r$  est continue finie, l'application  $c$  définie par

$$c(t) = at + b r(t)$$

est continue strictement croissante donc bijective de  $I$  sur un intervalle  $J$ . Soient  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $J$ , avec  $\sigma \leq \tau$  ; posons  $s = c^{-1}(\sigma)$ ,  $t = c^{-1}(\tau)$ . La multiapplication  $L = A \circ c^{-1}$  donne lieu à l'inégalité :

$$e(L(\sigma), L(\tau)) = e(A(s), A(t)) \leq r(t) - r(s)$$

et le dernier membre vaut

$$\frac{\tau - at}{b} - \frac{\sigma - as}{b} \leq \frac{\tau - \sigma}{b}$$

Donc  $L$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{b}$ .

REMARQUE 1.

Dans la situation analogue concernant la distance de Hausdorff et la variation de  $A$  on avait obtenu (cf. MOREAU [3]) un résultat

plus précis : factorisation  $A = L \circ c$  telle que  $L$  ait une vitesse de variation partout égale à 1. Dans le cas présent, si la fonction continue finie  $r$  se trouve être strictement croissante on peut prendre  $a = 0$ ,  $b = 1$  ce qui fournit pour  $L$  une vitesse de rétraction partout égale à 1. Par contre s'il existe un intervalle de longueur non nulle  $[t_1, t_2]$  sur lequel la fonction  $r$  est constante sans que  $A$  le soit, toute application croissante  $c$  assurant une factorisation de la forme  $A = L \circ c$  enverra  $[t_1, t_2]$  sur un intervalle de longueur non nulle, soit  $[\tau_1, \tau_2]$ ; la vitesse de rétraction de  $L$  sera nulle sur ce dernier intervalle et non pas égale à 1.

REMARQUE 2.

La multiapplication  $A$  est à rétraction absolument continue (resp. localement absolument continue) si et seulement si la fonction  $c$  ci-dessus est absolument continue (resp. localement absolument continue).

3.e. Accrétion et décrétion d'une fonction numérique

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ; on peut lui associer la multiapplication  $\Phi$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\Phi(t) = ]-\infty, f(t)].$$

Evidemment

$$e(\Phi(\tau_{i-1}), \Phi(\tau_i)) = p(f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)) \quad ,$$

en notant  $p$  la "partie positive" :

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$



Donc la rétraction de la multiapplication  $\Phi$  sur l'intervalle  $[s, t]$  peut s'écrire

$$\text{ret}(\Phi; s, t) = \sup \sum_i p(f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)) ,$$

le "sup" étant pris sur l'ensemble  $\mathcal{S}$  des subdivisions  $(\tau_i)$  de la forme

$$s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t .$$

C'est ce que nous noterons aussi  $\text{dec}(f; s, t)$  ou décréation de la fonction numérique  $f$  sur  $[s, t]$ . Il est naturel de définir de même l'accréation de  $f$  sur cet intervalle

$$\text{acc}(f; s, t) = \sup \sum_i p(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) ,$$

ce qui est aussi bien la rétraction de la multiapplication  $t \mapsto [f(t), +\infty[$  ou la décréation de la fonction numérique  $t \mapsto -f(t)$ .

Les "sup" en question sont des limites selon l'ordonné filtrant  $\mathcal{S}$ ; comme, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$p(x) + p(-x) = |x|$$

$$p(x) - p(-x) = x ,$$

il vient

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \text{dec}(f; s, t) + \text{acc}(f; s, t) &= \lim \sum_i p(f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)) \\ &\quad + \lim \sum_i p(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \\ &= \lim \sum_i |f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)| \\ &= \text{var}(f; s, t) \end{aligned}$$

et, si l'un au moins des deux termes du premier membre est fini,

$$(3.9) \quad \text{dec}(f; s, t) - \text{acc}(f; s, t) = \lim \sum_i (f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i))$$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \text{dec}(f ; s, t) - \text{acc}(f ; s, t) &= \lim \sum_i p(f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)) \\
 &\quad - \lim \sum_i p(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})) \\
 &= \lim \sum_i (f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i)) \\
 &= f(s) - f(t) .
 \end{aligned}$$

Comme dans les paragraphes précédents, on choisira un "point de repère"  $t_0 \in I$  et on définira trois fonctions numériques croissantes  $\delta$ ,  $\alpha$  et  $v$  sur  $I$

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &= \begin{cases} \text{dec}(f ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{dec}(f ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} \\
 \alpha(t) &= \begin{cases} \text{acc}(f ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{acc}(f ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} \\
 v(t) &= \begin{cases} \text{var}(f ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{var}(f ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Comme  $f$  est, par hypothèse, à valeurs finies, (3.8) et (3.9) montrent que les trois fonctions  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $v$  sont à valeurs finies si l'une d'entre elles l'est : on dira simplement en ce cas que  $f$  est à variation finie sur  $I$  ; alors, pour tout  $t$  dans  $I$ ,

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) + \delta(t) &= v(t) \\
 \alpha(t) - \delta(t) &= f(t) - f(t_0) .
 \end{aligned}$$

On reconnaît dans ce qui précède le raisonnement utilisé classiquement pour montrer qu'une fonction numérique à variation "bornée" est différence de ~~deux~~ fonctions croissantes.

Evidemment

$$\text{acc}(f ; s, t) = \text{dec}(-f ; s, t) .$$

En outre, si on note  $\hat{f}$  la fonction

$$\hat{f} : t \mapsto f(-t) ,$$

définie sur l'intervalle  $-I$  on trouve immédiatement, pour  $s \leq t$ ,

$$\text{acc}(f ; s, t) = \text{dec}(\hat{f} ; -t, -s)$$

$$\text{dec}(f ; s, t) = \text{acc}(\hat{f} ; -t, -s) .$$

Notons enfin des propriétés immédiates de semi-continuité qu'on établirait, si on veut, en appliquant à la multiapplication  $\Phi$  les résultats des sections 4 et 5 ci-après :

La fonction numérique finie  $\delta$  (resp.  $\alpha$ ) est continue à gauche au point  $t_1 \in I$  (ou, de façon équivalente, cette fonction croissante est s.c.i. au point  $t_1$ ) si et seulement si la fonction numérique finie  $f$  est s.c.s. (resp. s.c.i.) à gauche au point  $t_1$ .

Et, en transmuant par symétrie :

La fonction numérique finie  $\alpha$  (resp.  $\delta$ ) est continue à droite au point  $t_1 \in I$  (ou, de façon équivalente, cette fonction numérique croissante est s.c.s. au point  $t_1$ ) si et seulement si la fonction numérique finie  $f$  est s.c.s. (resp. s.c.i.) à droite au point  $t_1$ .

En rapprochant les deux énoncés, on obtiendra notamment des propriétés équivalentes à la continuité des fonctions  $f$ ,  $\alpha$  ou  $\delta$  au point  $t_1$ .

### 3.f. Cas d'un espace normé.

On suppose dans ce qui suit que  $E$  est un espace vectoriel normé.

A la multiapplication  $t \mapsto A(t)$  de  $I$  dans  $E$  on peut associer la multiapplication  $t \mapsto \text{conv } A(t)$ .

L'inégalité (2.14) fait que, pour tout  $[s, t] \subset I$ ,

$$(3.10) \quad \text{ret}(\text{conv } A ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) .$$

Par suite, si la multiapplication  $A$  est à rétraction finie (resp. finie continue, resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport  $\ell$ ), il en est de même de la multiapplication  $\text{conv } A$ .

Une autre particularité du cas où  $E$  est un espace normé est la possibilité de faire usage de fonctions d'appui, grâce aux résultats du § 2.c:

PROPOSITION. Soit  $t \mapsto C(t)$  une multiapplication d'un intervalle  $I$  dans un espace vectoriel normé  $E$ , à valeurs convexes non vides ; on note  $y \mapsto \gamma(t, y)$  la fonction d'appui de  $C(t)$ , définie sur le dual topologique  $F$  de  $E$ . La multiapplication  $C$  est à rétraction finie (resp. à rétraction continue, resp. à rétraction absolument continue, resp. à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$ ) si et seulement si il existe une fonction numérique croissante finie (resp. continue finie, resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport  $\ell$ ), soit  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que, pour tout  $[s, t] \subset I$ , on ait, avec la convention  $\infty - \infty = -\infty$ ,

$$(3.11) \quad \forall y \in F : \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq |y| \cdot (\rho(t) - \rho(s)) .$$

Démonstration. Les fonctions d'appui étant positivement homogènes,

(3.11) équivaut aussi bien, en notant  $B$  la boule unité fermée

(resp. ouverte) de  $F$ , à

$$(3.12) \quad \forall y \in B : \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq \rho(t) - \rho(s) .$$

Si la multiapplication  $C$  est à rétraction finie, la fonction croissante  $r$ , définie en 3.b, fournit l'inégalité

*(3.12) avec B fermée en fait basiquement (3.11) : diviser par |y| ce qui conduit à des éléments de la sphère unité si y ≠ 0 (pour y=0, l'inegalité (3.11) est triviale). de cas B ouverte entraine l'inegalité (3.12) pour B fermée - parce que une demisphère est convexe. Reciproquement l'implication (3.11) et (3.12) sont vraies sur tout le segment [0, y] = segment [0, y] : banal si y(s, y) - y(t, y) ≤ 0 et aussi par homogenite si y(s, y) - y(t, y) / |y| ≤ 0*

$$e(C(s), C(t)) \leq r(t) - r(s)$$

donc, en invoquant (2.15)

$$\forall y \in B : \gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq r(t) - r(s)$$

d'où (3.12) avec  $r = \rho$ . Cela prouve la partie "seulement si" de la proposition.

Inversement, en invoquant (2.15), la condition (3.12) implique, pour tous les intervalles  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  déterminés par une subdivision de  $[s, t]$ ,

$$e(C(\tau_{i-1}), C(\tau_i)) \leq \rho(\tau_i) - \rho(\tau_{i-1})$$

Par suite, en revenant à la définition de la rétraction de  $C$  sur  $[s, t]$

$$r(t) - r(s) = \text{ret}(C ; s, t) \leq \rho(t) - \rho(s) .$$

Les propriétés évoquées pour  $\rho$  dans l'énoncé impliquent donc ces mêmes propriétés pour  $r$ .

REMARQUE 1. La proposition précédente montre que, si la multiapplication  $C$  est à rétraction finie, la multiapplication

$$t \mapsto \text{dom } \gamma(t, \cdot)$$

de  $I$  dans  $F$  est décroissante.

REMARQUE 2. En se limitant au cas où  $C(t)$  est borné dans  $E$ , ce qui équivaut à dire que la fonction  $\gamma(t, \cdot)$  est partout finie sur  $F$ , la proposition précédente peut s'interpréter en introduisant la fonction décrtion (cf. paragraphe 3.e) de la fonction numérique finie  $t \mapsto \gamma(t, y)$ , soit

$$\delta(t, y) = \begin{cases} \text{dec}(\gamma(\cdot, y) ; t_0, t) & \text{si } t_0 \leq t \\ -\text{dec}(\gamma(\cdot, y) ; t, t_0) & \text{si } t \leq t_0 \end{cases}$$

( $t_0$  point de repère choisi dans  $I$ ).

Quel que soit  $[s, t] \subset I$  on a, d'après la définition de la décréation,

$$\gamma(s, y) - \gamma(t, y) \leq \text{dec}(\gamma(\cdot, y) ; s, t) = \delta(t, y) - \delta(s, y).$$

Donc (3.12) sera assuré si on a

$$(3.13) \quad \forall y \in B : \delta(t, y) - \delta(s, y) \leq \rho(t) - \rho(s).$$

Inversement si (3.12) est vérifiée pour tous les intervalles  $[\tau_{i-1}, \tau_i]$  déterminés par une subdivision de  $[s, t]$ , on obtient (notation du paragraphe 3.e) ?

$$p(\gamma(\tau_{i-1}, y), \gamma(\tau_i, y)) \leq \rho(\tau_i) - \rho(\tau_{i-1}),$$

d'où (3.13) en prenant le sup des sommes associées à toutes les subdivisions finies de  $[s, t]$ .

On en tire par exemple que la multiapplication  $C$  est à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$  si et seulement si, pour tout  $y \in B$ , la fonction numérique  $t \mapsto \delta(t, y)$  est lipschitzienne de rapport  $\ell$ .

4. LIMITES A GAUCHE.

4.a. Rétraction continue à gauche.

PROPOSITION. Soit  $A$ , multiapplication à rétraction finie d'un intervalle  $I$  dans l'espace métrique  $E$ ; soit  $t_1 \in I$ , distinct de l'origine de cet intervalle. La fonction numérique finie  $r$  définie en (3.5) est continue à gauche au point  $t_1$  (ou, de façon équivalente, cette fonction numérique croissante est s.c.i. au point  $t_1$ ) si et seulement si

$$(4.1) \quad \lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), A(t_1)) = 0 .$$

Evidemment, pour  $t \leq t_1$ , l'inégalité

$$e(A(t), A(t_1)) \leq r(t_1) - r(t)$$

fait que la continuité de  $r$  à gauche au point  $t_1$  entraîne bien (4.1).

Inversement, supposons (4.1). Soit  $\varepsilon > 0$ ; il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$t_1 - \alpha < \tau \leq t_1 \implies e(A(\tau), A(t_1)) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Soit  $t_0 \in I$ , strictement inférieur à  $t_1$ ; il existe une subdivision

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1$$

telle que

$$(4.2) \quad \text{ret}(A ; t_0, t_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) .$$

Soit  $\eta > 0$ , strictement inférieur à  $\alpha$  et à  $t_1 - \tau_{n-1}$ , l'inégalité triangulaire fait que, si  $t_1 - \eta < \tau < t_1$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) + e(A(\tau_{n-1}), A(\tau)) + e(A(\tau), A(t_1)) \\ &< \text{ret}(A ; t_0, \tau) + \frac{\varepsilon}{2} . \end{aligned}$$

En rapprochant de (4.2) on obtient donc l'implication

$$t_1 - \eta < \tau \leq t_1 \Rightarrow r(t_1) - r(\tau) < \varepsilon ,$$

qui prouve la continuité de  $r$  à gauche au point  $t_1$ .

SCOLIE 1. Posons  $A(t_1) = B$  et notons  $B_\rho$  l'un quelconque des quatre ensembles écrits en (2.8) ; la propriété (4.1) équivaut à la suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$(4.3) \quad t_1 - \eta < t \leq t_1 \Rightarrow A(t) \subset B_\varepsilon .$$

C'est en effet ce qu'on obtient en évaluant  $e(A(t), A(t_1))$  par (2.12).

SCOLIE 2. La propriété (4.1) est vérifiée, en particulier, si la multiapplication  $A$  est semi-continue supérieurement à gauche au point  $t_1$ , dans le sens classique suivant : pour tout  $\Omega$ , ouvert contenant  $A(t_1)$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$t_1 - \eta < t \leq t_1 \Rightarrow A(t) \subset \Omega .$$

Si, de plus,  $A(t_1)$  est supposé compact, cette dernière propriété se trouve équivalente à (4.1).

En effet, la première assertion résulte du scolie 1, en prenant  $\Omega = B_\varepsilon$ , réunion des boules ouvertes de rayon  $\varepsilon$  centrées aux points de  $B = A(t_1)$ . Inversement, si  $B = A(t_1)$  est compact et si  $\Omega$  est un ouvert contenant  $B$ , la fonction continue

$$x \mapsto d(x, \complement \Omega)$$

atteint sur  $B$  un minimum dont la valeur  $\varepsilon$  est  $> 0$  ; la propriété (4.1) impliquera donc l'existence de  $\eta > 0$  tel que



$$t_1 - \eta < t < t_1 \Rightarrow A(t) \subset B_\varepsilon \subset \Omega.$$

COROLLAIRE. La fonction  $r$  est continue à gauche au point  $t_1$  si et seulement si la famille de fonctions numériques

$$t \mapsto d(a, A(t))$$

est uniformément s.c.i. à gauche au point  $t_1$  ; si  $A(t_1) \neq \emptyset$ , de sorte que  $d(a, A(t_1)) < +\infty$ , cela veut dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$(4.4) \quad \forall t \in ]t_1 - \eta, t_1], \quad \forall a \in E : d(a, A(t)) > d(a, A(t_1)) - \varepsilon$$

En effet, l'inégalité

$$d(a, A(t_1)) \leq d(a, A(t)) + e(A(t), A(t_1))$$

(appliquer l'inégalité triangulaire pour l'écart  $e$ , aux trois ensembles  $\{a\}$ ,  $A(t)$  et  $A(t_1)$ ) fait que (4.1) implique bien la propriété en question.

Réciproquement (4.4) entraîne l'implication

$$t_1 - \eta < t \leq t_1 \Rightarrow 0 \geq \sup_{a \in A(t)} d(a, A(t_1)) - \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$t_1 - \eta < t \leq t_1 \Rightarrow e(A(t), A(t_1)) \leq \varepsilon,$$

ce qui est bien (4.1).

Le cas  $A(t_1) = \emptyset$  est par ailleurs trivial : comme  $A$  est supposée à rétraction finie, on a dans ce cas  $A(t) = \emptyset$  et

$$d(a, A(t)) = +\infty \text{ pour tout } t \leq t_1.$$

4.b. Question de prolongement.

On suppose dans ce paragraphe que la multiapplication  $A$  est définie et à rétraction finie sur un intervalle semi-ouvert à droite  $[t_0, t_1[$ . On demande s'il est possible de la prolonger en une multiapplication à rétraction finie sur l'intervalle fermé  $[t_0, t_1]$ . Une condition nécessaire évidente est que la fonction croissante

$$t \mapsto r(t) = \text{ret}(A ; t_0, t)$$

soit majorée, auquel cas existe

$$(4.5) \quad \lim_{t \uparrow t_1} r(t) < +\infty, \text{ noté } r^-(t_1).$$

La proposition suivante montre que cette condition est suffisante et que la multiapplication  $\hat{A}$  prolongeant  $A$  à  $[t_0, t_1]$  peut même alors être choisie à rétraction continue à gauche au point  $t_1$ .

PROPOSITION. On suppose (4.5) ; la multiapplication  $\hat{A}$  définie sur  $[t_0, t_1]$  par

$$\hat{A}(t) = \begin{cases} A(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1[ \\ B & \text{si } t = t_1 \end{cases}$$

admet pour fonction rétraction

$$\text{ret}(\hat{A} ; t_0, t) = \hat{r}(t) = \begin{cases} r(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1[ \\ r^-(t_1) & \text{si } t = t_1 \end{cases}$$

si et seulement si l'ensemble  $B$  est tel que

$$(4.6) \quad \lim_{t \uparrow t_1} e(A(t), B) = 0$$

(ce qui a lieu en particulier pour  $B = E$  entier).

Evidemment, si  $\hat{A}$  admet  $\hat{r}$  pour fonction rétraction on a

$$e(A(t), B) \leq \text{ret}(\hat{A}; t, t_1) = \hat{r}(t_1) - \hat{r}(t)$$

qui tend vers zéro pour  $t \uparrow t_1$ .

Inversement, supposons (4.6) : cela entraîne d'abord l'existence de  $\theta \in [t_0, t_1[$  et de  $M \in \mathbb{R}$  tels que

$$\sup \{e(A(t), B) : t \in ]\theta, t_1[ \} < M$$

La définition de  $\text{ret}(\hat{A}; t_0, t_1)$  invoque les subdivisions  $(\tau_i)$  de la forme

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1$$

et on peut se restreindre à celles pour lesquelles  $\tau_{n-1} > \theta$  ; alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e(\hat{A}(\tau_{i-1}), \hat{A}(\tau_i)) &< M + \sum_{i=1}^{n-1} e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \\ &< M + r^-(t_1) \end{aligned}$$

Cela montre que  $\hat{A}$  est à rétraction finie sur  $[t_0, t_1]$  ; d'après 4.a, Proposition, l'hypothèse (4.6) entraîne alors que  $\hat{A}$  est à rétraction continue à gauche au point  $t_1$  : sa fonction rétraction est donc bien  $\hat{r}$ .

Les limites à gauche n'ayant pas, pour la suite de cette étude, la même importance que les limites à droite, nous ne discuterons pas ici l'existence d'un choix minimal parmi les ensembles  $B$  assurant (4.6).

5. LIMITES A DROITE.

5.a. Rétraction continue à droite.

Le même type de raisonnement qu'en 4.a' fournit (voir aussi Lemme 5.d., ci-après) :

PROPOSITION. Soit  $A$ , multiapplication à rétraction finie d'un intervalle  $I$  dans l'espace métrique  $E$  ; soit  $t_1 \in I$ , distinct de l'extrémité de cet intervalle. La fonction numérique finie  $r$  définie en (3.5) est continue à droite au point  $t_1$  (ou, de façon équivalente, cette fonction croissante est s.c.i. au point  $t_1$ ) si et seulement si

$$(5.1) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(A(t_1), A(t)) = 0 .$$

COROLLAIRE 1. Si la fonction  $r$  est continue à droite au point  $t_1$ , la multiapplication  $A$  est s.c.i. à droite au point  $t_1$  dans le sens classique suivant : pour tout ouvert  $\Omega$  tel que  $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$t_1 \leq t < t_1 + \eta \Rightarrow \Omega \cap A(t) \neq \emptyset .$$

En effet, si  $\Omega \cap A(t_1) \neq \emptyset$ , il existe  $\beta$ , boule ouverte de rayon  $\epsilon > 0$ , de centre  $a \in A(t_1)$ , contenue dans  $\Omega$ . Si (5.1) a lieu, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\begin{aligned} t_1 \leq t < t_1 + \eta &\Rightarrow e(A(t_1), A(t)) < \epsilon \\ &\Rightarrow d(a, A(t)) < \epsilon \\ &\Rightarrow \beta \cap A(t) \neq \emptyset \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. La fonction  $r$  est continue à droite au point  $t_1$  si et seulement si la famille de fonctions numériques

$$t \mapsto d(a, A(t)) ,$$

indexée par  $a \in E$ , est uniformément s.c.s. à droite au point  $t_1$  ;  
si  $A(t_1) \neq \emptyset$ , de sorte que  $d(a, A(t_1)) < +\infty$ , cela veut dire que  
pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$(5.1. bis) \forall t \in [t_1, t_1 + \eta[ , \forall a \in E : d(a, A(t)) < d(a, A(t_1)) + \varepsilon .$$

Si  $A(t_1) = \emptyset$ , on a  $d(a, A(t_1)) = +\infty$  de sorte que la semi-continuité supérieure de la fonction numérique  $t \mapsto d(a, A(t))$  est triviale ; et  $e(A(t_1), A(t)) = 0$  pour tout  $t$ , de sorte que la propriété (5.1) est triviale.

Pour  $A(t_1) \neq \emptyset$ , (5.1 bis) entraîne, en prenant  $a$  dans  $A(t_1)$ ,

$$\forall t \in [t_1, t_1 + \eta[ : \sup_{a \in A(t_1)} d(a, A(t)) \leq \varepsilon ,$$

ce qui conduit à (5.1). Inversement l'inégalité triangulaire

$$d(a, A(t)) \leq d(a, A(t_1)) + e(A(t_1), A(t))$$

fait que l'hypothèse (5.1) fournit, pour tout  $\varepsilon > 0$ , un  $\eta > 0$  assurant (5.1 bis).

#### 5.b. Question de prolongement.

On suppose dans ce paragraphe que la multiapplication  $A$  est définie et à rétraction finie sur un intervalle semi-ouvert à gauche  $]t_1, t_2]$ . On demande s'il est possible de la prolonger en une multiapplication à rétraction finie sur l'intervalle fermé  $[t_1, t_2]$ . Une condition nécessaire évidente est que la fonction croissante

$$t \mapsto r(t) = - \text{ret}(A ; t, t_2)$$

(le "point de repère"  $t_0$  invoqué en (3.5) est donc ici  $t_2$  ; il serait équivalent de le remplacer par tout autre point de l'intervalle

$]t_1, t_2[$  soit minorée, auquel cas existe

$$(5.2) \quad \lim_{t \downarrow t_1} r(t) > -\infty, \text{ noté } r^+(t_1).$$

C'est ce que nous exprimerons en disant que A est à rétraction bornée, à droite de  $t_1$ . Le même mode de raisonnement qu'en (4.b) fournit :

PROPOSITION. On suppose (5.2) ; la multiapplication  $\hat{A}$  définie sur  $]t_1, t_2[$  par

$$\hat{A}(t) = \begin{cases} B & \text{si } t = t_1 \\ A(t) & \text{si } t \in ]t_1, t_2[ \end{cases}$$

admet pour fonction rétraction

$$-ret(\hat{A} ; t, t_2) = \hat{r}(t) = \begin{cases} r^+(t_1) & \text{si } t = t_1 \\ r(t) & \text{si } t \in ]t_1, t_2[ \end{cases}$$

si et seulement si l'ensemble B est tel que

$$(5.3) \quad \lim_{t \downarrow t_1} e(B, A(t)) = 0.$$

La condition (5.3) est banalement vérifiée pour  $B = \phi$ .  
On indiquera dans les paragraphes 5.e et 5.f des situations assurant l'existence de B non vide vérifiant (5.3).

### 5.c. Limite inférieure et limite supérieure.

On suppose encore que A est définie sur un intervalle semi-ouvert à gauche  $]t_1, t_2[$ . Les notions générales de limite inférieure et de limite supérieure d'une famille d'ensembles (cf. C. BERGE [1]) se particularisent ici de la façon suivante : la limite inférieure de la multiapplication A à gauche du point  $t_1$  est l'ensemble (fermé,

éventuellement vide)

$$(5.4) \quad \liminf_{t \downarrow t_1} A(t) = \{x \in E : \lim_{t \downarrow t_1} d(x, A(t)) = 0\} ;$$

la limite supérieure est l'ensemble (fermé, éventuellement vide, en tout cas contenant le précédent)

$$(5.5) \quad \limsup_{t \downarrow t_1} A(t) = \{x \in E : 0 \text{ est valeur d'adhérence de la fonction } t \mapsto d(x, A(t)) \text{ pour } t \downarrow t_1\} .$$

Autrement dit,  $x$  appartient à la limite inférieure (resp. supérieure) si et seulement si il existe une sélection de  $A$ , soit  $t \mapsto u(t) \in A(t)$ , admettant  $x$  comme limite (resp. point adhérent) pour  $t \downarrow t_1$ . On peut écrire aussi ( $T \in ]t_1, t_2]$  choisi indifféremment) :

$$(5.6) \quad \limsup_{t \downarrow t_1} A(t) = \bigcap_{\theta \in ]t_1, T[} \overline{\bigcup_{\tau \in ]t_1, \theta]} A(\tau)} .$$

Evidemment, tout  $B$  vérifiant (5.3) est contenu dans l'ensemble "limite inférieure" (5.4). Par ailleurs :

LEMME. Si  $A$  est à rétraction bornée à droite de  $t_1$  (condition (5.2)), la propriété (5.3) est vérifiée lorsqu'on prend pour  $B$  l'ensemble "limite supérieure" (5.5).

En effet, notons  $A^+$  l'ensemble en question (la propriété est banalement vérifiée s'il est vide). On va prouver ce lemme en montrant que, pour tout  $t \in ]t_1, t_2]$ ,

$$(5.7) \quad e(A^+, A(t)) \leq r(t) - r^+(t_1)$$

c'est-à-dire que, pour tout  $a \in A^+$ ,

$$(5.8) \quad d(a, A(t)) \leq \sup \{ret(A; \tau, t) : \tau \in ]t_1, t]\} .$$

Soit  $\rho \in \mathbb{R}$ , strictement inférieur au premier membre de (5.8) ;

on va montrer qu'il est inférieur au second membre. Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\rho + \varepsilon < d(a, A(t))$$

Puisque  $a \in A^+$ , il existe  $\tau \in ]t_1, t[$  tel que

$$d(a, A(\tau)) < \varepsilon$$

d'où

$$(5.9) \quad \rho + d(a, A(\tau)) < d(a, A(t)) .$$

En appliquant l'inégalité triangulaire aux trois ensembles  $\{a\}$ ,  $A(\tau)$  et  $A(t)$ , on a

$$\begin{aligned} d(a, A(t)) &\leq d(a, A(\tau)) + e(A(\tau), A(t)) \\ &\leq d(a, A(\tau)) + \text{ret}(A; \tau, t). \end{aligned}$$

Par addition avec (5.9), il reste

$$\rho < \text{ret}(A; \tau, t)$$

ce qui établit (5.8) (noter que les ensembles  $A(\tau)$  et  $A(t)$  sont non vides, sans quoi, en vertu de l'hypothèse de rétraction finie, la multiapplication  $A$  prendrait des valeurs vides sur un voisinage de  $t_1$ , ce qui donnerait  $A^+ = \emptyset$ ).

En rapprochant les inclusions il vient :

PROPOSITION. Si  $A$  est à rétraction bornée à droite de  $t_1$ , les ensembles (5.4) (limite inférieure) et (5.5) (limite supérieure) sont égaux à un ensemble qu'on notera  $A^+(t_1)$ . Un ensemble  $B$  vérifie (5.3) si et seulement si il est contenu dans  $A^+(t_1)$ .

DEFINITION. On dit que  $A^+(t_1)$  est la limite à droite de la multiappli-



cation  $A$  au point  $t_1$  (ensemble fermé éventuellement vide).

REMARQUE. Si  $E$  est un espace vectoriel normé et si les valeurs de  $A$  sont des ensembles convexes,  $A^+(t_1)$  est convexe. En effet, deux points  $a$  et  $a'$  de  $A^+(t_1)$  sont respectivement les limites pour  $t \downarrow t_1$  de deux sélections, soient  $t \mapsto u(t)$  et  $t \mapsto u'(t)$  de la multiapplication  $A$ . Le point  $\alpha a + \alpha' a'$  (avec  $\alpha$  et  $\alpha'$  positifs de somme 1) est limite de l'application  $t \mapsto \alpha u(t) + \alpha' u'(t)$ , laquelle est une sélection de  $A$ , puisque les  $A(t)$  sont convexes.

5.d. Saut de  $r$  à droite de  $t_1$ .

On suppose dans ce paragraphe que la multiapplication  $A$  est définie au moins sur l'intervalle fermé  $[t_1, t_2]$ , à rétraction finie, donc bornée, ce qui assure l'existence du réel

$$\inf_{t \in ]t_1, t_2]} \text{ret}(A ; t_1, t) = \lim_{t \downarrow t_1} \text{ret}(A ; t_1, t) = r^+(t_1) - r(t_1) \geq 0$$

saut de la fonction  $r$  à droite de  $t_1$ .

Comme précédemment, on note  $A^+(t_1)$  l'ensemble limite de  $A(t)$  pour  $t \downarrow t_1$ ,  $t \in ]t_1, t_2]$ .

PROPOSITION. On a

$$(5.10) \quad r^+(t_1) - r(t_1) = \lim_{\substack{t \downarrow t_1 \\ t \in ]t_1, t_2]}} e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1))$$

L'égalité des deux premiers membres constitue une généralisation de la Proposition 5.a et se démontre d'une manière semblable, à savoir :

Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe une subdivision de  $[t_1, t_2]$ , notons la :

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_2$$

telle que

$$\text{ret}(A ; t_1, t_2) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) .$$

Si  $t \in ]t_1, \tau_1[$  il en résulte, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \text{ret}(A ; t_1, t_2) &\leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + e(A(t), A(\tau_1)) + \sum_{i=2}^n e(A(\tau_{i-1}), A(\tau_i)) \\ &\leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t)) + \text{ret}(A ; t, t_2) . \end{aligned}$$

De là l'implication

$$t \in ]t_1, \tau_1[ \Rightarrow \text{ret}(A ; t_1, t) \leq \varepsilon + e(A(t_1), A(t))$$

et comme, essentiellement,

$$e(A(t_1), A(t)) \leq \text{ret}(A ; t_1, t)$$

cela démontre l'égalité.

Par ailleurs

$$e(A(t_1), A(t)) \leq e(A(t_1), A^+(t_1)) + e(A^+(t_1), A(t)) .$$

Pour  $t \downarrow t_1$ ,  $t \in ]t_1, t_2]$ , le dernier terme tend vers zéro d'après la Proposition 5.c ; cela établit l'inégalité en (5.10) (noter qu'elle est banale si  $A(t_1)$  ou  $A^+(t_1)$  sont vides).

5.e. Cas où les boules fermées de  $E$  sont compactes.

PROPOSITION. Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent ; on suppose de plus  $A(t_1) \neq \emptyset$  (donc  $A(t) \neq \emptyset$  pour tout  $t \in [t_1, t_2]$  puisque  $A$  est à rétraction finie). Si l'espace métrique  $E$  est tel que les boules fermées soient compactes, l'ensemble limite  $A^+(t_1)$  est non vide et le dernier membre de (5.10) est égal aux deux premiers.

En effet soit  $\rho \in \mathbb{R}_+$ , strictement supérieur à la valeur

commune des deux premiers membres de (5.10) ; il existe  $T \in ]t_1, t_2]$  tel que

$$\theta \in ]t_1, T[ \Rightarrow e(A(t_1), A(\theta)) < \rho .$$

A fortiori, si  $a \in A(t_1)$ ,

$$\theta \in ]t_1, T[ \Rightarrow d(a, A(\theta)) < \rho ,$$

ce qui veut dire que, pour tout  $\theta \in ]t_1, T[$ , la boule fermée  $\beta$ , de centre  $a$ , de rayon  $\rho$  possède une intersection non vide avec  $A(\theta)$ . Elle possède donc aussi une intersection non vide avec l'ensemble

$$F(\theta) = \overline{\bigcup_{\tau \in ]t_1, \theta]} A(\tau)} .$$

Les  $\beta \cap F(\theta)$ , pour  $\theta \in ]t_1, T[$ , constituent une famille de parties fermées de l'ensemble compact  $\beta$  ; si leur intersection était vide, on pourrait en extraire une sous-famille finie d'intersection vide, soit  $\beta \cap F(\theta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , avec

$$t_1 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n .$$

Comme l'ensemble  $F(\theta)$  croît avec  $\theta$ , cette intersection vaut  $\beta \cap F(\theta_1)$ , ce qui est contradictoire. Bref  $\beta$  possède une intersection non vide avec

$$\bigcap_{\theta \in ]t_1, T[} F(\theta)$$

lequel ensemble n'est autre que  $A^+(t_1)$ , d'après (5.6). On montre ainsi que  $A^+(t_1) \neq \emptyset$  et que

$$d(a, A^+(t_1)) < \rho .$$

De là

$$d(a, A^+(t_1)) \leq r^+(t_1) - r(t_1)$$

et, en prenant le sup pour  $a \in A(t_1)$ ,

$$(5.11) \quad e(A(t_1), A^+(t_1)) \leq r^+(t_1) - r(t_1)$$

En rapprochant de (5.10) on obtient l'égalité annoncée.

5.f. Cas où E est le dual d'un espace normé.

On suppose dans ce paragraphe que E est l'espace de Banach dual d'un espace normé X (en particulier E pourra être tout espace de Banach réflexif avec, par exemple, les  $A(t)$  convexes fortement fermés).

LEMME. Soit A, multiapplication de  $]t_1, t_2]$  dans le dual E de l'espace normé X, à rétraction bornée à droite de  $t_1$ . On suppose que les  $A(t)$  sont fermés pour la topologie faible  $\sigma(E, X)$ . Alors l'ensemble  $A^+(t_1)$  est égal à

$$(5.12) \quad \sigma\text{-}\lim_{t \downarrow t_1} \sup A(t) = \bigcap_{\theta \in ]t_1, T]} \overline{\bigcup_{\tau \in ]t_1, \theta]} A(\tau)},$$

où la double barre représente l'adhérence pour  $\sigma(E, X)$  et où  $T \in ]t_1, t_2]$  est choisi indifféremment.

En effet, la topologie en question étant moins fine que la topologie de la norme, (5.6) montre que l'ensemble en question (notons le B) contient  $A^+(t_1)$ . Etablissons l'inclusion inverse en prouvant que B est contenu dans l'ensemble (5.4), c'est-à-dire que, pour tout  $b \in B$ ,

$$(5.13) \quad \lim_{t \downarrow t_1} d(b, A(t)) = 0.$$

Nous allons prouver plus précisément que

$$(5.14) \quad \forall t \in ]t_1, T] : d(b, A(t)) \leq r(t) - r^+(t_1).$$

Soit  $\rho$  un réel strictement inférieur à  $d(b, A(t))$ , c'est-à-dire que, en notant  $\beta$  la boule fermée de centre  $O$ , de rayon  $\rho$ , on a

$$(b-\beta) \cap A(t) = \phi,$$

ce qui équivaut à

$$b \notin \beta + A(t).$$

Or l'ensemble  $\beta + A(t)$  est  $\sigma(E, X)$ -fermé, puisqu'il en est de même de  $A(t)$  et que  $\beta$  est  $\sigma(E, X)$ -compact. Il existe donc un  $\sigma(E, X)$ -voisinage de  $b$ , soit  $V$ , ne rencontrant pas  $\beta + A(t)$ , ce qui implique

$$(5.15) \quad \forall y \in V : d(y, A(t)) \geq \rho.$$

La définition de l'ensemble (5.12) fait que  $b$  est  $\sigma(E, X)$ -adhérent à

$$\bigcup_{\tau \in ]t_1, t]} A(\tau)$$

donc que

$$\exists \tau \in ]t_1, t] : V \cap A(\tau) \neq \phi.$$

En choisissant  $y$  dans  $V \cap A(\tau)$ , (5.15) montre que

$$\sup_{y \in A(\tau)} d(y, A(t)) \geq \rho,$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho &\leq e(A(\tau), A(t)) \leq \text{ret}(A; \tau, t) \\ &\leq r(t) - r^+(t_1). \end{aligned}$$

Cela établit (5.4) et donc (5.13).

On atteint dès lors un résultat semblable à celui du paragraphe 5.e :

PROPOSITION. On suppose que A est définie (au moins) sur l'intervalle fermé  $[t_1, t_2]$ , à rétraction finie, avec  $A(t_1) \neq \phi$ . Si E est le dual d'un espace normé  $\bar{X}$  et si  $A(t)$  est  $\sigma(E, X)$ -fermé quel que soit t, l'ensemble  $A^+(t_1)$  est non vide et le dernier membre de (5.10) est égal aux deux premiers.

La démonstration est semblable à celle de la Proposition 5.e : on devra seulement remplacer la définition de  $F(\theta)$  par

$$F(\theta) = \overline{\bigcup_{\tau \in ]t_1, \theta]} A(\tau)} ;$$

ensembles fermés et ensembles compacts seront entendus au sens de la topologie  $\sigma(E, X)$ .

5.g. Limite de la projection d'un point fixe.

PROPOSITION. Soit E un espace hilbertien réel et soit C une multi-application de  $[t_1, t_2]$  dans E à rétraction finie, à valeurs convexes fermées non vides ; soit  $a \in E$ , alors

$$(5.16) \quad \lim_{t \downarrow t_1} \text{proj}(a, C(t)) = \text{proj}(a, C^+(t_1)) .$$

Nous fonderons la démonstration sur :

LEMME. Si E est le dual d'un espace normé X et si A est une multiapplication à rétraction bornée à droite de  $t_1$ , à valeurs  $\sigma(E, X)$ -fermées non vides, on a, pour tout  $a \in E$ ,

$$(5.17) \quad \lim_{t \downarrow t_1} d(a, A(t)) = d(a, A^+(t_1)) .$$

Par souci d'être complet, établissons d'abord (5.17) dans l'éventualité  $A^+(t_1) = \phi$ , bien que cette éventualité soit exclue

lorsqu'on fait les hypothèses de la Proposition. Dans cette éventualité le second membre de (5.17) vaut  $+\infty$  ; si  $d(a, A(t))$  ne tendait pas vers  $+\infty$  pour  $t \downarrow t_1$ , il existerait  $\rho \in \mathbb{R}$  et une suite infinie  $(\tau_i)$  tendant en décroissant vers  $t_1$  telle que

$$\forall i \in \mathbb{N} : d(a, A(\tau_i)) < \rho .$$

A chaque  $\tau_i$  on pourrait alors associer  $x_i$ , appartenant à  $A(\tau_i)$  et à la boule fermée  $\beta$ , de centre  $a$ , de rayon  $\rho$ . Comme cette boule est  $\sigma(E, X)$ -compacte, la suite  $(x_i)$  posséderait un point  $\sigma(E, X)$ -adhérent, soit  $x$ , à considérer aussi bien comme point  $\sigma(E, X)$ -adhérent, pour  $t \downarrow t_1$ , d'une sélection de la multiapplication (construire cette sélection de manière arbitraire pour les valeurs de  $t$  distinctes des  $\tau_i$ ). Bref  $x$  appartiendrait à l'ensemble (5.12), ce qui contredit le Lemme 5.f et l'hypothèse  $A^+(t_1) = \phi$ .

Si  $A^+(t_1) \neq \phi$ , on peut considérer la multiapplication  $\hat{A}$  définie par

$$\hat{A}(t) = \begin{cases} A(t) & \text{si } t > t_1 \\ A^+(t_1) & \text{si } t = t_1 \end{cases} ;$$

la Proposition 5.f montre que  $\hat{A}$  est à rétraction continue à droite au point  $t_1$ , d'où on conclut, par le Corollaire 2 du Paragraphe 5.a, la semi-continuité supérieure à droite au point  $t_1$  pour la fonction numérique

$$t \mapsto d(a, \hat{A}(t)) .$$

Pour établir (5.17), il reste à prouver la semi-continuité inférieure de cette fonction numérique à droite au point  $t_1$ . La négation de cette semi-continuité inférieure signifierait l'existence de  $\rho \in ]0, d(a, A^+(t_1)[$  et d'une suite décroissante infinie  $(\tau_i)$  conver-

geant vers  $t_1$  telle que les  $A(\tau_i)$  rencontrent la boule fermée de centre  $a$ , de rayon  $\rho$  : le même argument que ci-dessus permet de rejeter cette hypothèse.

Démontrons alors la Proposition. Posons

$$p(t) = \text{proj}(a, C(t))$$

$$p_1 = \text{proj}(a, C^+(t_1))$$

(l'ensemble  $C^+(t_1)$  est non vide d'après la Proposition 5.f). D'après la Proposition 5.c, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta_1 > 0$  tel que

$$t_1 < t < t_1 + \eta_1 \Rightarrow e(C^+(t_1), C(t)) < \varepsilon .$$

Donc, si on pose

$$q(t) = \text{proj}(p_1, C(t))$$

on a l'implication

$$(5.18) \quad t_1 < t < t_1 + \eta_1 \Rightarrow d(p_1, q(t)) < \varepsilon .$$

Cela achèverait la démonstration dans l'éventualité  $p_1 = a$ . Supposons donc que  $d(a, C^+(t_1))$ , noté  $\rho_1$ , est strictement positif ; le Lemme ci-dessus fournit  $\eta_2$  assurant l'implication

$$(5.19) \quad t_1 < t < t_1 - \eta_2 \Rightarrow \rho_1 - \varepsilon < d(a, C(t)) < \rho_1 + \varepsilon .$$

Pour de telles valeurs de  $t$ , l'intersection  $\Gamma(t)$  de  $C(t)$  avec la boule de centre  $a$ , de rayon  $\rho_1 + \varepsilon$ , est un ensemble convexe compris entre deux sphères concentriques de rayons  $\rho_1 - \varepsilon$  et  $\rho_1 + \varepsilon$ .

Un calcul élémentaire classique montre alors que le diamètre de  $\Gamma(t)$  est majoré par  $2\sqrt{\rho_1\varepsilon}$ . Pour des valeurs de  $t$  conformes à (5.18)

le point  $q(t)$  appartient à  $\Gamma(t)$  ; de même pour le point  $p(t)$  si  $t$  est conforme à (5.19) ; donc, si on pose  $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ , on a

l'implication



$$t_1 < t < t_1 - \eta \Rightarrow d(p(t), q(t)) < 2\sqrt{\rho_1}\varepsilon ,$$

d'où, par l'inégalité triangulaire

$$t_1 < t < t_1 - \eta \Rightarrow d(p_1, p(t)) < \quad + 2\sqrt{\rho_1}\varepsilon .$$

## 6. APPROXIMATIONS EN ESCALIER

### 6.a. Multiapplications localement en escalier

Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  ; nous appellerons partition localement finie de  $I$  une partition de cet intervalle en une famille de sous-intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) tels que toute partie compacte de  $I$  soit recouverte par un nombre fini d'entre eux.

Si une telle partition ne comporte qu'un nombre fini d'intervalles on dira que c'est une partition finie de  $I$  (tel sera nécessairement le cas si  $I$  est compact).

Une application ou une multiapplication définie sur  $I$  est dite en escalier (resp. localement en escalier) s'il existe une partition finie (resp. localement finie) de  $I$  sur chaque intervalle de laquelle cette application ou multiapplication est constante.

Dans toute la suite on supposera, pour alléger, que l'intervalle  $I$  contient son origine, soit  $t_0$ . En ce cas les intervalles de toute partition localement finie  $P$  de  $I$  peuvent être munis d'une indexation dans  $\mathbb{N}$  correspondant à leur succession dans  $\mathbb{R}$  : on les notera, par exemple

$$(6.1) \quad P : I_0, I_1, \dots, I_i, \dots$$

et on notera  $t_i$  l'origine de l'intervalle  $I_i$ .

Si  $A$  est une multiapplication localement en escalier de  $I$  dans l'espace métrique  $E$ , constante sur chacun des intervalles de la partition  $P$ , on évalue aisément la rétraction de  $A$  sur tout sous-intervalle compact  $[s, t]$  de  $I$  : Soient  $J_0, J_1, \dots, J_m$ , indexés selon

leur ordre de succession de gauche à droite, ceux des intervalles  $[s, t] \cap I_i$  qui sont non vides ; choisissons arbitrairement un élément  $\sigma_j$  dans chaque  $J_j$ . Toute subdivision de  $[s, t]$  possède un raffinement dont les  $\sigma_j$  sont des noeuds ; on peut donc construire  $\text{ret}(A ; s, t)$  à partir de subdivisions de cette sorte, soit

$$S : s = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n = t .$$

Or  $e(A(\tau_{k-1}), A(\tau_k)) = 0$  si  $[\tau_{k-1}, \tau_k]$  est contenu dans un des  $J_j$  et

$$e(A(\tau_{k-1}), A(\tau_k)) = e(A(\sigma_{j-1}), A(\sigma_j))$$

si  $\tau_{k-1} \in J_{j-1}$  et  $\tau_k \in J_j$  ; il reste donc

$$(6.2) \quad R(S) = \sum_{j=1}^m e(A(\sigma_{j-1}), A(\sigma_j)) ,$$

indépendant de  $S$  : c'est la valeur de la rétraction cherchée  $\text{ret}(A ; s, t)$ .

Image réciproque d'une partition localement finie.

Soit  $r$  une application croissante (peut-être non strictement) de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $\Pi$  une partition localement finie de  $\mathbb{R}$ . Les images réciproques des intervalles constituant  $\Pi$  sont des sous-intervalles de  $I$  ; ceux de ces sous-intervalles qui sont non vides constituent une partition localement finie  $P$  de  $I$  : nous dirons que c'est l'image réciproque de  $\Pi$  par  $r$  et on écrira

$$P = r^{-1}(\Pi)$$

6.b. Construction d'approximations localement en escalier.

NOTATION. Soit  $A$  une multiapplication de  $I$  dans l'espace métrique  $E$ , à rétraction finie.  $P$  étant la partition décrite en (6.1), on notera  $A_P$  la multiapplication localement en escalier qui prend sur chacun des intervalles  $I_i$  une valeur constante déterminée comme suit :

- si  $I_i$  contient son origine  $t_i$  on prend

$$\forall t \in I_i : A_P(t) = A(t_i)$$

(en particulier  $A_P(t_0) = A(t_0)$ ) ;

- sinon on prend

$$\forall t \in I_i : A_P(t) = A^+(t_i)$$

(notations du paragraphe 5.c).

On remarque alors :

$$(6.3) \quad \forall t \in I_i : e(A_P(t), A(t)) \leq \sup\{\text{ret}(A ; \sigma, \tau) : [\sigma, \tau] \subset I_i\} .$$

C'est banal dans le cas  $t_i \in I_i$  ; si  $t_i \notin I_i$  les Propositions 5.b et 5.c montrent que la multiapplication  $\hat{A}$  définie sur  $\{t_i\} \cup I_i$  par

$$\hat{A}(t) = \begin{cases} A(t) & \text{pour } t \in I_i \\ A^+(t_i) & \text{pour } t = t_i \end{cases}$$

donne, pour tout  $t \in I_i$ ,

$$\text{ret}(\hat{A} ; t_i, t) = \sup\{\text{ret}(A ; \sigma, t) : t_i < \sigma \leq t\} .$$

Cela établit (6.3), puisque

$$e(A_P(t), A(t)) = e(\hat{A}(t_i), \hat{A}(t)) \leq \text{ret}(\hat{A} ; t_i, t).$$

On en tire :

PROPOSITION. Soit  $r$  la fonction rétraction de  $A$  c'est-à-dire

$$\forall t \in I : r(t) = \text{ret}(A ; t_0, t) ;$$

soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\Pi$  une partition localement finie de  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueur  $\leq \varepsilon$ . Alors si  $P = \bar{r}^{-1}(\Pi)$ , on a

$$(6.4) \quad \forall t \in I : e(A_P(t), A(t)) \leq \varepsilon .$$

Cela résulte immédiatement de (6.3), puisque, si  $I_i \in P$ ,

on a

$$[\sigma, \tau] \subset I_i \Rightarrow \text{ret}(A ; \sigma, \tau) = r(\tau) - r(\sigma) \leq \varepsilon .$$

Noter que, dans les hypothèses du présent paragraphe,  $A_P(t)$  peut être vide. D'ailleurs une inégalité telle que (6.4) n'est pas en elle-même très substantielle ; elle serait banalement vérifiée si, au lieu de  $A_P$  on considérait la multiapplication identiquement vide. C'est dans les paragraphes suivants que la construction de  $A_P$  prendra tout son prix.

#### 6.c. Cas où les boules de $E$ sont compactes.

PROPOSITION. Avec les notations des paragraphes précédents, on suppose de plus l'espace métrique  $E$  tel que les boules fermées soient compactes. On suppose que la multiapplication  $A$ , à rétraction finie sur  $I$ , est à valeurs non vides (il suffit pour cela que  $A(t_0) \neq \emptyset$ ). Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\Pi$  une partition localement finie de  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueur  $\leq \varepsilon$ . Alors, si  $P = \bar{r}^{-1}(\Pi)$ , la multiapplication  $A_P$ , à valeurs non vides, vérifie

$$(6.5) \quad \forall t \in I : e(A_P(t), A(t)) \leq \epsilon$$

$$(6.6) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{ret}(A_P ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) + \epsilon$$

$$(6.7) \quad \forall t \in I : \text{ret}(A_P ; t_0, t) \leq \text{ret}(A ; t_0, t) .$$

Démonstration : Les valeurs de  $A_P$  sont non vides, en vertu de la Proposition 5.e.

Pour évaluer  $\text{ret}(A_P ; s, t)$ , appelons  $J_0, J_1, \dots, J_m$ , indexés dans l'ordre de leur succession dans  $\mathbb{R}$ , ceux des intervalles  $[s, t] \cap I_i$  qui sont non vides. On note  $s_j$  l'origine de  $J_j$ ; on choisit un  $\sigma_j$  dans chaque  $J_j$  et on utilise (6.2) :

$$\text{ret}(A_P ; s, t) = \sum_{j=1}^m e(A_P(\sigma_{j-1}), A_P(\sigma_j)) ,$$

d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$(6.8) \quad \text{ret}(A_P ; s, t) \leq \sum_{j=1}^m [e(A_P(\sigma_{j-1}), A(s_j)) + e(A(s_j), A_P(\sigma_j))] .$$

Le terme  $e(A(s_j), A_P(\sigma_j))$ , pour  $j \geq 1$ , donne lieu à la majoration suivante : si  $s_j \notin J_j$  ce point est nécessairement l'origine d'un des  $I_i$  et ne lui appartient pas, donc, d'après la construction de  $A_P$ ,

$$A_P(\sigma_j) = A^+(s_j)$$

d'où, d'après l'inégalité (5.11) (ou la Proposition 5.e),

$$\begin{aligned} e(A(s_j), A_P(\sigma_j)) &= e(A(s_j), A^+(s_j)) \leq r^+(s_j) - r(s_j) \\ &\leq r(\sigma_j) - r(s_j) . \end{aligned}$$

Bref

$$(6.9) \quad e(A(s_j), A_P(\sigma_j)) \leq \text{ret}(A ; s, \sigma_j)$$

↑  
CQED

et cette inégalité sera encore banalement vraie, avec les deux membres nuls, lorsque  $s_j \in J_j$ , si l'on convient de choisir  $\sigma_j$  selon la règle :

$$(6.10) \quad \text{pour } s_j \in J_j \text{ et } j \geq 1 : \sigma_j = s_j .$$

Le terme  $e(A_P(\sigma_{j-1}), A(s_j))$  donne lieu à la majoration suivante : on choisit  $\eta > 0$  ; si  $s_{j-1} \notin J_{j-1}$  (hypothèse qui implique  $j > 1$ ), on a

$$A_P(\sigma_{j-1}) = A^+(s_{j-1})$$

donc, d'après l'inégalité (5.7),

$$e(A_P(\sigma_{j-1}), A(s_j)) \leq r(s_j) - r^+(s_{j-1}) .$$

Il suffit de choisir  $\sigma_{j-1}$  assez voisin de  $s_{j-1}$  pour que

$$r(\sigma_{j-1}) < r^+(s_{j-1}) + \eta$$

de sorte que

$$r(s_j) - r^+(s_{j-1}) < r(s_j) - r(\sigma_{j-1}) + \eta = \text{ret}(A ; \sigma_{j-1}, s_j) + \eta .$$

Alors

$$(6.11) \quad e(A_P(\sigma_{j-1}), A(s_j)) < \text{ret}(A ; \sigma_{j-1}, s_j) + \eta$$

et cette inégalité est encore banalement vraie lorsque  $s_{j-1} \in J_{j-1}$

et  $j > 1$  : dans ce cas, en effet, (6.10) implique  $A_P(\sigma_{j-1}) = A(\sigma_{j-1})$ .

Pour  $j = 1$ , l'inégalité (6.11) n'est plus vraie en général, mais

on écrit

$$e(A_P(\sigma_0), A(s_1)) \leq e(A_P(\sigma_0), A(\sigma_0)) + e(A(\sigma_0), A(s_1))$$

d'où, vu (6.5),

$$(6.12) \quad e(A_P(\sigma_0), A(s_1)) \leq \varepsilon + \text{ret}(A ; \sigma_0, s_1) .$$

En rapprochant (6.8), (6.9), (6.11), et (6.12) on obtient

$$\begin{aligned} \text{ret}(A_P ; s, t) &\leq \varepsilon + (m-1)\eta + \sum_{j=1}^m [\text{ret}(A ; \sigma_{j-1}, s_j) + \text{ret}(A ; s_j, \sigma_j)] \\ &\leq \varepsilon + (m-1)\eta + \text{ret}(A ; \sigma_0, \sigma_m) \\ &\leq \varepsilon + (m-1)\eta + \text{ret}(A ; s, t) . \end{aligned}$$

Comme  $\eta$  peut être choisi arbitrairement voisin de zéro, cela prouve (6.6).

Enfin, pour établir (6.7), on note que si  $s = t_0$ , on a  $s_0 = t_0$  ce qui permet de prendre  $\sigma_0 = t_0$  : dans ce cas on peut omettre le terme  $\varepsilon$  en (6.12).

6.d. Cas où E est le dual d'un espace normé.

Le même raisonnement que ci-dessus, en invoquant cette fois les résultats du paragraphe 5.f. au lieu de ceux du paragraphe 5.e., fournit :

PROPOSITION. Avec les notations des paragraphes précédents, on suppose que E est le dual d'un espace normé X et que les  $A(t)$  sont  $\sigma(E, X)$ -fermés non vides. Alors (6.5), (6.6) et (6.7) ont lieu.

6.e. Ordre sur l'ensemble des partitions localement finies de I.

NOTATION. Soient P et P' deux partitions localement finies de I ; on écrira  $P \prec P'$  si P' est un raffinement de P, c'est-à-dire si tout intervalle de P' est contenu dans un intervalle de P.

Cela revient à dire que tout intervalle de P possède une partition constituée d'intervalles de P' .

Il est clair que  $\prec$  constitue une relation d'ordre sur l'ensemble



$\mathcal{P}$  des partitions localement finies de  $I$  et que cet ordre est filtrant à droite : deux partitions localement finies de  $I$  possèdent un raffinement commun, à savoir la partition constituée par les intersections non vides d'intervalles de  $P$  et d'intervalles de  $P'$  (ce raffinement est bien une partition localement finie).

Selon une terminologie usuelle, toute application  $f$  de  $\mathcal{P}$  dans un espace topologique  $\mathcal{E}$  pourra s'interpréter comme une suite généralisée indexée dans  $\mathcal{P}$  et on pourra parler éventuellement de la convergence de cette suite généralisée vers un élément  $l \in \mathcal{E}$ , c'est-à-dire convergence de cette application de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{E}$ , selon la base de filtre des sections de  $\mathcal{P}$  : on dira plus brièvement que  $f(P)$ , ou  $f_P$ , tend vers  $l$  pour  $P$  croissant dans  $\mathcal{P}$  et on convient de l'écriture :

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} f_P = l .$$

La démonstration de la Proposition 6.b se trouve de la sorte fournir le résultat légèrement plus fort que voici :

L'application  $P \mapsto e(A_P(t), A(t))$ , de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}_+$ , converge vers zéro pour  $P$  croissant dans  $\mathcal{P}$ , et cela uniformément par rapport à  $t \in I$ .

De même :

Dans les conditions des Propositions 6.c ou 6.d, l'application  $P \mapsto \text{ret}(A_P; t_0, t)$  est croissante de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{R}$ ; pour  $P$  croissant dans  $\mathcal{P}$ , elle converge vers  $\text{ret}(A; t_0, t)$  et cela uniformément par rapport à  $t \in I$ .

Que cette application soit croissante résulte immédiatement de l'inégalité triangulaire.

Quant à la convergence vers  $\text{ret}(A; t_0, t)$ , on peut montrer

d'abord qu'elle est uniforme sur tout sous-intervalle compact de  $I$ . Ensuite, si  $I$  n'est pas compact, on pourra tout au moins le recouvrir par une suite d'intervalles compacts  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . A tout  $\varepsilon > 0$ , on associe une suite  $(\varepsilon_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de réels  $> 0$  tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leq \varepsilon .$$

Les partitions localement finies souhaitées s'obtiennent par recollement.

Notons enfin qu'à partir d'un théorème de convergence dans  $\mathcal{P}$ , on peut usuellement caractériser l'élément limite  $l \in \mathcal{E}$  par une propriété moins forte mais d'utilisation plus simple en invoquant seulement des suites croissantes de partitions : si l'élément  $l \in \mathcal{E}$  possède une base dénombrable de voisinages, soit  $(V_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , la propriété de convergence dans  $\mathcal{P}$  fournit, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , une partition  $P_i \in \mathcal{P}$  telle que

$$P_i \prec P \implies f(P) \in V_i ,$$

On construit alors une suite croissante  $(\Pi_i)$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  par la récurrence suivante :  $\Pi_{i+1}$  est un raffinement commun de  $\Pi_i$  et de  $P_{i+1}$ . Il est clair que  $l$  est la limite de la suite  $f(\Pi_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

7. THEOREMES DE SELECTION.

7.a. Cas où les boules fermées de E sont compactes.

PROPOSITION. On suppose l'espace métrique E tel que les boules fermées soient compactes. Soit I un intervalle de R contenant son origine  $t_0$  et soit A une multiapplication à rétraction finie de I dans E, à valeurs fermées. Alors, quel que soit  $a_0 \in A(t_0)$ , il existe une sélection  $t \mapsto u(t) \in A(t)$  de la multiapplication A, telle que  $u(t_0) = a_0$  et que

$$(7.1) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) .$$

Démonstration : Supposons  $A(t_0) \neq \emptyset$ , sans quoi l'énoncé est banal. La Proposition 6.c fournit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une multiapplication localement en escalier à valeurs fermées non vides, qu'on notera  $A^n$  telle que  $A^n(t_0) = A(t_0)$  et que

$$(7.2) \quad \forall t \in I : e(A^n(t), A(t)) \leq \frac{1}{n}$$

$$(7.3) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{ret}(A^n ; s, t) \leq \text{ret}(A ; s, t) + \frac{1}{n} .$$

Soit  $(I_i^n)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  la suite, éventuellement infinie, des intervalles, indexés dans l'ordre de leur succession dans I, sur chacun desquels la multiapplication  $A^n$  est constante. On peut construire de la manière suivante une application localement en escalier  $t \mapsto u^n(t) \in A^n(t)$  qui soit une sélection de  $A^n$  et constante sur les mêmes intervalles ; la valeur  $a_i^n$  de  $u^n$  sur l'intervalle  $I_i^n$  est définie par récurrence :

$$(7.4) \quad a_0^n = a_0$$

et  $a_{i+1}^n$  choisi dans l'ensemble  $A_{i+1}^n$  (valeur constante de  $A^n$  sur l'intervalle  $I_{i+1}^n$ ) de manière que

$$(7.5) \quad d(a_i^n, a_{i+1}^n) = d(a_i^n, A_{i+1}^n) .$$

Un tel  $a_{i+1}^n$  existe certainement, en vertu de l'hypothèse de compacité des boules.

La variation de la fonction  $u^n$  sur un intervalle  $[s, t] \subset I$  se construit en considérant ceux des intervalles  $[s, t] \cap I_i^n$  qui sont non vides, soient  $J_0, J_1, \dots, J_m$ , indexés dans l'ordre de leur succession, et en choisissant un élément  $\sigma_j$  dans chaque  $J_j$  (cf. § 6.a) :

$$\text{var}(u^n ; s, t) = \sum_{j=1}^m d(u^n(\sigma_{j-1}), u^n(\sigma_j))$$

tandis que la rétraction de  $A^n$  est

$$\text{ret}(A^n ; s, t) = \sum_{j=1}^m e(A^n(\sigma_{j-1}), A^n(\sigma_j)) .$$

Alors (7.3) et (7.5) fournissent

$$(7.6) \quad \text{var}(u^n ; s, t) \leq \text{ret}(A^n ; s, t) \leq \frac{1}{n} + \text{ret}(A ; s, t) .$$

Il en résulte d'abord

$$(7.7) \quad \forall t \in I : d(a_0, u^n(t)) \leq 1 + \text{ret}(A ; 0, t) < +\infty .$$

Notons  $B(t)$  la boule fermée de centre  $a_0$ , de rayon  $1 + \text{ret}(A ; 0, t)$ , munie de la topologie induite par celle de  $E$ , cette boule constitue un espace topologique compact. L'application  $u_n : I \rightarrow E$  peut, en vertu de (7.7) s'interpréter comme un élément de l'espace produit

$$P = \prod_{t \in I} B(t)$$

Muni de la topologie produit, cet espace est compact, d'après le théorème de Tychonoff, donc la suite  $u^n$  possède au moins un point

adhérent, soit  $u$  ; de façon équivalente,  $u$  est un point adhérent de la suite  $u^n$  dans l'espace fonctionnel  $E^I$ , muni de la topologie de la convergence simple. Nous allons montrer que cet  $u : I \rightarrow E$  possède les propriétés formulées dans la Proposition.

Evidemment  $u(t_0) = a_0$ .

Montrons que

$$(7.8) \quad \forall t \in I : u(t) \in A(t).$$

Soit  $t$  fixé et soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $u$  est adhérent à la suite  $u^n$  pour la topologie de la convergence simple, il existe  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  tel que

$$d(u(t), u^n(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En outre, comme  $u^n(t) \in A^n(t)$  on a, d'après (7.2)

$$d(u^n(t), A(t)) \leq e(A^n(t), A(t)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$d(u(t), A(t)) \leq d(u(t), u^n(t)) + d(u^n(t), A(t)) < \varepsilon,$$

ce qui prouve (7.8), puisque  $A(t)$  est fermé dans  $E$ .

Enfin on établit (7.1) en prouvant :

$$(7.9) \quad \forall [\sigma, \tau] \subset I : d(u(\sigma), u(\tau)) \leq \text{ret}(A ; \sigma, \tau).$$

Soient  $\sigma$  et  $\tau$  fixés et soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $n > \frac{3}{\varepsilon}$  tel que

$$d(u(\sigma), u^n(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$d(u(\tau), u^n(\tau)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vu (7.6), on a

$$d(u^n(\sigma), u^n(\tau)) \leq \text{var}(u^n ; \sigma, \tau) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \text{ret}(A ; \sigma, \tau).$$

Alors

$$\begin{aligned} d(u(\sigma), u(\tau)) &\leq d(u(\sigma), u^n(\sigma)) + d(u^n(\sigma), u^n(\tau)) + d(u^n(\tau), u(\tau)) \\ &< \varepsilon + \text{ret}(A ; \sigma, \tau) , \end{aligned}$$

ce qui établit (7.9)

REMARQUE. L'intérêt principal de (7.1) est de montrer que, si de plus la multiapplication  $A$  est à rétraction continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport  $\ell$ ), la sélection  $u$  est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport  $\ell$ ).

7.b. Cas où  $E$  est le dual d'un espace normé.

PROPOSITION. On suppose que  $E$  est l'espace de Banach dual d'un espace normé  $X$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant son origine  $t_0$  et soit  $A$  une multiapplication à rétraction finie de  $I$  dans  $E$ , à valeurs  $\sigma(E, X)$  fermées. Alors, quel que soit  $a_0 \in A(t_0)$ , il existe une sélection  $t \mapsto u(t) \in A(t)$  de la multiapplication  $A$  telle que  $u(t_0) \in a_0$  et vérifiant l'inégalité (7.1).

Démonstration : On reprend les constructions du paragraphe précédent, avec les mêmes notations. L'existence de  $a_{i+1}^n$  vérifiant (7.5) résulte de ce que les boules fermées de  $E$  sont  $\sigma(E, X)$ -compactes. On obtient à nouveau (7.6) et (7.7). La boule  $B(t)$  est compacte pour la topologie faible  $\sigma(E, X)$ ; on applique le théorème de Tychonoff pour cette topologie et conclut à l'existence de  $u$ , point adhérent de la suite  $u^n$  dans l'espace fonctionnel  $E^I$ , muni de la topologie de la convergence simple faible.

Pour établir (7.8) on remarque que l'ensemble  $A(t)$  est, a fortiori, fortement fermé ; donc si, pour un  $t$  fixé,  $u(t)$  n'appartient pas à cet ensemble, il existerait  $\varepsilon > 0$  tel que  $d(u(t), A(t)) > \varepsilon$ , c'est-à-dire, en appelant  $\beta(\varepsilon)$  la boule fermée de centre  $0$ , de rayon  $\varepsilon$ ,

$$u(t) \notin A(t) + \beta(\varepsilon).$$

Pour la topologie faible  $\sigma(E, X)$ , les ensembles  $A(t)$  et  $\beta(\varepsilon)$  sont l'un fermé et l'autre compact, donc  $A(t) + \beta(\varepsilon)$  est fermé. Il existerait donc  $V$ , voisinage faible de  $0$  tel que

$$(7.10) \quad (u(t) + V) \cap (A(t) + \beta(\varepsilon)) = \phi.$$

Or,  $u(t)$  étant point adhérent faible de la suite  $u^n(t)$ , il existe  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  tel que  $u^n(t) \in u(t) + V$ ; et, vu (7.2),

$$d(u^n(t), A(t)) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ce qui contredit (7.10).

Enfin, pour établir (7.9) dans le contexte présent, on remarque que, pour tout  $W$ , voisinage faible de  $0$ , il existe un autre de ces voisinages, soit  $V$  tel que

$$V - V \subset W;$$

$\sigma$  et  $\tau$  étant fixés dans  $I$ , soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ ; il existe  $n > n_0$  tel que

$$u^n(\sigma) \in u(\sigma) + V, \quad u^n(\tau) \in u(\tau) + V$$

de sorte que

$$u^n(\tau) - u^n(\sigma) \in u(\tau) - u(\sigma) + W.$$

Or (7.6) fournit

$$|u^n(\tau) - u^n(\sigma)| \leq \frac{1}{n} + \text{ret}(A; \sigma, \tau) \leq \frac{1}{n_0} + \text{ret}(A; \sigma, \tau).$$

Bref, quel que soit  $n_0$ , le point  $u(\tau) - u(\sigma)$  est adhérent à la boule fermées de centre 0, de rayon  $\frac{1}{n_0} + \text{ret}(A; \sigma, \tau)$ ; cela prouve (7.9).



## 8. PROCESSUS DE RAFLE DANS UN ESPACE HILBERTIEN

### 8.a. Formulation forte et discrétisation du temps.

On reprend la formulation du paragraphe 1.a dans le cas, un peu plus général, d'un intervalle non nécessairement compact.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , contenant son origine  $t_0$  et soit  $H$  un espace hilbertien réel dans lequel on note  $|\cdot|$  la norme et  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire. On donne une multiapplication  $t \mapsto C(t)$ , définie sur  $I$ , à valeurs convexes fermées non vides ; soit  $x \mapsto \psi(t, x)$  la fonction indicatrice de  $C(t)$ .

On appelle solution du problème de rafle par  $C$ , pour la donnée initiale  $a \in C(t_0)$ , une application localement absolument continue  $u : I \rightarrow H$  vérifiant

$$(8.1) \quad u(t_0) = a$$

et, pour presque tout  $t$  dans  $I$ ,

$$(8.2) \quad -\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u(t)).$$

L'unicité d'une telle solution, si elle existe, résulte élémentairement de ce que la multiapplication  $x \mapsto \partial\psi(t, x)$  est monotone au sens de Minty : cela implique en effet que, si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions, la fonction numérique  $t \mapsto |u(t) - u'(t)|$  est décroissante.

La recherche d'hypothèses assurant l'existence de  $u$  peut être abordée de bien des manières (cf. MOREAU [3], [4]). Une technique naturelle, pour le calcul numérique notamment, est celle de discrétisation du temps : on cherche à construire une suite strictement croissante  $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$  (finie ou non) de points de  $I$ , et une suite

$x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$  de points de  $H$ , de manière que, en un certain sens,  $x_i$  soit, pour chaque  $i$ , une approximation de  $u(t_i)$ . Cela conduit à adopter, en tant qu'approximation de la dérivée  $\frac{du}{dt}(t_i)$ , l'expression

$$(8.3) \quad \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) ,$$

ce qui engendre, comme traduction approchée de (8.2), la condition de récurrence :

$$(8.4) \quad \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (x_{i-1} - x_i) \in \partial\psi(t_i, x_i) .$$

On présume que cette relation de récurrence, jointe à la condition initiale

$$(8.5) \quad x_0 = a$$

issue de (8.1), détermine, de proche en proche, la suite  $(x_i)$  pour chaque choix de la suite  $(t_i)$ . De fait, comme  $t_i - t_{i-1} > 0$ , la condition (8.4) signifie que  $x_i \in C(t_i)$  et que  $x_{i-1} - x_i$  appartient au cône des normales sortantes au point  $x_i$  du convexe  $C(t_i)$ , cela équivaut classiquement à :

$$(8.6) \quad x_i = \text{proj}(x_{i-1}, C(t_i)) .$$

Bref, la suite de points  $(x_i)$  se construit par une cascade de projections sur la suite de convexes  $C(t_i)$ , ce que nous appelons l'algorithme de rattrapage.

Il est intéressant de noter que cet usage de l'expression (8.3) comme approximation de la dérivée  $\frac{du}{dt}(t_i)$  fournit ce qu'on appelle, en analyse numérique, un "schéma de discrétisation de type implicite" ; on veut dire par là que l'exploitation de la loi de récurrence obtenue pour les  $x_i$  exige, à chaque pas, la résolution d'un

problème auxiliaire : ici la construction du point projection, selon l'écriture (8.6). Adopter (8.3) comme approximation de  $\frac{du}{dt}(t_{i-1})$  aurait fourni, à la place de (8.4) la condition

$$(8.7) \quad \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (x_{i-1} - x_i) \in \partial\psi(t_{i-1}, x_{i-1}),$$

déclarée "de type explicite" parce que  $x_i$ , inconnue du  $i$ -ème pas, se trouve apparaître au premier membre seulement. En dépit de cette simplicité formelle (8.7) est difficilement exploitable puisque le second membre est multivoque, éventuellement vide. Le présent exemple illustre ainsi de façon frappante la supériorité du "schéma implicite".

L'idée directrice pour ce qui suit va être d'interpréter plutôt l'algorithme de rattrapage comme une technique d'approximation en escalier en ce qui concerne la donnée  $t \mapsto C(t)$  et l'inconnue  $t \mapsto u(t)$ . En effet la suite d'intervalles  $[t_i, t_{i+1}[$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , constitue une partition localement finie, soit  $P$ , de l'intervalle  $I$ . Les ensembles  $C(t_i)$  qui apparaissent en (8.6) sont les valeurs prises sur ces intervalles respectifs par la multiapplication localement en escalier  $C_P$  (notation du paragraphe 6.b). La fonction localement en escalier qui prend les valeurs respectives  $x_i$  sur les intervalles en question est solution faible du problème de rafle associé à  $C_P$ , au sens de la définition ci-dessous.

DEFINITION. Soit

$$P : I_0, I_1, \dots, I_i, \dots$$

une partition de  $I$  en intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) et soit  $C$  la multiapplication localement en escalier de  $I$  dans  $H$  défini par

$$C(t) = C_i \quad \text{pour } t \in I_i ,$$

les  $C_i$  étant des ensembles convexes fermés non vides. On appelle solution généralisée, ou solution faible, du problème de rafle par  $C$ , pour la donnée initiale  $a \in C(t_0) = C_0$ , l'application localement en escalier  $u : I \rightarrow H$  définie par

$$u(t) = x_i \quad \text{pour } t \in I_i ,$$

la suite des points  $x_i$  étant construite par la loi de récurrence

$$x_0 = a$$

$$(8.7) \quad x_i = \text{proj}(x_{i-1}, C_i) .$$

Cette définition est d'ailleurs très naturellement suggérée aussi par l'image mécanique donnée du processus de rafle au paragraphe 1.a. On note immédiatement qu'elle conserve un des traits fondamentaux du processus : si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions (correspondant à deux données initiales  $a$  et  $a'$ ), la fonction numérique

$$t \mapsto |u(t) - u'(t)|$$

est décroissante : cela résulte de ce que chacune des applications  $x \mapsto \text{proj}(x, C_i)$  est contractante.

REMARQUE. La rétraction de la multiapplication  $C$  sur un intervalle  $[s, t]$  s'évalue par la technique du paragraphe 6.a : soient  $p, p+1, \dots, p+m$  les valeurs de  $i$  telles que  $[s, t] \cap I_i \neq \emptyset$  ; alors

$$\text{ret}(C ; s, t) = \sum_{i=p+1}^{p+m} e(C_{i-1}, C_i) .$$

De même la variation de la solution  $u$  sur  $[s, t]$  est

$$\text{var}(u ; s, t) = \sum_{i=p+1}^{p+m} d(x_{i-1}, x_i) .$$

Or (8.7) implique

$$d(x_{i-1}, x_i) \leq e(C_{i-1}, C_i) ,$$

donc

$$(8.8) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{var}(u ; s, t) \leq \text{ret}(C ; s, t)$$

inégalité que nous retrouverons plus loin dans un cadre tout à fait général.

#### 8.b. Convergence des approximations localement en escalier.

PROPOSITION. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant son origine  $t_0$ , soit  $t \mapsto C(t)$  une multiapplication de  $I$  dans l'espace hilbertien  $H$ , à rétraction finie, à valeurs convexes fermées non vides et soit  $a \in C(t_0)$ . A chaque partition localement finie  $P$  de  $I$ , on associe la multi-application localement en escalier  $C_P$  (notation 6.b) et la solution généralisée (définition 8.a), soit  $u_P : I \rightarrow H$ , du problème de rafle par  $C_P$  pour la donnée initiale  $a$ . Alors les  $u_P$ , pour  $P$  parcourant l'ordonné filtrant  $\mathcal{P}$ , constituent une suite généralisée de fonctions uniformément convergente sur tout compact de  $I$ .

DEFINITION. La limite de la suite généralisée ci-dessus est appelée solution faible du problème de rafle par  $C$  pour la donnée initiale  $a$ .

La démonstration de la Proposition repose sur l'inégalité que voici :

LEMME 1. Soit  $G$  une partie convexe fermée non vide de  $H$ ; soient  $x$  et  $y$  deux points de  $H$ ; alors

$$(8.9) \quad |x - \text{proj}(y, \mathcal{G})|^2 - |x - y|^2 \leq 2d(x, \mathcal{G}) d(y, \mathcal{G}).$$

En effet, si l'on note  $x' = \text{proj}(x, \mathcal{G})$  et  $y' = \text{proj}(y, \mathcal{G})$ , le premier membre de cette inégalité s'écrit

$$\begin{aligned} (y-y' | 2x-y-y') &= 2(y-y' | x-x'+x'-y'+ \frac{y'-y}{2}) \\ &= 2(y-y' | x-x') + 2(y-y' | x'-y') - |y'-y|^2, \end{aligned}$$

Le premier terme de ce dernier membre est majoré par

$$2 |y-y'| \cdot |x-x'| = 2d(y, \mathcal{G}) d(x, \mathcal{G});$$

et, vu que  $x' \in \mathcal{G}$ , le second terme est  $\leq 0$ , en vertu d'une caractérisation classique de  $\text{proj}(y, \mathcal{G})$ ; le dernier terme est banalement  $\leq 0$ , d'où (8.9) (ce type d'argument donne le sentiment que (8.9) est une inégalité assez grossière; elle nous suffira pour ce qui suit, mais on se doute que l'essentiel des faits exposés dans ce paragraphe subsisterait, moyennant formulation convenable, si l'on remplaçait l'espace hilbertien  $H$  par un espace de Banach uniformément convexe quelconque)

LEMME 2. Soit  $I_i$ , d'origine  $t_i$  (non nécessairement incluse) l'un des intervalles constituant la partition  $P$  de  $I$ . Soit  $P'$  une partition localement finie de  $I$  plus fine que  $P$ . Soient respecti- vement  $u_p$  et  $u_{p'}$  des solutions faibles du problème de rafle par les multiapplications localement en escalier  $C_p$  et  $C_{p'}$ . On note  $J_1, J_2, \dots, J_m$  la famille <sup>supposée</sup> finie (indexée selon l'ordre de  $\mathbb{R}$ ) des intervalles de  $P'$  qui sont contenus dans  $I_i$  et on note  $J_{m+1}$  l'intervalle de  $P'$  qui fait suite à  $J_m$  (s'il existe). Alors quels que soient  $\sigma \in J_1$  et  $\tau \in I_i \cup J_{m+1}$  tels que  $\sigma \leq \tau$ , on a

$$(8.10) \quad |u_p(\tau) - u_{p'}(\tau)|^2 - |u_p(\sigma) - u_{p'}(\sigma)|^2$$

$$\leq 2(\text{ret}(C_{p'}; \sigma, \tau))^2$$

$$p = \sup \{ \text{ret}(C_{p'}; \sigma, \theta') : [\sigma, \theta'] \subset I_i \}$$

voilà  
p est la

Etablissons d'abord cette inégalité dans le cas  $\tau \in J_{m+1}$ .

Notons respectivement  $x_i$  et  $C_i$  les valeurs de  $u_p$  et de  $C_p$  dans l'intervalle  $I_i$ ; notons respectivement  $y_j$  et  $D_j$  les valeurs de  $u_{p'}$  et  $C_{p'}$  dans  $J_j$ .

La définition de  $u_{p'}$  donne

$$y_{j+1} = \text{proj}(y_j, D_{j+1})$$

d'où, d'après l'inégalité (8.9),

$$(8.11) \quad |x_i - y_{j+1}|^2 - |x_i - y_j|^2 \leq 2d(x_i, D_{j+1}) d(y_j, D_{j+1}).$$

En donnant à  $j$  les valeurs  $1, 2, \dots, m-1$  et en ajoutant membre à membre les inégalités obtenues, il reste

$$(8.12) \quad |x_i - y_{m+1}|^2 - |x_i - y_1|^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{m-1} d(x_i, D_{j+1}) d(y_j, D_{j+1}).$$

Par ailleurs

Comme  
par conséquent!

$$x_{i+1} = \text{proj}(x_i, C_{i+1}).$$

La définition de  $C_p$  et  $C_{p'}$  implique  $C_{i+1} = D_{m+1}$  (à savoir  $C(t_{i+1})$  si  $t_{i+1} \in I_{i+1}$  et  $C^+(t_{i+1})$  si  $t_{i+1} \notin I_{i+1}$ ). Comme  $y_{m+1} \in D_{m+1}$  et que la projection sur un convexe est une application contractante, on a

$$|x_{i+1} - y_{m+1}|^2 \leq |x_i - y_{m+1}|^2.$$

On en conclut que le premier membre de (8.10) est majoré par le second membre de (8.12). Comme  $x_i$  appartient à  $C_i = D_1$ , on a pour tout  $j = 1, 2, \dots, m-1$

$$d(x_i, D_{j+1}) \leq e(D_1, D_{j+1}) \leq \text{ret}(C_{p'}; \sigma, \tau)$$

$$\sup \{ \text{ret}(C_{p'}; \sigma, \theta) : [\sigma, \theta] \subset I_i \}$$

est p

Donc le second membre de (8.12) est majoré par

$$2 \operatorname{ret}(C_{P'} ; \sigma, \tau) \sum_{j=1}^m e(D_j, D_{j+1}) = 2(\operatorname{ret}(C_{P'} ; \sigma, \tau))^2$$

ce qui établit (8.10).

Il reste à adapter cette démonstration au cas  $\tau \in I_i$  ; dans ce cas appelons  $\mu$  la valeur de  $j$  telle que  $\tau \in J_j$ . On ajoute membre à membre les inégalités telles que (8.11) en faisant  $j = 1, 2, \dots, \mu$ . Cela donne à gauche le premier membre de (8.10) ; à droite on a les mêmes majorations que ci-dessus, au remplacement près de  $m$  par  $\mu$ .

Ce Lemme 2 va permettre d'établir la Proposition en montrant que la suite généralisée  $(u_P)$ ,  $P \in \mathcal{P}$ , est de Cauchy, uniformément par rapport à  $t$  dans un compact de  $I$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $T \geq t_0$ . La Proposition 6.d (en identifiant l'espace hilbertien  $H$  à son dual) fournit  $P \in \mathcal{P}$  telle que

$$\forall t \in I : e(C_P(t), C(t)) \leq \varepsilon$$

$$\forall t \in I : \operatorname{ret}(C_P ; t_0, t) \leq \operatorname{ret}(C ; t_0, t)$$

et, selon les remarques du paragraphe 6.e, ces mêmes inégalités sont vérifiées a fortiori pour toute partition  $P' \in \mathcal{P}$  plus fine que  $P$ .

Notons spécialement  $u_P$  et  $u_{P'}$  les solutions du problème de rafle par  $C_P$  et  $C_{P'}$  pour la même donnée initiale :

$$u_P(t_0) = u_{P'}(t_0) = a$$

On note, comme précédemment,  $I_i$  les intervalles constituant la partition  $P$  ; soit  $i_t$  la valeur de  $i$  telle que  $t \in I_i$ . Appliquons le Lemme 2 pour  $i = 1, 2, \dots, i_t$ , en prenant



$$\text{si } i = 1 : \quad \sigma = \sigma_i = t_0$$

$$\text{si } 2 \leq i < i_t : \sigma = \sigma_i \in J_1, \quad \tau = \tau_i = \sigma_{i+1}$$

$$\text{si } i = i_t : \quad \sigma = \sigma_i \in J_i, \quad \tau = \tau_i = t$$

En ajoutant membre à membre, il reste

$$|u_P(t) - u_{P'}(t)|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{i_t} (\text{ret}(C_{P'}; \sigma_i, \tau_i))^2$$

Or, la construction des  $C_{P'}$  permet d'invoquer l'inégalité (6.6) :

$$\text{ret}(C_{P'}; \sigma_i, \tau_i) \leq \text{ret}(C; \sigma_i, \tau_i) + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$

L'inégalité ci-dessus donne donc

$$\begin{aligned} |u_P(t) - u_{P'}(t)|^2 &\leq 6\varepsilon \sum_{i=1}^{i_t} \text{ret}(C_{P'}; \sigma_i, \tau_i) \\ &\leq 6\varepsilon \text{ret}(C_{P'}; t_0, t) \\ &\leq 6\varepsilon \text{ret}(C; t_0, t) \leq 6\varepsilon \text{ret}(C; t_0, T). \end{aligned}$$

Finalement, si  $P''$  est une autre partition localement finie plus fine que  $P$ , on obtient, pour tout  $t \in [t_0, T]$

$$|u_{P'}(t) - u_{P''}(t)| \leq 2\sqrt{6\varepsilon \text{ret}(C; t_0, T)}$$

C'est bien la propriété de Cauchy pour la suite généralisée  $(u_P)$ , d'où convergence parce que  $H$  est complet. Si on note  $u$  la limite, il vient pour tout  $t \in [t_0, T]$  et toute partition localement finie  $P'$  plus fine que  $P$ ,

$$\begin{aligned} (8.13) \quad |u_{P'}(t) - u(t)| &\leq 2\sqrt{6\varepsilon \text{ret}(C; t_0, T)} \\ &\leq 2\sqrt{6\varepsilon \text{ret}(C; t_0, T)}, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la convergence est uniforme sur  $[t_0, T]$ .

REMARQUE 1. Si l'intervalle est compact toute partition localement finie est ispo facto finie. Pour  $I$  non compact, la Proposition ci-dessus peut-être légèrement améliorée, dans deux voies distinctes :

- ou bien on se contente, selon l'énoncé, de convergence uniforme sur tout compact, dans ce cas on peut établir la convergence en se restreignant aux partitions finies.

- ou bien on peut montrer que la convergence est uniforme sur  $I$  tout entier : on recouvre pour cela  $I$  par une suite d'intervalles compacts  $(K_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . A tout  $\varepsilon > 0$  on peut associer une suite de réels  $\varepsilon_k > 0$  soit  $(\varepsilon_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$$

On procède alors à l'approximation à  $\varepsilon_k$  près sur  $K_k$ , etc...

REMARQUE 2. Pour l'étude de la fonction limite  $u$ , il pourra être commode d'éviter la considération de l'ensemble  $\mathcal{D}$  tout entier, mais invoquer seulement des suites de partitions, comme on l'a déjà expliqué en 6.e : soit  $(\varepsilon_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , une suite de réels  $> 0$  tendant vers zéro ; pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , soit  $\Pi_i$  partition localement finie de  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueur  $\leq \varepsilon_i$  ; soit  $P_i = \bar{r}^1(\Pi_i)$ . L'inégalité (8.13) montre que la suite des fonctions localement en escalier  $u_{P_i}$  converge vers  $u$ .

### 8.c. Premières propriétés des solutions faibles.

Etablissons trois propriétés attendues :

1° Pour tout  $t \in I$  :

$$u(t) \in C(t)$$

En effet, la construction de la fonction localement en escalier  $u_p$  fait que

$$u_p(t) \in C_p(t)$$

donc

$$d(u_p(t), C(t)) \leq e(C_p(t), C(t))$$

qui tend vers zéro pour  $P$  croissant dans  $\mathcal{P}$ . Il vient donc à la limite  $d(u(t), C(t)) = 0$ , d'où la conclusion puisque  $C(t)$  est fermé dans  $H$ .

2° Si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions faibles du problème de rafle par  $C$ , la fonction

$$t \mapsto |u(t) - u'(t)|$$

est décroissante.

En effet  $u$  et  $u'$  sont respectivement limites de  $u_p$  et  $u'_p$ , solutions faibles du problème de rafle par la multiapplication localement en escalier  $C_p$ . Il est banal (cf. paragraphe 8.a) que

$$s \leq t \Rightarrow |u_p(s) - u'_p(s)| \geq |u_p(t) - u'_p(t)|.$$

Il n'y a plus qu'à passer à la limite.

3° Si  $u$  est solution faible du problème de rafle par  $C$  :

$$(8.14) \quad \forall [s, t] \subset I : \text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(C; s, t).$$

Il suffit pour cela de montrer

$$\forall [s, t] \subset I : d(u(s), u(t)) \leq \text{ret}(C; s, t).$$

Or l'inégalité (8.8), qui concernait le cas de solutions du problème de rafle pour les multiapplications en escalier, donne

$$d(u_p(s), u_p(t)) \leq \text{ret}(C_p ; s, t) .$$

Il n'y a qu'à passer à la limite, en invoquant les remarques faites au paragraphe 6.e.

De (8.14) résulte :

Si la multiapplication C est à rétraction bornée, resp. à rétraction continue, resp. à rétraction (localement) absolument continue, resp. à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$ , toute solution faible u du problème de rafle par C est à variation bornée, resp. est continue, resp. est (localement) absolument continue, resp. est lipschitzienne de rapport  $\ell$ .

En particulier, si C est à rétraction (localement) absolument continue, sa fonction rétraction possède pour presque tout t, une dérivée  $\dot{r}(t)$  et la fonction u possède pour presque tout t une dérivée  $\dot{u}(t)$  ; alors pour presque tout t :

$$(8.16) \quad |\dot{u}(t)| \leq \dot{r}(t) .$$

L'objet du paragraphe 8.k sera de montrer que, dans ce cas, u est solution de l'équation différentielle (8.2).

#### 8.d. Limites à gauche.

Soit  $t_1 \in I$ , strictement supérieur à  $t_0$ . L'inégalité (8.14) montre que u est à variation bornée sur  $[t_0, t_1[$ , d'où, puisque H est complet, l'existence de

$$\lim_{t \uparrow t_1} u(t), \text{ noté } u^-(t_1) .$$

Evidemment, d'après la définition même de la limite inférieure

$$u^-(t_1) \in \liminf_{t \uparrow t_1} C(t) .$$

Si la multiapplication  $C$  est à rétraction continue à gauche au point  $t_1$  (cf. paragraphe 4.a. : on a vu que c'est le cas en particulier si cette multiapplication est semi-continue supérieurement à gauche au point  $t_1$ ), l'inégalité (8.14) prouve que, dans ce cas particulier,  $u$  est continue à gauche au point  $t_1$ .

PROPOSITION : De façon générale

$$(8.18) \quad u(t_1) = \text{proj}(u^-(t_1), C(t_1)) .$$

En effet, l'ensemble des partitions localement finies de  $I$  qui comportent un intervalle réduit à  $\{t_1\}$  constitue une partie cofinale  $\mathcal{P}_1$  de l'ordonné filtrant  $\mathcal{P}$ . Donc  $u$  est, si l'on veut, limite d'une suite généralisée  $(u_P)$ ,  $P \in \mathcal{P}_1$ . La définition de la multiapplication localement en escalier  $C_P$  fait que, si  $P \in \mathcal{P}_1$ ,

$$C_P(t_1) = C(t_1)$$

et la définition de  $u_P$  fait, dans ce cas, que

$$(8.19) \quad u_P(t_1) = \text{proj}(u_P^-(t_1), C(t_1)) .$$

Comme la convergence des  $u_P$  vers  $u$  est uniforme sur tout compact on peut écrire, par interversion de limites

$$u^-(t_1) = \lim_{P \in \mathcal{P}_1} u_P^-(t_1)$$

Alors (8.18) découle de (8.19) en vertu de la continuité de l'application  $x \mapsto \text{proj}(x, C(t_1))$ .

8.e. Limites à droite.

Soit  $t_1 \in I$ , distinct de l'extrémité de  $I$ . L'inégalité (8.14) montre que  $u$  est à variation bornée sur un intervalle  $]t_1, t_1+h]$ ; d'où, puisque  $H$  est complet, l'existence de

$$\lim_{t \downarrow t_1} u(t) \text{ noté } u^+(t_1).$$

Evidemment

$$u^+(t_1) \in C^+(t_1) .$$

Si la multiapplication  $C$  est à rétraction continue à droite au point  $t_1$  (cf. paragraphe 5.a. ; cela implique, on l'a vu, que cette multiapplication est semi-continue inférieurement à droite au point  $t_1$ ), l'inégalité (8.14) prouve que dans ce cas particulier,  $u$  est continue à droite au point  $t_1$ .

PROPOSITION. De façon générale

$$(8.20) \quad u^+(t_1) = \text{proj}(u(t_1), C^+(t_1)).$$

La méthode de démonstration est la même qu'au paragraphe précédent : on restreint  $P$  à l'ensemble  $\mathcal{P}_1$  des partitions localement finies comportant un intervalle réduit à  $\{t_1\}$  ; en ce cas :

$$u_P^+(t_1) = \text{proj}(u_P(t_1), C^+(t_1)) ,$$

en effet, quel que soit  $P \in \mathcal{P}_1$ , la valeur de  $C_P$  sur l'intervalle consécutif à  $t_1$  est toujours  $C^+(t_1)$ . Invoquant alors l'uniformité de la convergence des  $u_P$  pour intervertir les limites, on écrit

$$u^+(t_1) = \lim_{P \in \mathcal{P}_1} u_P^+(t_1) = \lim_{P \in \mathcal{P}_1} \text{proj}(u_P(t_1), C^+(t_1))$$

d'où (8.20) en vertu de la continuité de "proj".

REMARQUE. La Proposition 5.g fait que (8.20) entraîne

$$(8.21) \quad u^+(t_1) = \lim_{t \downarrow t_1} \text{proj}(u(t_1), C(t)) .$$

8.f. Restrictions et recollements.

Le fait pour  $u : I \rightarrow H$  d'être solution proprement dite de l'équation différentielle (8.2) est évidemment une propriété de caractère local. L'objet de ce paragraphe est de préciser en quel sens il en est de même pour le fait que  $u$  soit solution faible du problème de rafle par  $C$ .

PROPOSITION. Avec les notations des paragraphes précédents, soit  $u : I \rightarrow H$  une solution faible du problème de rafle par  $C$ . Soit  $I'$ , contenant son origine  $t'_0$ , un sous-intervalle de  $I$ . Alors la restriction de  $u$  à  $I'$  est solution du problème de rafle par la multiapplication  $C|_{I'}$ , restriction de  $C$  à  $I'$ .

En effet, la définition de  $u$  sur  $I$  comme limite des fonctions en escalier  $u_P$  peut être invoquée en restreignant  $P$  à l'ensemble  $\mathcal{P}'$  des partitions localement finies de  $I$  qui sont plus fines qu'une certaine partition comportant  $I'$ , puisque  $\mathcal{P}'$  est une partie cofinale de  $\mathcal{P}$ . Toute partition localement finie de  $I'$  est la trace sur  $I'$  d'une  $P \in \mathcal{P}'$ ; appelons  $u'_P$  la fonction localement en escalier sur  $I'$  correspondant à cette partition de  $I'$  et à la donnée initiale  $u'_P(t'_0) = u(t'_0)$ . Par définition la solution faible du problème de rafle pour  $C|_{I'}$  et cette donnée initiale est  $u'$  défini par

$$\forall t \in I' : u'(t) = \lim_{P \in \mathcal{P}'} u'_P(t)$$

tandis que

$$u(t) = \lim_{P \in \mathcal{D}} u_P(t) .$$

La construction des fonctions en escalier  $u_P$  et  $u'_P$  par projections successives sur les mêmes convexes pour l'une et l'autre fait que

$$\begin{aligned} \forall t \in I' : |u'_P(t) - u_P(t)| &\leq |u'_P(t'_0) - u_P(t'_0)| \\ &\leq |u(t'_0) - u_P(t'_0)| . \end{aligned}$$

D'après la définition de  $u$ , ce dernier membre tend vers zéro lorsque  $P$  croît dans  $\mathcal{D}'$ , d'où la Proposition.

COROLLAIRE. Soit une subdivision de  $I$  :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$$

(éventuellement finie, auquel cas  $i = 1, 2, \dots, m$ ) et soit

$u : I \rightarrow H$ , telle que  $u(t_0) = a$  et vérifiant pour tout  $i > 0$  les propriétés suivantes :

1° La restriction de  $u$  à l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i[$  (ainsi qu'à l'intervalle  $[t_m, \rightarrow)$  si la subdivision est finie) est solution faible du problème de rafle par la restriction de  $C$  à cet intervalle (ce qui implique l'existence de la limite à gauche  $u^-(t_i)$ ) ;

2° 
$$u(t_i) = \text{proj}(u^-(t_i), C(t_i)) .$$

En effet, le théorème d'unicité appliqué à chaque intervalle montre par récurrence qu'il existe au plus une fonction  $u$  possédant ces propriétés. Justement la solution  $u$  du problème de rafle par  $C$  sur  $I$  les possède, en vertu des Propositions 8.d et 8.f.



REMARQUE . Le corollaire précédent montre, a fortiori, que s'il existe un recouvrement de  $I$  par des intervalles deux à deux empiétants, tels que la restriction de  $u$  à chacun d'eux soit solution du problème de rafle par  $C$ , alors  $u$  est solution du problème sur  $I$ . L'usage de tels recouvrements conduit tout naturellement à introduire la notion de solution du problème de rafle sur un  $I$  ne contenant pas nécessairement son origine. A partir de là, on atteint une propriété de recollement d'intervalles quelconques (ne contenant pas nécessairement leurs origines) avec des conditions de raccordement ayant, selon les cas, les formes (8.18) et (8.19).

8.g. Changement de variable.

L'objet de ce paragraphe est d'établir le fait suivant, intuitif lorsqu'on songe à l'image mécanique du processus de rafle indiquée en 1.a : la chaîne des valeurs prises par  $u$  ne dépend que de la chaîne des valeurs prises par  $C$ , indépendamment de tout changement monotone de l'indexation par une variable "temps".

PROPOSITION. Soit  $\pi$  une application surjective croissante (donc continue), peut être non strictement, d'un intervalle  $I'$  (contenant son origine  $t'_0$ ) sur un intervalle  $I$  (contenant son origine  $t_0$ ).  
Soit  $C$  une multiapplication de  $I$  dans  $H$  vérifiant les hypothèses des paragraphes précédents et soit  $C'$  la multiapplication  $C \circ \pi$  de  $I'$  dans  $H$  :

$$\forall t' \in I' : C'(t') = C(\pi(t')) .$$

Alors  $u' : I' \rightarrow H$  est solution (faible) du problème de rafle par  $C'$  si et seulement si on a une factorisation  $u' = u \circ \pi$  où  $u$  est une

solution (faible) du problème de rafle par C .

En effet,  $u : I \rightarrow H$ , solution faible du problème de rafle par C pour la donnée initiale  $u(t_0) = a$  est, par définition, la limite, pour  $P \in \mathcal{P}$  (ensemble des partitions localement finies de I) des solutions  $u_P$  associées aux multiapplications localement en escalier  $C_P$ . Chaque intervalle  $I_i \in P$  a pour image réciproque par  $\pi$  un sous-intervalle  $I'_i$  de  $I'$ , non vide puisque  $\pi$  est surjective ; les  $I'_i$  constituent une partition de  $I'$ , notée  $P' = \pi^{-1}(P)$ , localement finie. Comme  $\pi$  est continue croissante, l'intervalle  $I'_i$  a la même forme que  $I_i$ : ouvert, fermé, semi-ouvert à droite ou à gauche ; il en résulte que si on pose  $C' = C \circ \pi$ , la multiapplication localement en escalier  $C'_{P'}$  associée à  $C'$  et à la partition  $P'$ , selon la notation 6.b, n'est autre que  $C_P \circ \pi$  ; la fonction localement en escalier  $u'_{P'} : I' \rightarrow H$ , solution du problème de rafle pour  $C'_{P'}$  et la donnée initiale  $u'_{P'}(t'_0) = a$ , est identique à  $u_P \circ \pi$ , puisque cette solution se définit par la récurrence

$$u'_{P'}(I'_{i+1}) = \text{proj}(u'_{P'}(I'), C'(I'_{i+1})).$$

Enfin, la définition de la composée  $u \circ \pi$ , fait que cette dernière fonction est la limite des  $u_P \circ \pi = u'_{P'}$ . Que cette dernière limite soit solution du problème de rafle par  $C'$  bien que  $P' = \pi^{-1}(P)$ ,  $P \in \mathcal{P}$ , ne parcourt pas nécessairement la totalité de l'ensemble des partitions localement finies de  $I'$  (en effet  $\pi$  n'étant peut-être pas strictement croissante, ne sera pas nécessairement bijective : cette fonction numérique peut présenter des "paliers") résulte de ce que si

$$t \mapsto r(t) = \text{ret}(C ; t_0, t)$$

est la fonction rétraction de C, celle de  $C' = C \circ \pi$  est  $r' = r \circ \pi$

invoquer les images réciproques de partitions de  $\mathbb{R}$ , comme en 8.b, remarque 2.

Qu'inversement toute solution  $u'$  du problème de rafle par  $C'$  se factorise sous la forme  $u \circ \pi$  résulte de l'unicité, pour une donnée initiale, de cette solution, et de l'existence d'une solution pour le problème relatif à  $C$ .

APPLICATION : Réduction du cas absolument continu au cas lipschitzien.

Supposons que la fonction rétraction  $r$  de la multiapplication  $C$  soit localement absolument continue sur  $I$ . La Proposition 3.d montre qu'il existe une application  $c$ , de  $I$  sur un intervalle  $J$  (d'origine  $0$ , si on veut) localement absolument continue, strictement croissante, et une multiapplication  $L$  de  $J$  dans  $H$ , à rétraction lipschitzienne, telles que  $C = Loc$ . Si  $v : J \rightarrow H$  est la solution du problème de rafle par  $L$  pour la donnée initiale  $v(0) = a$ , alors  $u = v \circ c$  est la solution du problème de rafle par  $C$  pour la donnée initiale  $u(t_0) = a$ . On va établir au paragraphe 8.i que  $v$  est en fait solution forte, c'est-à-dire possède pour presque tout  $s \in J$  une dérivée vérifiant

$$-\frac{dv}{ds} \in \partial \chi(s, v)$$

( $\chi(s, \cdot)$  fonction indicatrice de  $D(s)$ ).

La théorie du changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue permet d'en conclure que  $u : I \rightarrow H$  est solution forte du problème de rafle par  $C$  (cf. MOREAU [3]).

8.h. Comparaison de solutions associées à deux multiapplications.

PROPOSITION. Soient C et C' deux multiapplications de I dans H (à rétraction finie, à valeurs convexes fermées non vides) et soient respectivement u et u' des solutions faibles du problème de rafle par C et C'. Alors, si  $\mu(t)$  est un majorant de la distance de Hausdorff  $h(C(\theta), C'(\theta))$  pour  $\theta \in [t_0, t]$ , on a

$$(8.22) \quad |u(t) - u'(t)|^2 - |u(t_0) - u'(t_0)|^2 \leq 2\mu(t)(\text{ret}(C; t_0, t) + \text{ret}(C'; t_0, t)).$$

LEMME. Soient  $C_+$  et  $C'_+$  deux parties convexes fermées non vides de H ; soient  $u_-$  et  $u'_-$  deux points de H et soit

$$(8.23) \quad u_+ = \text{proj}(u_-, C_+)$$

$$(8.24) \quad u'_+ = \text{proj}(u'_-, C'_+)$$

Alors

$$(8.25) \quad |u_+ - u'_+|^2 - |u_- - u'_-|^2 \leq 2|u_- - u'_-| \cdot e(C'_+, C_+) + 2|u'_+ - u'_-| \cdot e(C_+, C'_+).$$

En effet, si on note  $\gamma_+$  la fonction d'appui de  $C_+$ , (8.23) implique  $u_+ \in \partial\gamma_+(u_- - u_+)$ , c'est-à-dire :

$$\forall y \in H : (u_+ | y - u_- + u_+) + \gamma_+(u_- - u_+) \leq \gamma_+(y).$$

De même, si on note  $\gamma'_+$  la fonction d'appui de  $C'_+$  :

$$\forall y \in H : (u'_+ | y - u'_- + u'_+) + \gamma'_+(u'_- - u'_+) \leq \gamma'_+(y).$$

En faisant  $y = u'_- - u'_+$  dans la première inégalité,  $y = u_- - u_+$  dans la seconde et en ajoutant (noter que les valeurs prises alors par  $\gamma_+$  et  $\gamma'_+$  sont finies) il vient, si l'on invoque (2.15),

$$\begin{aligned} (u_+ - u'_+ | u_+ - u'_+ - u_- + u'_-) &\leq \gamma_+(u'_- - u'_+) - \gamma'_+(u'_- - u'_+) \\ &\quad + \gamma'_+(u_- - u_+) - \gamma_+(u_- - u_+) \\ &\leq |u'_+ - u'_-| \cdot e(C_+, C'_+) + |u_+ - u_-| \cdot e(C'_+, C_+). \end{aligned}$$

Par ailleurs, le premier membre de (8.25) s'écrit

$$(u_+ - u'_+ + u_- - u'_- | u_+ - u'_+ - u_- + u'_-).$$

En lui ajoutant la quantité  $\geq 0$  :

$$(u_+ - u'_+ - u_- + u'_- | u_+ - u'_+ - u_- + u'_-)$$

on obtient

$$2(u_+ - u'_+ | u_+ - u'_+ - u_- + u'_-),$$

d'où l'inégalité annoncée.

Pour démontrer la proposition, on remarque alors que  $u$  et  $u'$  sont respectivement limites de fonctions localement en escalier  $u_p$  et  $u'_p$ , et, quitte à remplacer les deux partitions par un raffinement commun, on peut supposer  $P = P'$ . Soient  $I_i, I_{i+1}$  deux intervalles consécutifs de cette partition ; par construction

$$u_p(I_{i+1}) = \text{proj}(u_p(I_i), C_p(I_{i+1}))$$

$$u'_p(I_{i+1}) = \text{proj}(u'_p(I_i), C'_p(I_{i+1})),$$

ce qui permet d'invoquer l'inégalité (8.25). Soit  $m$  la valeur de  $i$  telle que  $t \in I_i$  ; si on ajoute membre à membre les inégalités obtenues pour  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , il reste

$$\begin{aligned} |u_p(t) - u'_p(t)|^2 - |u_p(t_0) - u'_p(t_0)|^2 \\ \leq 2\mu(t)(\text{var}(u_p ; t_0, t) + \text{var}(u'_p ; t_0, t)). \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à passer à la limite, en remarquant

$$\text{var}(u_p ; t_0, t) \leq \text{ret}(C_p ; t_0, t) \leq \text{ret}(C ; t_0, t)$$

et inégalités analogues pour  $u'_p, C'_p, C'$ .

8.i. Existence de solutions fortes.

PROPOSITION. Avec les notations et hypothèses du paragraphe 8.a, si on suppose de plus que la multiapplication  $C$  est à rétraction localement absolument continue, toute solution faible  $u$ , du problème de rafle est en fait forte, c'est-à-dire qu'elle est localement absolument continue et satisfait (8.2), pour presque tout  $t \in I$ .

Démonstration. En vertu du paragraphe 8.g, il suffit de raisonner dans le cas particulier où  $C$  est à rétraction lipschitzienne de rapport  $\ell$ .

La solution faible  $u$  correspondant à la donnée initiale  $u(t_0) = a$  peut être construite comme limite d'une suite (proprement dite, c'est-à-dire indexée dans  $\mathbb{N}$ ) de fonctions en escalier, uniformément convergente sur tout sous-intervalle compact  $[t_0, T] \subset I$ .

Vu la continuité de la fonction rétraction on peut d'ailleurs supposer dans le cas présent que les intervalles de constance de ces fonctions en escalier ont la forme  $[\tau_i, \tau_{i+1}[$  et à chacune d'elles on peut associer sa "régularisée polygonale", prenant les mêmes valeurs qu'elle en chaque noeud et affine entre deux noeuds. Notons  $u_n$  cette suite de fonctions polygonales. Chaque fonction  $u_n$  est presque partout fortement dérivable : en tout point  $t \in ]\tau_{i-1}, \tau_i[$  sa dérivée a la valeur

$$(8.26) \quad \dot{u}_n(t) = \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} (u_n(\tau_i) - u_n(\tau_{i-1}))$$

et comme

$$(8.27) \quad u_n(\tau_i) = \text{proj}(u_n(\tau_{i-1}), C(\tau_i)) \quad ,$$

cela donne

$$(8.28) \quad |\dot{u}_n(t)| = \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} d(u_n(\tau_{i-1}), C(\tau_i)) \leq \frac{e(C(\tau_{i-1}), C(\tau_i))}{\tau_i - \tau_{i-1}} \\ \leq \frac{r(\tau_i) - r(\tau_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}} \leq \ell .$$

Donc  $\dot{u}_n$  définit un élément de norme  $\leq \ell$  dans l'espace  $L_H^\infty[t_0, T]$  (noté simplement  $L_H^\infty$ ). Comme  $L_H^\infty$  est le dual de  $L_H^1$ , la boule fermée de rayon  $\ell$  de  $L_H^\infty$  est compacte pour la topologie  $\sigma(L_H^\infty, L_H^1)$ . Par ailleurs l'injection canonique de  $L_H^\infty$  dans  $L_H^1$  est continue pour les topologies respectives  $\sigma(L_H^\infty, L_H^1)$  et  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$ : cette injection fait donc de la boule précédente une partie faiblement compacte de l'espace de Banach  $L_H^1$ , donc faiblement séquentiellement compacte. On peut alors extraire une sous-suite, notée  $\dot{u}_\nu$  ( $\nu$  décrivant une partie infinie  $\mathbb{N}'$  de  $\mathbb{N}$ ) qui converge vers un élément  $\dot{v} \in L_H^1$  pour la topologie  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$ . Posons

$$v(t) = a + \int_{t_0}^t \dot{v}(s) ds .$$

La fonction  $v$  est absolument continue sur  $[t_0, T]$ , de dérivée  $\dot{v}$ . La convergence faible de  $\dot{u}_\nu$  vers  $\dot{v}$  fait que, pour tout  $y \in H$ , on a (on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forme bilinéaire de dualité entre  $L_H^1$  et  $L_H^\infty$ )

$$\lim_{\nu \in \mathbb{N}'} \langle \dot{u}_\nu, \chi_{[t_0, t]} \cdot y \rangle = \langle \dot{v}, \chi_{[t_0, t]} \cdot y \rangle$$

c'est-à-dire (on note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire dans  $H$ ):

$$\lim_{\nu \in \mathbb{N}'} \int_{t_0}^t (\dot{u}_\nu(s) | y) ds = \int_{t_0}^t (\dot{v}(s) | y) ds$$

ou, puisque  $u_\nu(t_0) = a$ ,

$$\lim_{\nu \in \mathbb{N}'} (u_\nu(t) | y) = (v(t) | y).$$

Cela signifie que, pour chaque  $t \in [t_0, T]$ , l'élément  $v(t) \in H$  est limite des  $u_\nu(t)$  dans  $H$  faible ; il coïncide donc avec  $u(t)$  qui en est limite dans  $H$  fort. De la sorte la fonction  $u$  est absolument continue sur  $[t_0, T]$ , de dérivée  $\dot{u} = \dot{v}$ . Pour établir que pour presque tout  $t$ , on a

$$-\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t))$$

( $\dot{u}$  est entendu ici comme fonction proprement dite, c'est-à-dire élément de l'espace  $\mathcal{L}_H^\infty$ ) il suffit de montrer que, pour ces  $t$ , la fonction d'appui  $\gamma(t, \cdot)$  de  $C(t)$  vérifie

$$(8.29) \quad \gamma(t, -\dot{u}(t) + (u(t) | \dot{u}(t))) \leq 0$$

(en effet  $\psi(t, u(t)) = 0$  car  $u(t) \in C(t)$ ).

Plutôt que d'avoir à exclure du raisonnement les  $t$  qui sont noeuds de fonctions  $u_\nu$  (à vrai dire leur ensemble est dénombrable, donc de mesure nulle...) convenons que chaque dérivée  $\dot{u}_\nu$  est partout définie en l'interprétant comme dérivée à droite pour la fonction polygonale  $u_\nu$  ; de la sorte (8.26) est valable pour  $t \in [t_{i-1}, t_i[$ . Donc si, partant d'un quelconque  $t \in [t_0, T[$ , on note  $t_\nu$  le premier noeud de  $u_\nu$  strictement à droite de  $t$ , (8.27) fournit

$$(8.30) \quad \gamma(t_\nu, -\dot{u}_\nu(t)) + (u_\nu(t_\nu) | \dot{u}_\nu(t)) = 0 .$$

Or  $t_\nu$  tend vers  $t$  si  $\nu$  tend vers l'infini dans  $\mathbb{N}'$  ; la majoration (8.28) fait que les fonctions  $u_\nu$  sont équicontinues ; on en conclut que  $u_\nu(t_\nu)$  tend vers  $u(t)$  dans  $H$  fort et par suite

$$(8.31) \quad \lim_{\nu \in \mathbb{N}'} [(u_\nu(t_\nu) | \dot{u}_\nu(t)) - (u(t) | \dot{u}_\nu(t))] = 0 .$$

En invoquant par ailleurs la Proposition 3.f, on a



$$\begin{aligned} \gamma(t, -\dot{u}_\nu(t)) - \gamma(t_\nu, -\dot{u}_\nu(t)) &\leq |\dot{u}_\nu(t)| \cdot (r(t_\nu) - r(t)) \\ &\leq \ell^2(t_\nu - t) \end{aligned}$$

Rapproché de (8.30) et (8.31), cela donne

$$(8.32) \quad \limsup_{\nu \in \mathbb{N}'} [\gamma(t, -\dot{u}_\nu(t)) + (u(t)|\dot{u}_\nu(t))] \leq 0$$

Puisque les  $\dot{u}_\nu$  convergent vers  $\dot{u}$  pour la topologie  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$ , il est connu qu'on peut construire une suite  $(w_k)$  d'éléments de  $L_H^1$  possédant les propriétés suivantes :

- chaque  $w_k$  est barycentre d'une famille finie de termes de la suite  $(\dot{u}_\nu)$ , de rang supérieur ou égal à  $k$ .
- la suite  $(w_k)$  converge vers  $\dot{u}$  pour la topologie forte de  $L_H^1$ , de sorte qu'elle possède une sous-suite  $(w_\kappa)$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ , telle que, pour presque tout  $t$ ,  $w_\kappa(t)$  converge vers  $\dot{u}(t)$  selon la topologie forte de  $H$ .

La convexité de la fonction

$$y \mapsto \gamma(t, -y) + (u(t)|y)$$

fait alors que, pour les valeurs de  $t$  en question, (8.32) implique

$$\limsup_{\kappa \in \mathbb{N}''} [\gamma(t, -w_\kappa(t)) + (u(t)|w_\kappa(t))] \leq 0$$

En outre, comme cette fonction est s.c.i., on a

$$\gamma(t, -\dot{u}(t)) + (u(t)|\dot{u}(t)) \leq \liminf_{\kappa \in \mathbb{N}''} [\gamma(t, -w_\kappa(t)) + (u(t)|w_\kappa(t))]$$

ce qui établit (8.29).

REFERENCES

- C. BERGE [1] Espaces topologiques, fonctions multivoque, Dunod, 1959.
- H. BREZIS [1] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Cours Université de Paris VI, 1971 (multigraphié).
- N. KIKUCHI, Y. TOMITA [1] On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields, à paraître dans Funkcialaj Ekvaciaj.
- J.J. MOREAU [1] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux Dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1967 (multigraphié 108 p.).
- [2] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, C.R. Acad. Sci., Ser. A, 273 (1971), p. 118-121.
- [3] Raflé par un convexe variable, Première partie, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971, exposé n° 15 (multigraphié 43 p.).
- [4] Même titre, Deuxième partie, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, exposé n° 3: (multigraphié 36 p.).
- J.C. PERALBA [1] Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du temps, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1972, exposé n° 6 (multigraphié 16 p.).
- [2] Même titre, C. R. Acad. Sci., Ser. A,
- R.T. ROCKAFELLAR [1] Convex analysis, Princeton University Press, 1970.

P.J. LAURENT [1] Approximation et optimisation,  
Hermann 1972, Chap. VI.

U. MOSCO [1] Convergence of <sup>(convex set and of)</sup> solutions of variational inequalities, Adv. in Math. 3, 4 (1969), 510-585