



**HAL**  
open science

## Rafle par un convexe variable (Deuxième partie)

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Rafle par un convexe variable (Deuxième partie). 1972. hal-02309457

**HAL Id: hal-02309457**

**<https://hal.science/hal-02309457>**

Submitted on 9 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## RAFLE PAR UN CONVEXE VARIABLE

(Deuxième Partie)

par

J.J. MOREAU1. INTRODUCTION

Cette deuxième partie continue l'étude de l'équation différentielle à second membre multivoque

$$(1.1) \quad - \frac{du}{dt} \in \partial \psi(t, u),$$

$x \mapsto \psi(t, x)$  désignant la fonction indicatrice d'un convexe fermé  $C$  dépendant de  $t$ , dans un espace hilbertien  $H$ .

Du point de vue technique, un trait caractéristique des pages qui suivent est que la régularisation Yosida - ou pénalisation - qui était, l'instrument constant de la première partie, n'apparaît plus.

La première question étudiée est celle de la "stabilité" (on pourrait dire aussi bien "continuité") des solutions du problème, à l'égard de perturbations du convexe variable  $C$ . La réponse à cette question est fournie au § 2.a par une majoration de la distance  $|u(t) - u'(t)|$  entre les valeurs à l'instant  $t$  de solutions  $u$  et  $u'$  correspondant respectivement à des convexes  $C$  et  $C'$  : cette majoration invoque la distance des deux solutions à un instant antérieur  $s$  (par exemple l'instant "initial" 0), les variations de  $C$  et  $C'$  sur l'inter-

valle  $[s, t]$  (au sens de la distance de Hausdorff, cf Première Partie § 2.b) et un majorant de la distance de Hausdorff de  $C$  et  $C'$  sur cet intervalle.

Cette majoration avec son extension ultérieure à un cadre plus général, constitue la base de tout le mémoire. On l'applique par exemple à une certaine sorte de régularisation ou lissage du convexe variable  $C$  : on note  $\beta$  la boule fermée de centre  $O$ , de rayon  $\rho$  éventuellement variable avec  $t$  ; le convexe  $C' = C + \beta$  est plus régulier que  $C$  en ce sens que son intérieur est non vide et qu'en chaque point frontière il possède une normale unique. L'usage du convexe  $C + \beta$ , avec une loi convenable de variation de  $\rho$  en fonction du temps, fournit, au § 2.d, une nouvelle voie pour étudier la convergence de l'algorithme de rattrapage (cf. Première Partie, Section 4).

Les projections successives sur une suite de convexes, en lesquelles consiste justement l'algorithme de rattrapage, forment, dans la section 3 du présent rapport la base d'une étude du processus de râteau sous des hypothèses élargies : on supposera désormais que la multiapplication  $t \rightarrow C(t)$  est à variation bornée, mais non nécessairement continue. L'idée est de commencer par définir le processus pour une multiapplication en escalier, c'est à dire constante par intervalles ; une solution du problème de râteau par un tel convexe sera tout naturellement définie comme constante sur les mêmes intervalles ; reste à définir sa loi de saut pour chaque instant de discontinuité, elle se formulera par une projection, comme dans l'algorithme de rattrapage. Le pas décisif est franchi en montrant que les solutions associées selon cette convention à deux convexes  $C$  et  $C'$  à variation en escalier

vérifient encore les inégalités de "stabilité", établies précédemment pour le cas continu. Etant donné alors un convexe  $C$ , à variation bornée quelconque sur  $[0, T]$ , on l'approche (au sens de la distance de Hausdorff) par des convexes à variation en escalier ; on constate que les fonctions en escalier qui leur sont associées comme solutions du problème de râfle, pour une donnée initiale  $a$ , convergent uniformément vers une fonction  $u : [0, T] \rightarrow H$  ; nous disons que  $u$  est la solution du problème de râfle par  $C$  pour la donnée initiale  $a$ . Il reste, bien sûr, à vérifier que cette généralisation du processus de râfle est bien cohérente avec la définition donnée antérieurement pour le cas continu ; cela découle si, l'on veut, de la Première Partie. Il a paru instructif d'en donner au § 3.c une démonstration directe, le présent mémoire contient ainsi toute la matière d'une étude autonome du problème de râfle.

La section 4 étudie quelques propriétés des solutions, dans le cadre général qu'on vient de décrire : stabilité, étude des discontinuités, changement de variable, recollement d'intervalles, ...

La 5ème et dernière section aborde le comportement asymptotique des solutions. Il est banal d'abord que, si la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  est à variation bornée sur  $[0, +\infty[$ ,  $C$  possède, au sens de la distance de Hausdorff, une limite  $C_\infty$  pour  $t$  tendant vers  $+\infty$  ; alors toutes les solutions du problème de râfle par  $C$  possèdent des limites (fortes) qui sont des points de  $C_\infty$ . Un cas plus important pour les applications (adaptation des contraintes, en théorie des systèmes élastoplastiques) est le suivant : s'il existe un instant  $T_1$  et une boule de rayon non nul qui est contenue dans  $C(t)$  pour tout

$t \geq T_1$  , on montre au § 5.b que toutes les solutions du problème de réflexion par  $C$  sont à variation bornées sur  $[0, +\infty[$ , donc possèdent des limites (fortes) pour  $t$  tendant vers  $+\infty$  . Un dernier paragraphe examine le cas particulier où l'espace hilbertien  $H$  est de dimension finie , l'hypothèse peut, dans ce cas, être légèrement affaiblie et l'existence des limites se démontre plus rapidement.

## 2. PERTURBATION DU CONVEXE

### 2.a. Formulation du problème

Dans les applications pratiques, les données d'un problème de raffle, c'est-à-dire la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  et la valeur initiale  $a \in H$ , ne seront jamais connues qu'avec une incertitude. Pour cette première raison l'étude de la stabilité du problème à l'égard de perturbations de ces deux données s'impose. Les conséquences d'une perturbation de  $a$  seul sont déjà bien connues (cf. première partie, paragraphe 3.b). Comme mesure d'une perturbation de  $C$  il est naturel d'employer, là encore, la distance de Hausdorff.

Soient  $t \mapsto C(t)$  et  $t \mapsto C'(t)$  deux multiapplications de  $[0, T]$  dans  $H$ , à valeurs convexes fermées non vides, suffisamment régulières pour qu'existent les solutions respectives  $t \mapsto u(t)$  et  $t \mapsto u'(t)$  du problème de raffle pour ces deux convexes, correspondant à des données initiales  $u(0) = a$ ,  $u'(0) = a'$ .

PROPOSITION. On suppose que les multiapplications  $C$  et  $C'$  sont à variation bornée continue sur  $[0, T]$ ; soient  $u$  et  $u'$  des solutions généralisées (cf. Première partie, § 3.e) des problèmes de raffle correspondants. Alors si  $0 \leq s \leq t \leq T$  et si  $m$  est un majorant, pour tout  $\sigma \in [s, t]$ , de la distance de Hausdorff  $\delta(C(\sigma), C'(\sigma))$ , on a

$$(2.1) \quad |u(t) - u'(t)|^2 - |u(s) - u'(s)|^2 \leq 2m (\text{var}(C; s, t) + \text{var}(C'; s, t)).$$

Etablissons d'abord cette inégalité dans l'hypothèse que les multiapplications  $C$  et  $C'$  sont absolument continues.

Soient  $\gamma(t, \cdot)$  et  $\gamma'(t, \cdot)$  les fonctions d'appui respectives de  $C(t)$  et  $C'(t)$ . Les équations des processus de râfle par ces deux convexes peuvent s'écrire pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} u &\in \partial\gamma(t, -\hat{u}) \\ u' &\in \partial\gamma'(t, -\hat{u}'), \end{aligned}$$

c'est à dire que, pour ces  $t$  et pour tout  $y \in H$ ,

$$\begin{aligned} (u \mid y + \hat{u}) + \gamma(t, -\hat{u}) &\leq \gamma(t, y) \\ (u' \mid y + \hat{u}') + \gamma'(t, -\hat{u}') &\leq \gamma(t, y). \end{aligned}$$

En faisant  $y = -\hat{u}'$  dans la première inégalité,  $y = -\hat{u}$  dans la seconde et en ajoutant, il vient

$$(2.2) \quad (u - u' \mid \hat{u} - \hat{u}') \leq \gamma(t, -\hat{u}') - \gamma'(t, -\hat{u}') + \gamma'(t, -\hat{u}) - \gamma(t, -\hat{u})$$

(noter que les hypothèses faites impliquent que  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont même domaine, indépendant de  $t$ ; les valeurs écrites au second membre sont donc toutes finies).

Or

$$\begin{aligned} |\gamma(t, -\hat{u}') - \gamma'(t, -\hat{u}')| &\leq |\hat{u}'| \delta(C(t), C'(t)) \\ |\gamma(t, -\hat{u}) - \gamma'(t, -\hat{u})| &\leq |\hat{u}| \delta(C(t), C'(t)). \end{aligned}$$

Le premier membre de (2.2) est la dérivée de la fonction absolument continue  $t \mapsto \frac{1}{2} |u - u'|^2$ . Vu l'inégalité (3.14) de la première partie, en notant respectivement  $\dot{v}$  et  $\dot{v}'$  les vitesses numériques des convexes  $C$  et  $C'$  on a, pour presque tout  $t$ ,  $|\hat{u}| \leq \dot{v}$ ,  $|\hat{u}'| \leq \dot{v}'$ ; donc, si  $e(t)$  est la distance de ces deux convexes, (2.2) entraîne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u - u'|^2 \leq (\dot{v} + \dot{v}') e \quad .$$

Comme  $\dot{v}$  et  $\dot{v}'$  appartiennent à  $\mathcal{L}^1[0, T]$  et que  $e$  est une fonction continue, on peut intégrer sur l'intervalle  $[s, t]$ ; cela donne

$$|u(t) - u'(t)|^2 - |u(s) - u'(s)|^2 \leq \int_s^t [\dot{v}(\sigma) + \dot{v}'(\sigma)] e(\sigma) d\sigma \quad .$$

On en tire (2.1) puisque

$$\int_s^t \dot{v}(\sigma) d\sigma = \text{var}(C; s, t)$$

est analogue pour  $C'$ .

Passons maintenant au cas général de deux multiapplications  $C$  et  $C'$  à variation bornée continue : on sera ramené au cas précédent si on peut trouver une application continue croissante  $t \mapsto w(t) = \theta$  de  $[0, T]$  sur un intervalle  $[0, \Theta]$  telle que  $C = \Gamma \circ w$ ,  $C' = \Gamma' \circ w$  avec des multiapplications  $\theta \mapsto \Gamma(\theta)$  et  $\theta \mapsto \Gamma'(\theta)$  absolument continues. De fait, on prendra pour  $w(t)$  la variation conjointe de  $C$  et  $C'$  sur l'intervalle  $[0, t]$  :

$$w(t) = \int_0^t [\dot{v}(\sigma) + \dot{v}'(\sigma)] d\sigma \quad .$$

C'est, si l'on veut, la variation de l'application  $t \mapsto (C(t), C'(t))$  de  $[0, T]$  dans l'ensemble des couples de convexes fermés, lorsqu'on prend comme distance de deux couples  $(C_1, C'_1)$  et  $(C_2, C'_2)$  la somme :

$$\delta(C_1, C_2) + \delta(C'_1, C'_2) \quad .$$

Comme on l'a vu dans la première partie (Appendice) on a la factorisation

$$(C(t), C'(t)) = (\Gamma(w(t)), \Gamma'(w(t)))$$

avec  $\theta \mapsto (\Gamma(\theta), \Gamma'(\theta))$  absolument continue au sens de la distance en question.



2.c. Lissage

Appliquons la majoration précédente à l'étude d'une technique d'approximation du convexe  $C$  par un convexe lisse. Notons  $\beta$  la boule fermée de centre  $O$ , de rayon  $\rho \geq 0$  (éventuellement variable avec  $t$ ) et considérons le convexe (fermé parce que  $\beta$  est faiblement compacte) .

$$C_\rho(t) = C(t) + \beta .$$

Si  $\rho > 0$ , le convexe présente l'intérêt d'avoir un intérieur fort non vide et d'admettre en chaque point frontière une normale unique. La fonction d'appui de  $C_\rho(t)$  est

$$\gamma_\rho(t, \cdot) = \gamma(t, \cdot) + \rho |\cdot| .$$

Rappelons que la distance de Hausdorff de deux convexes fermés est le sup, sur la sphère unité, de la valeur absolue de la différence de leurs fonctions d'appui ; alors .

$$\delta(C, C_\rho) = \rho .$$

En outre, pour tout intervalle  $[s, t]$  sur lequel  $\rho$  est constant, on a

$$\text{var}(C ; s, t) = \text{var}(C_\rho ; s, t) .$$

Plus généralement, si  $\rho$  est variable, on a, pour tout intervalle  $[\sigma, \tau]$ ,

$$\delta(C_\rho(\sigma), C_\rho(\tau)) \leq \delta(C(\sigma), C(\tau)) + |\rho(\sigma) - \rho(\tau)| .$$

d'où

$$(2.3) \quad \text{var}(C_\rho ; s, t) \leq \text{var}(C ; s, t) + \text{var}(\rho ; s, t)$$

EXEMPLE : Supposons  $\rho$  constant ; soient respectivement  $u$  et  $u_\rho$  des solutions du problème de râfle pour  $C$  et  $C_\rho$  . L'inégalité (2.1) donne

$$|u_\rho(t) - u(t)|^2 - |u_\rho(s) - u(s)|^2 \leq 4\rho \text{ var}(C ; s, t)$$

En particulier si ces deux solutions correspondent à la même donnée initiale  $u(0) = u_\rho(0)$ , on a pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$|u_\rho(t) - u(t)|^2 \leq 4\rho v(t) \leq 4\rho \text{ var}(C ; 0, T).$$

#### 2.d. Application à l'algorithme de rattrapage

En faisant varier  $\rho$  convenablement on peut obtenir une nouvelle preuve de la convergence de l'algorithme de rattrapage, assez analogue à celle de la première partie (paragraphe 4.d). Avec les mêmes notations qu'alors, on prend dans chaque intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$  deux valeurs  $\sigma_i, \tau_i$  :

$$t_i < \sigma_i < \tau_i < t_{i+1}$$

et on construit une multiapplication  $t \mapsto C'(t)$  de la façon suivante :

- Sur l'intervalle  $]t_i, \sigma_i[$ ,  $C'(t)$  s'obtient en "gonflant" progressivement  $C(t_i)$ , c'est à dire

$$t \in [t_i, \sigma_i] \Rightarrow C'(t) = C(t_i) + \beta(t)$$

où  $\beta$  désigne la boule de centre 0, de rayon

$$\rho(t) = \frac{t - t_i}{\sigma_i - t_i} D_i,$$

avec

$$D_i = \sup \{ \delta(C(t_i), C(t)) : t \in [t_i, t_{i+1}] \} \\ \leq \text{var}(C ; t_i, t_{i+1}).$$

- Notons  $\ell_i$  la transformation affine envoyant l'intervalle  $[\sigma_i, \tau_i]$  sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ ; pour  $t$  dans l'intervalle  $[\sigma_i, \tau_i]$  on définit  $C'(t)$  par

$$t \in [\sigma_i, \tau_i] \Rightarrow C'(t) = C(\ell(t)) + \beta(\sigma_i).$$

Donc, en particulier,  $C'(\tau_i) = C(t_{i+1}) + \beta(\sigma_i)$ .

- Sur l'intervalle  $[\tau_i, t_{i+1}]$ ,  $C'(t)$  s'obtient en "dégonflant"  $C'(\tau_i)$ , c'est-à-dire

$$t \in [\tau_i, t_{i+1}] \Rightarrow C'(t) = C(t_{i+1}) + \beta'(t),$$

où  $\beta'(t)$  désigne la boule de centre  $O$ , de rayon

$$\rho'(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - \tau_i} D_i.$$

Les solutions du problème de raffle par le convexe  $C'$  (à variation bornée continue - resp. absolument continue - si tel est le cas pour  $C$ ) sont évidentes, toute solution  $u'$  de ce problème se construit comme suit :

- Sur l'intervalle  $[t_i, \sigma_i]$ , le convexe  $C'$  étant croissant, la fonction  $u'$  conserve la valeur constante  $u'(t_i) \in C(t_i)$ .

- Sur l'intervalle  $[\sigma_i, \tau_i]$ , la fonction  $u'$  conserve encore cette valeur constante puisque, d'après le choix du rayon  $D_i$  de la boule  $\beta(\sigma_i)$ , le convexe  $C'(t)$  contient constamment  $C(t_i)$ .

- Sur l'intervalle  $[\tau_i, t_{i+1}]$ , le point  $u'(t)$  décrit le segment de droite projetant  $u'(t_i)$  sur  $C'(t_{i+1}) = C(t_{i+1})$  et

$$(2.4) \quad u'(t_{i+1}) = \text{proj}(u'(t_i), C(t_{i+1})) .$$

Donc, si on fait tendre les  $\sigma_i$  vers les  $t_i$  et les  $\tau_i$  vers les  $t_{i+1}$  la fonction  $u'$ , correspondant à une donnée initiale  $u'(0) = a$  fixée, converge simplement vers la fonction en escalier  $x$  fournie par l'algorithme de rattrapage (1).

---

(1) Il s'agit plus exactement ici d'une fonction en escalier continue à droite alors que, dans la Première Partie, section 4, on avait raisonné sur une fonction en escalier continue à gauche.

La variation de  $C'$  sur  $[t_i, t_{i+1}]$  est

$$\begin{aligned} & \text{var}(C' ; t_i, \sigma_i) + \text{var}(C' ; \sigma_i, \tau_i) + \text{var}(C' ; \tau_i, t_{i+1}) \\ & = D_i + \text{var}(C ; t_i, t_{i+1}) + D_i \leq 3 \text{var}(C ; t_i, t_{i+1}) ; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \text{var}(C' ; 0, T) & = \text{var}(C ; 0, T) + 2 \sum_i D_i \\ & \leq 3 \text{var}(C ; 0, T) . \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour  $t \in [\sigma_i, \tau_i]$ ,

$$\delta(C(t), C'(t)) \leq D_i + \delta(C(t), C(\ell(t))) ,$$

où le second membre tend vers  $D_i$  lorsque  $\sigma_i$  tend vers  $t_i$  et  $\tau_i$  vers  $t_{i+1}$ . Les  $D_i$  sont d'ailleurs majorés par

$$p = \sup_i \text{var}(C ; t_i, t_{i+1}) .$$

L'inégalité (2.1) fournit dès lors une majoration de l'erreur de l'algorithme de rattrapage : quel que soit  $t \in [0, T]$ , on a

$$|u(t) - x(t)| \leq \sqrt{8p \text{var}(C ; 0, T)} ,$$

ce qui est, en substance, le résultat de la Première Partie, § 4.d.

### 3. CONVEXE A VARIATION DISCONTINUE

#### 3.a. Définition du processus de râteau par un convexe à variation en escalier

On suppose qu'il existe une partition de  $[0, T]$  en un nombre fini d'intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts, certains d'entre eux éventuellement réduits à des points) sur chacun desquels la multi-application  $t \mapsto C(t)$  est constante.

Pour donner une signification au problème de râteau par un tel  $C(t)$  (convexe fermé, comme d'habitude) on posera, par définition, qu'une solution  $t \mapsto u(t)$  de ce problème est constante sur chacun des intervalles en question. C'est une fonction en escalier et il reste, pour la définir, à imposer une loi de saut concernant chaque discontinuité de  $C(t)$ . Distinguant respectivement par les indices  $-$  et  $+$  les valeurs à gauche et à droite de cette discontinuité, posons la loi de saut suivante

$$(3.1) \quad u_+ = \text{proj} (u_-, C_+) .$$

Visiblement, on définit ainsi une fonction  $u$  unique pour chaque donnée initiale

$$a = u(0) \in C(0) .$$

Cette définition conserve une des propriétés fondamentales établies dans le cas continu : la distance de deux solutions est une fonction décroissante de  $t$  ; plus généralement on va voir que l'inégalité (2.1) est conservée :

PROPOSITION. Soient  $t \mapsto C(t)$  et  $t \mapsto C'(t)$  deux convexes fermés à variation en escalier et soient  $u$  et  $u'$  des solutions des problèmes de râfle correspondants. Alors, avec les mêmes notations qu'au paragraphe 2.a, l'inégalité (2.1) a lieu.

En effet, si on note  $\psi_+$  la fonction indicatrice de  $C_+$  et si on pose

$$\Delta u = u_+ - u_-$$

(3.1) équivaut à

$$(3.2) \quad -\Delta u \in \partial\psi_+(u_+) ,$$

analogue naturel de l'équation du processus de râfle telle qu'on l'écrit dans le cas absolument continu.

Quitte à prendre en compte des sauts nuls on peut supposer que  $C$  et  $C'$  ont les mêmes instants de discontinuité. Pour toute fonction en escalier  $t \mapsto x(t) \in H$  admettant ces instants de discontinuité on estime comme suit le saut de la fonction numérique  $t \mapsto |x(t)|^2$  :

$$(3.3) \quad \Delta|x|^2 = |x_+|^2 - |x_-|^2 = (x_+ - x_- | x_+ + x_-) \leq 2 (\Delta x | x_+) .$$

On peut alors calquer la démonstration faite pour le cas absolument continu. En introduisant les fonctions d'appui  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $C$  et  $C'$ , on transcrit (3.2) sous la forme

$$(3.4) \quad u_+ \in \partial\gamma_+(-\Delta u)$$

$$(3.5) \quad u'_+ \in \partial\gamma'_+(-\Delta u') ,$$

c'est à dire, pour tout  $y \in H$ ,

$$(u_+ | y + \Delta u) + \gamma_+(-\Delta u) \leq \gamma_+(y)$$

$$(u'_+ | y + \Delta u') + \gamma'_+(-\Delta u') \leq \gamma'_+(y) .$$

En faisant  $y = -\Delta u'$  dans la première inégalité,  $y = -\Delta u$  dans la seconde et en ajoutant, on obtient

$$(u_+ - u'_+ | \Delta(u-u')) \leq \gamma_+(-\Delta u') - \gamma'_+(-\Delta u') + \gamma'_+(-\Delta u) - \gamma_+(-\Delta u)$$

(noter que (3.4) et (3.5) assurent que  $\gamma_+(-\Delta u)$  et  $\gamma'_+(-\Delta u')$  sont finis) ; ce second membre est majoré par

$$(|\Delta u| + |\Delta u'|) \delta(C_+, C'_+).$$

Par ailleurs

$$|\Delta u| = \text{dist}(u_-, C_+) \leq \delta(C_-, C_+)$$

$$|\Delta u'| = \text{dist}(u'_-, C'_+) \leq \delta(C'_-, C'_+)$$

Vu (3.3) il vient finalement

$$(3.6) \quad \Delta |u-u'|^2 \leq 2 \delta(C_+, C'_+) (\delta(C_-, C_+) + \delta(C'_-, C'_+)).$$

Comme au § 2.a, on appelle  $m$  un majorant de  $\delta(C(\sigma), C'(\sigma))$  pour tout  $\sigma \in [s, t]$  ; la somme des  $\delta(C_-, C_+)$  pour tous les points de discontinuités appartenant à l'intervalle  $[s, t]$  fournit la variation de  $C$  sur cet intervalle ; même chose pour  $C'$ . En ajoutant les diverses inégalités telles que (3.6) on obtient donc l'extension de (2.1) à la situation présente.

### 3.b. Râfle par un convexe à variation bornée non nécessairement continue

L'idée de ce paragraphe est d'approcher (uniformément au sens de la distance de Hausdorff) la multiapplication  $t \mapsto C(t)$ , à variation bornée non nécessairement continue, par des multiapplications à variation en escalier. De la proposition 3.a découlera que les fonctions en escalier obtenues comme solutions correspondantes du problème de râfle

- avec une certaine donnée initiale - convergent uniformément ; la limite  $u$  sera par définition la solution du problème de râfle par  $C$ .

Le lemme suivant vaudrait, d'une manière générale, pour une application à variation bornée de  $[0, T]$  dans n'importe quel espace métrique :

LEMME. Soit  $t \mapsto C(t)$ , à variation bornée (non nécessairement continue) sur  $[0, T]$  ; quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une multiapplication  $t \mapsto C_\varepsilon(t)$  à variation en escalier telle que

$$\forall t \in [0, T] : \delta(C(t), C_\varepsilon(t)) < \varepsilon$$

et que

$$(3.7) \quad \text{var}(C_\varepsilon; 0, T) \leq \text{var}(C; 0, T) .$$

Considérons en effet la fonction variation de  $C$  :

$$t \mapsto v(t) = \text{var}(C; 0, t)$$

définie sur  $[0, T]$ , croissante (non nécessairement strictement), à valeurs dans l'intervalle compact  $[0, v(T)]$ . Ce dernier intervalle est recouvert par une famille finie d'intervalles semi-ouverts de la forme  $](n-1)\varepsilon, n\varepsilon]$ ,  $n$  entiers  $\geq 0$  ; leurs images réciproques par  $v$  sont des intervalles disjoints, éventuellement vides ou réduits à des points ; notons  $I_1, I_2, \dots$ , indexées selon leur succession dans  $[0, T]$ , celles de ces images réciproques qui ne sont pas vides, constituant ainsi une partition de  $[0, T]$ . Choisissons un point  $t_k$  dans chaque  $I_k$  et définissons  $C_\varepsilon$  par

$$\forall t \in I_k : C_\varepsilon(t) = C(t_k) .$$

Tout  $t \in [0, T]$  appartient à l'un des  $I_k$  et alors

$$\delta(C(t), C_\varepsilon(t)) = \delta(C(t), C(t_k)) \leq |v(t) - v(t_k)| < \varepsilon .$$



La variation de  $C_\varepsilon$  sur  $[0, T]$  est

$$\sum_k \delta(C(t_k), C(t_{k+1}))$$

ce qui donne bien (3.7).

Noter que  $I_1$  est l'image réciproque de  $\{0\}$  par  $v$ , de sorte que la valeur de  $C_\varepsilon$  sur cet intervalle est  $C(0)$ .

Conservons les mêmes notations que dans ce lemme et notons  $u_\varepsilon$  la solution du problème de râfle par le convexe à variation en escalier  $C_\varepsilon$ , pour la donnée initiale  $u_\varepsilon(0) = a \in C(0)$ ; on a alors :

PROPOSITION. Il existe une application  $u$  de  $[0, T]$  dans  $H$ , unique, possédant la propriété suivante : à tout  $\alpha > 0$  on peut associer  $\eta > 0$  tel que

$$(3.8) \quad \varepsilon < \eta \implies \forall t \in [0, T] \cdot |u_\varepsilon(t) - u(t)| < \alpha .$$

En effet, considérons d'abord une suite de valeurs de  $\varepsilon$  tendant vers zéro ; si  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  désignent spécialement deux termes de cette suite,

$$\delta(C_\varepsilon(t), C_{\varepsilon'}(t)) \leq \delta(C_\varepsilon(t), C(t)) + \delta(C(t), C_{\varepsilon'}(t)) < \varepsilon + \varepsilon' .$$

Compte tenu de (3.7), l'inégalité (2.1), telle qu'on l'a étendue au § 3.a donne (avec  $s = 0$ ) :

$$|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon'}(t)|^2 < 4(\varepsilon + \varepsilon') \text{ var } (C ; 0, T)$$

La suite des  $u_\varepsilon(t)$  est donc de Cauchy ; si on note  $u(t)$  sa limite, la même inégalité fournit, pour tout autre  $\varepsilon > 0$ ,

$$|u_\varepsilon(t) - u(t)|^2 < 4\varepsilon \text{ var } (C ; 0, T) .$$

La proposition en résulte en prenant

$$\eta = \frac{\alpha^2}{4 \text{ var } (C ; 0, T)} ;$$

l'unicité de  $u$  est évidente.

DEFINITION. On dira que la fonction  $u$  introduite par la proposition précédente est la solution du problème de râteau par  $C$  pour la donnée initiale  $u(0) = a$ .

Il convient naturellement de s'assurer que cette définition est bien cohérente avec celles qu'on a précédemment posées .

1°) Si  $C$  est à variation en escalier,  $u$  coïncide avec la solution définie en 3.a , puisqu'on peut alors prendre  $C_\varepsilon = C$  pour tout  $\varepsilon$  .

2°) Si  $C$  est à variation bornée continue, la coïncidence de  $u$  avec la solution telle que nous l'avons antérieurement définie résulte de la Première partie, section 4. En effet la fonction en escalier, notée alors  $t \mapsto x(t)$ , fournie par l'algorithme de rattrapage, n'est pas autre chose que la solution du problème de râteau par le convexe  $C_r$  suivant, à variation en escalier :

$$C_r(0) = C(0)$$

$$C_r(t) = C(t_i) \text{ pour } t_i < t \leq t_{i+1} .$$

Lorsqu'on raffine la subdivision de  $[0, T]$  par les points  $t_i$ , la distance  $\delta(C_r(t), C(t))$  tend vers zéro, uniformément à l'égard de  $t \in [0, T]$  ; la limite de  $x(t)$  est donc  $u(t)$  d'après (3.3).

En fait les raisonnements qui précèdent prouvent la convergence de l'algorithme de rattrapage indépendamment de toute étude préalable de l'existence de la solution du problème de râteau par  $C$  : c'est ce que nous annonçons dans la Première partie, § 4.d . Et nous donnons ci-dessous une nouvelle voie pour aborder cette question d'existence.

3.c. Nouvelle approche de la question d'existence dans le cas absolument continu.

On suppose que la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  est absolument continue sur  $[0, T]$ ; on se propose d'établir l'existence d'une fonction absolument continue  $u : [0, T] \rightarrow H$  qui soit solution au sens propre du problème de râteau par  $C$ , c'est à dire que, pour presque tout  $t$ ,

$$(3.9) \quad - \frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u)$$

avec la condition initiale  $u(0) = a \in C(0)$  donné.

Comme dans la Première partie, § 3.e, un changement de variable préalable nous ramène au cas où la "vitesse numérique"  $\dot{v}$  du convexe  $C$  est presque partout égale à 1.

Soit  $S_n$  une suite de subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ .

$$S_n \cdot 0 = t_n^0 < t_n^1 < \dots < t_n^n = T.$$

On suppose que le "pas" de  $S_n$ , c'est à dire

$$p_n = \sup_i (t_n^{i+1} - t_n^i),$$

tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini et que chaque  $S_n$  est un raffinement des précédentes (i.e. les noeuds de  $S_n$  sont aussi des noeuds de  $S_{n+1}$ ). Pour chaque  $S_n$  on construit une suite de points  $x_n^i$  selon la loi suivante :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} x_n^0 &= a \\ x_n^{i+1} &= \text{proj} (x_n^i, C(t_n^{i+1})) \end{aligned}$$

(cf. algorithme de rattrapage) et on note  $t \mapsto u_n(t)$  la fonction continue "polygonale" interpolant cette suite, c'est à dire que

$$t \in [t_n^i, t_n^{i+1}] \implies u_n(t) = \frac{t_n^{i+1} - t}{t_n^{i+1} - t_n^i} x_n^i + \frac{t - t_n^i}{t_n^{i+1} - t_n^i} x_n^{i+1} .$$

La fonction  $u_n$  est absolument continue ; en tout point  $t$  de  $]t_n^i, t_n^{i+1}[$ , elle admet pour dérivée

$$(3.11) \quad \dot{u}_n(t) = \frac{1}{t_n^{i+1} - t_n^i} (x_n^{i+1} - x_n^i) .$$

La norme de cette dérivée s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_n^{i+1} - t_n^i} |x_n^{i+1} - x_n^i| &= \frac{1}{t_n^{i+1} - t_n^i} \text{dist}(x_n^i, C(t_n^{i+1})) \\ &< \frac{1}{t_n^{i+1} - t_n^i} \delta(C(t_n^i), C(t_n^{i+1})) \\ &< \frac{1}{t_n^{i+1} - t_n^i} (v(t_n^{i+1}) - v(t_n^i)) \leq 1 . \end{aligned}$$

Les  $\dot{u}_n$  appartiennent donc à la boule unité de  $\mathcal{L}_H^\infty [0, T]$  ; confondons les avec leurs classes dans  $L_H^\infty [0, T]$ . Comme  $L_H^\infty$  est le dual de  $L_H^1$ , la boule unité  $B$  de  $L_H^\infty$  est compacte pour la topologie  $\sigma(L_H^\infty, L_H^1)$  ; par ailleurs l'injection canonique de  $L_H^\infty$  dans  $L_H^1$  est continue pour les topologies respectives  $\sigma(L_H^\infty, L_H^1)$  et  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$  ; cette injection fait ainsi de  $B$  une partie faiblement compacte de l'espace de Banach  $L_H^1$ , donc séquentiellement faiblement compacte. On peut alors extraire une sous-suite, notée  $\dot{u}_\nu$  ( $\nu$  décrivant une partie infinie  $\mathbb{N}$  de  $\mathbb{N}$ ) qui converge vers un élément  $\dot{u}$  de  $B$  pour la topologie  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$ . Posons

$$u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s) ds .$$

La fonction  $u$  vérifie la condition  $u(0) = a$  ; elle est absolument continue sur  $[0, T]$ , de dérivée  $\dot{u}$ . En outre la convergence faible des  $\dot{u}_\nu$  fait que, pour tout  $y \in H$  on a (dualité en  $L_H^1$  et  $L_H^\infty$ ) :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle \dot{u}_\nu, \chi_{[0, t]} y \rangle = \langle \dot{u}, \chi_{[0, t]} y \rangle,$$

où  $\chi_{[0, t]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, t]$ ; cela veut dire que, pour chaque  $t$ ,  $u(t)$  est limite des  $u_\nu(t)$  dans  $H$  faible. En fait, pour chaque  $t \in [0, T]$  qui se trouve être un noeud des  $S_n$  à partir d'un certain rang, il résulte du paragraphe précédent, que les  $u_\nu(t)$  convergent (fortement, uniformément) vers la valeur de la solution du problème de râfle par  $C$ ; comme les  $u_\nu$  sont des fonctions lipschitziennes de rapport 1, la convergence a aussi lieu pour tout  $t \in [0, T]$  et la solution en question coïncide nécessairement avec la fonction  $u$  ci-dessus. Du même coup on voit que  $u(t) \in C(t)$  pour tout  $t$ .

Pour établir que  $u$  vérifie (3.9) il reste à montrer que, pour presque tout  $t$ ,

$$(3.12) \quad \gamma(t, -\dot{u}(t)) + (\dot{u}(t) | u(t)) \leq 0$$

( $\dot{u}$  est entendu ici comme élément de  $\mathcal{L}_H^\infty$ ).

Vu (3.10) et (3.11), une caractérisation classique de la projection sur un convexe donne, pour  $t \in ]t_\nu^i, t_\nu^{i+1}[$ ,

$$(3.13) \quad \gamma(t_{i+1}, -\dot{u}_\nu(t)) + (\dot{u}_\nu(t) | u_\nu(t_{i+1})) = 0.$$

Posons pour la suite que  $t$  n'appartient pas à l'ensemble (dénombrable) des noeuds des  $S_\nu$ .

L'hypothèse de continuité de la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  fait que les fonctions  $t \mapsto \gamma(t, y)$  sont équicontinues pour  $y \in B \cap D$  ( $B$  boule unité fermée de  $H$ ;  $D = \text{dom } \gamma$  indépendant de  $t$ ). On a vu que  $\dot{u}_\nu(t) \in B$  et que les fonction  $u_\nu$ , lipschitziennes de rapport 1 convergent (uniformément) vers  $u$  pour la topologie forte de  $H$ . Alors

(3.13) implique

$$(3.14) \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} [\gamma(t, -\hat{u}_\nu(t)) + (\hat{u}_\nu(t) \mid u(t))] = 0 .$$

Puisque les  $\hat{u}_\nu$  convergent vers  $\hat{u}$  pour la topologie  $\sigma(L_H^1, L_H^\infty)$ , il est connu qu'on peut construire une suite  $(w_k)$  d'éléments de  $L_H^1$  possédant les propriétés suivantes :

- chaque  $w_k$  est barycentre d'une famille finie de termes de la suite  $(\hat{u}_\nu)$ , de rang supérieur ou égal à  $k$  ;

- la suite  $(w_k)$  converge vers  $\hat{u}$  pour la topologie forte de  $L_H^1$ , de sorte qu'elle possède une sous-suite  $(w_{\kappa})$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ , telle que, pour presque tout  $t$ ,  $w_{\kappa}(t)$  converge vers  $\hat{u}(t)$ , selon la topologie forte  $H$ .

La convexité de la fonction

$$y \mapsto \gamma(t, -y) + (y \mid u(t))$$

fait alors que (3.14) implique, pour presque tout  $t$ ,

$$\limsup_{\kappa \in \mathbb{N}''} [\gamma(t, -w_{\kappa}(t)) + (w_{\kappa}(t) \mid u(t))] \leq 0 .$$

En outre, comme la fonction en question est s.c.i., on a

$$\gamma(t, -\hat{u}(t)) + (\hat{u}(t) \mid u(t)) \leq \liminf_{\kappa \in \mathbb{N}''} [\gamma(t, -w_{\kappa}(t)) + (w_{\kappa}(t) \mid u(t))] .$$

ce qui établit (3.12) .

#### 4. PROPRIETES DES SOLUTIONS DISCONTINUES

##### 4.a. Variation

Beaucoup de propriétés des solutions du problème de râfle, précédemment établies dans le cas d'un convexe  $t \mapsto C(t)$  à variation bornée continue, subsistent dans le cas discontinu ; en premier lieu :

PROPOSITION. Quel que soit  $I$ , intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) contenu dans  $[0, T]$ , et quelle que soit  $u$ , solution du problème de râfle par  $C$ , la variation de  $u$  sur  $I$  est inférieure ou égale à celle de  $C$  sur ce même intervalle.

En effet soient  $s < t$  deux instants de l'intervalle  $I$  et supposons d'abord que  $C$  soit à variation en escalier ; dans ce cas la solution  $u$  est constante sur les mêmes intervalles que  $C$ . La distance  $|u(t) - u(s)|$  est majorée par la somme des normes des sauts de  $u$  pour tous les instants de discontinuité appartenant à  $[s, t]$  ; or la norme d'un saut s'écrit

$$|u_+ - u_-| = \text{dist}(u_-, C_+) \leq \delta(C_-, C_+) ,$$

ce qui donne

$$(4.1) \quad |u(t) - u(s)| \leq \text{var}(C ; s, t) .$$

Cette inégalité s'étend par passage à la limite au cas où  $C$  est à variation bornée quelconque : en effet si on approche  $C$ , comme au paragraphe précédent, par des  $C_\varepsilon$  à variation en escalier, la construction même de ces  $C_\varepsilon$  fait que

$$(4.2) \quad \text{var}(C ; s, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{var}(C_\varepsilon ; s, t) .$$

par ailleurs  $u(t)$  et  $u(s)$  sont respectivement les limites de  $u_\varepsilon(t)$  et  $u_\varepsilon(s)$ . Il n'y a plus qu'à appliquer (4.1) aux divers intervalles consécutifs déterminés par une quelconque suite finie croissante d'éléments de  $I$ , ajouter, puis passer au sup pour toutes ces suites finies.

#### 4.b. Inégalité de stabilité

Si  $C$  et  $C'$  sont à variation bornée quelconques et si  $u$  et  $u'$  sont des solutions respectives du problème de rafle, on a la même inégalité qu'en (2.1) :

$$(4.3) \quad |u(t) - u'(t)|^2 - |u(s) - u'(s)|^2 \leq 2m (\text{var}(C, s, t) + \text{var}(C', s, t))$$

( $s \leq t$  quelconques dans  $[0, T]$ ;  $m$  majorant de la distance de Hausdorff  $\delta(C(\sigma), C'(\sigma))$  pour tout  $\sigma \in [s, t]$ ).

En effet, on a vu en 3.a que cette inégalité avait bien lieu pour  $C$  et  $C'$  à variation en escalier ; dans le cas général, il suffira d'approcher  $C$  et  $C'$  par des  $C_\varepsilon$  et  $C'_\varepsilon$  à variation en escalier, d'utiliser (4.2) et de remarquer que

$$\delta(C_\varepsilon(\sigma), C'_\varepsilon(\sigma)) \leq m + 2\varepsilon .$$

Lorsque, en particulier, on fait  $C = C'$  en (4.3) il reste que, si  $u$  et  $u'$  sont deux solutions du problème de rafle par le même  $C$ , on a

$$s \leq t \implies |u(t) - u'(t)| \leq |u(s) - u'(s)| ;$$

autrement dit le "flot" des solutions contracte les distances.

#### 4.c. Etude des discontinuités

Si  $C$  est à variation bornée quelconque, la fonction

$$t \mapsto v(t) = \text{var}(C; 0, t)$$



est croissante bornée, donc possède un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité. Soit  $t_0 \in [0, T]$  l'un de ces points : nous développons dans ce qui suit le cas  $t_0 \in ]0, T[$  : les éventualités  $t_0 = 0$  et  $t_0 = T$  se traitent de même, seules intervenant alors des limites à droite ou à gauche.

Soient respectivement  $v_-$  et  $v_+$  les limites de  $v$  à gauche et à droite de  $t_0$  :

$$v_- \leq v(t_0) \leq v_+ .$$

Au sens de la distance de Hausdorff, la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  possède une limite à gauche  $C_-$  et une limite à droite  $C_+$  (ensembles convexes fermés non vides). En effet, la fonction d'appui  $\gamma(t, \cdot)$  de  $C(t)$  possède un domaine  $D$  indépendant de  $t$ . On note  $B$  la boule unité fermée de  $H$ . Pour tout  $y \in D \cap B$  on a

$$(4.4) \quad |\gamma(t, y) - \gamma(s, y)| \leq |v(t) - v(s)| ,$$

ce qui montre, pour tout  $y \in D$ , l'existence de limites à gauche et à droite notées  $\gamma_-(y)$  et  $\gamma_+(y)$ , finies. Les fonctions  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$ , prolongées avec la valeur  $+\infty$  hors de  $D$ , sont évidemment sous-linéaires, nulles à l'origine ; pour montrer que ce sont les fonctions d'appui de convexes fermés non vides  $C_-$  et  $C_+$  il reste à vérifier leur semi-continuité inférieure, pour la topologie forte, en tout point de  $H$  : on la tire de la semi-continuité des  $\gamma$  et de ce que, d'après (4.4), la convergence (à gauche ou à droite de  $t_0$ ) est uniforme sur toute boule. Et l'uniformité de la convergence sur  $B$  exprime que  $C_-$  et  $C_+$  sont les limites de  $C$  au sens de la distance de Hausdorff.

Soit  $u$  une solution du problème de rafle par  $C$  ; la proposition 4.a fournit, pour tout  $s$  et tout  $t$ ,

$$|u(t) - u(s)| \leq |v(t) - v(s)| .$$

Puisque  $H$  est complet on en conclut l'existence de  $u_-$  et  $u_+$ , limites de la fonction  $t \mapsto u(t)$ , à gauche et à droite de  $t_0$  (évidemment  $u_- \in C_-$  et  $u_+ \in C_+$ ). On va établir .

$$(4.5) \quad u(t_0) = \text{proj} (u_-, C(t_0))$$

$$(4.6) \quad u_+ = \text{proj} (u(t_0), C_+)$$

Ce qui généralise la loi de saut (3.1) posée précédemment comme définition.

Approchons pour cela comme au § 3.b, la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  par une suite de multiapplications  $t \mapsto C_\varepsilon(t)$  à variation en escalier, la suite des  $\varepsilon$  tendant vers zéro : on peut construire chaque  $C_\varepsilon$  de manière que l'un des intervalles où cette multiapplication en escalier est constante soit réduit à  $\{t_0\}$ , avec  $C_\varepsilon(t_0) = C(t_0)$ . La fonction  $u$  est limite uniforme des fonctions en escalier  $u_\varepsilon$ , notons  $u_\varepsilon^-$  la valeur de  $u_\varepsilon$  à gauche de  $t_0$  ; la loi (3.1) donne

$$u_\varepsilon(t_0) = \text{proj} (u_\varepsilon^-, C(t_0)) .$$

Or la convergence uniforme de  $u_\varepsilon$  vers  $u$  implique

$$u_- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^- ;$$

(4.5) en résulte puisque la projection sur  $C(t_0)$  est une application continue de  $H$  dans  $H$ .

De même, en notant  $C_\varepsilon^+$  et  $u_\varepsilon^+$  les valeurs de  $C_\varepsilon$  et  $u_\varepsilon$  à droite

de  $t_0$ , la loi de saut (3.1) s'écrit

$$u_{\varepsilon}^+ = \text{proj} (u_{\varepsilon}(t_0), C_{\varepsilon}^+)$$

(4.6) en résulte parce que

$$u(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(t_0)$$

et que  $C_+$  est, au sens de la distance de Hausdorff, limite de  $C_{\varepsilon}^+$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

#### 4.d. Changement de variable

Soit  $\pi$  une application surjective croissante (donc continue) d'un intervalle  $[0, T']$  sur l'intervalle  $[0, T]$ . Etant donnée la multi-application  $t \mapsto C(t)$  définie sur  $[0, T]$ , à variation bornée non nécessairement continue, la multiapplication

$$C \circ \pi : t' \mapsto C(\pi(t')) \text{ noté } C'(t')$$

est à variation bornée sur  $[0, T']$ .

Une fonction  $u : [0, T'] \rightarrow H$  est solution du problème de rāfle par  $C'$  si et seulement si elle se factorise sous la forme  $u' = u \circ \pi$  où  $u : [0, T] \rightarrow H$  est une solution du problème de rāfle par  $C$ .

En effet, soit  $u$  une solution du problème de rāfle par  $C$  : par définition cette fonction est limite uniforme de fonctions en escalier  $u_{\varepsilon}$ , solutions du problème de rāfle par des convexes  $C_{\varepsilon}$ , à variation en escalier sur  $[0, T]$ , tels que

$$\forall t \in [0, T] : \delta(C(t), C_{\varepsilon}(t)) < \varepsilon .$$

Les multiapplications

$$t' \mapsto C_{\varepsilon}(\pi(t')) \text{ notées } C'_{\varepsilon}(t')$$

sont à variation en escalier sur  $[0, T]$ , avec

$$\forall t' \in [0, T] : \delta(C'(t'), C'_\varepsilon(t')) < \varepsilon .$$

La fonction  $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon \circ \pi$ , est solution du problème de râfle par  $C'_\varepsilon$  elle est en effet en escalier sur  $[0, T]$ , constante sur les mêmes intervalles que  $C'_\varepsilon$ , et la loi de saut (3.1), qui s'écrit ici

$$u_\varepsilon^+ = \text{proj} (u_\varepsilon^-, C'_\varepsilon^+) ,$$

se traduit évidemment par

$$u_\varepsilon^{i+} = \text{proj} (u_\varepsilon^{i-}, C'_\varepsilon^{i+}) .$$

La fonction  $u' = u \circ \pi$ , limite des  $u_\varepsilon^i$ , est donc bien solution du problème de râfle par  $C'$ .

Qu'inversement toute solution  $u'$  du problème de râfle par  $C'$  se factorise sous la forme  $u \circ \pi$  résulte immédiatement de l'existence et de l'unicité de la solution pour chaque donnée initiale appartenant à  $C(0) = C'(0)$ .

#### 4.e. Recollement d'intervalles

Le processus de râfle a, dans tout ce qui précède, été étudié par rapport à un intervalle compact  $[0, T]$  fixé. En fait l'association, à une multiapplication  $t \mapsto C(t)$  (convexe fermé), de fonctions  $t \mapsto u(t)$ , dites solutions du problème de râfle par  $C$ , est de caractère local, dans le cas discontinu tout comme dans le cas absolument continu où cette association se traduisait par une condition différentielle. De façon précise, l'approximation par des applications en escalier montre immédiatement que :

Si  $u$  est solution du problème de râfle par  $C$  sur  $[0, T]$ , elle l'est aussi sur tout sous-intervalle compact (i.e. la même relation a lieu entre les restrictions de  $u$  et de  $C$  à ce sous-intervalle).

Inversement :

Si  $(I_k)$  est une famille d'intervalles compacts recouvrant l'intervalle  $[0, T]$  et deux à deux empiétant et si  $u : [0, T] \rightarrow H$  est solution du problème de râfle par  $C$  sur chacun d'eux,  $u$  est aussi solution de ce problème sur  $[0, T]$ .

Cette même idée de recouvrement permet de définir les solutions du problème de râfle sur un intervalle  $I$  non compact (éventuellement égal à  $[t_0, +\infty[$  ou à  $\mathbb{R}$  tout entier) :

On suppose que la multiapplication  $C$  est à variation bornée sur tout sous-intervalle compact de  $I$ . On dit que  $u : I \rightarrow H$  est solution du problème de râfle par  $C$  sur  $I$  s'il existe un recouvrement de  $I$  par des intervalles compacts deux à deux empiétant, tels que  $u$  soit solution du problème de râfle par  $C$  sur chacun d'eux.

Il est clair alors que  $u$  est solution du problème de râfle par  $C$  sur tout sous intervalle, compact ou non de  $I$ . De plus on vérifie aisément que :

Soit  $t_0 \in I$  et soit  $a \in C(t_0)$  ; il existe une solution  $u$ , unique, du problème de râfle par  $C$  sur le sous-intervalle  $[t_0, \rightarrow)$  de  $I$ , s'accordant à la donnée initiale  $u(t_0) = a$ .

5. QUESTION ASYMPTOTIQUES

5. a. Processus de r fle sur  $[0, +\infty[$

On suppose dans toute la suite que la multiapplication  $t \mapsto C(t)$  est définie sur  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ , à variation bornée sur tout sous-intervalle compact, ce qui garantit l'existence de solutions du problème de r fle par  $C$ , définies sur  $\mathbb{R}_+$ ; soit  $t \mapsto u(t)$  l'une d'entre elles.

Une question importante est de formuler des hypothèses assurant l'existence d'une limite pour  $u(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Dans la théorie des systèmes élastoplastiques, par exemple, une telle situation correspondra au phénomène fondamental d'adaptation des contraintes (shake-down).

Un cas banal est celui où la multiapplication  $C$  est à variation bornée sur  $\mathbb{R}_+$  tout entier, c'est à dire où la fonction croissante

$$t \mapsto v(t) = \text{var} (C ; 0, t)$$

est bornée, de sorte que cette fonction numérique admet à l'infini une limite

$$\textcircled{+} = \text{var} (C ; \mathbb{R}_+) < +\infty .$$

Comme la variation de  $C$  sur tout intervalle majore celle de  $u$  sur ce même intervalle et que  $H$  est complet, on en tire aisément l'existence de la limite forte

$$u_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) .$$

On peut expliciter plus compl tement cette situation en constatant, par les mêmes raisonnements qu'au § 4.c, que  $C(t)$  possède, pour

$t \rightarrow +\infty$ , au sens de la distance de Hausdorff, une limite notée  $C_\infty$ , ensemble convexe fermé non vide, et que  $u_\infty \in C_\infty$ .

On peut aussi invoquer, en vertu du § 4.d, un changement de variable : notons  $\pi$  une application continue strictement croissante d'un intervalle compact  $[0, T]$  sur  $[0, +\infty[$ . La multiapplication  $C' = C \circ \pi$  est définie et à variation bornée sur  $[0, T[$ , prolongée à  $[0, T]$  en posant  $C'(T) = C_\infty$  elle est continue au point  $T'$ , de sorte que chaque solution  $u$  du problème de rafle par  $C'$  est continue au point  $T'$ . Or chaque solution  $u$  du problème initial se factorise sous la forme  $u = u' \circ \pi^{-1}$ , d'où, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , la convergence de  $u(t)$  vers un élément de  $C_\infty$ .

#### 5. b. Un cas de convergence des solutions

PROPOSITION. On suppose la multiapplication  $C$  à variation bornée sur tout intervalle compact, non nécessairement continue. On suppose par ailleurs qu'il existe  $T_1 \geq 0$  et une boule (fermée)  $\beta$ , de centre  $b$ , de rayon  $r$  non nul tels que

$$t \geq T_1 \implies \beta \subset C(t) .$$

Alors toutes les solutions du problème de rafle par  $C$  sont à variation bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , donc possèdent des limites fortes pour  $t$  tendant vers  $+\infty$ .

En outre ces divers limites appartiennent à l'adhérence de l'ensemble

$$(5.1) \quad \bigcup_{T \geq 0} \bigcap_{t \geq T} C(t)$$

(ensemble des points de  $H$  que  $C(t)$  "finit par contenir").

Démonstration. Etudions une de ces solutions, soit  $t \mapsto u(t)$ , sur l'intervalle  $[T_1, +\infty[$ , en posant  $u(T_1) = u_1$ .

Le point  $b$  étant intérieur à  $C(t)$  quel que soit  $t \geq T_1$ , la fonction constante  $b$  est aussi une solution du problème de râteau par  $C$  sur ce même intervalle ; donc la fonction

$$t \mapsto |b - u(t)| \geq 0$$

est décroissante. On va montrer que, pour tout  $t \geq T_1$ ,

$$(5.2) \quad \text{var}(u ; T_1, t) \leq \frac{1}{r} |b - u_1|^2 .$$

Nous entendons naturellement la solution  $u$  au sens général du § 3.b :  $u$  est limite simple sur  $[T_1, +\infty[$  (et même limite uniforme sur tout compact) d'une suite de fonctions  $u^n$  en escalier, chacune d'elles solution du problème de râteau par un convexe  $C^n$  à variation en escalier avec

$$(5.3) \quad u^n(T_1) = u_1 .$$

Montrons que, quels que soient  $\sigma$  et  $\tau$  dans  $[T_1, +\infty[$  tels que  $\sigma < \tau$ , on a

$$(5.4) \quad |u^n(\tau) - u^n(\sigma)| \leq \frac{1}{r} |b - u_1| (|b - u^n(\sigma)| - |b - u^n(\tau)|) .$$

Etudions le saut de  $u^n$  en un de ses points de discontinuité ; soit  $u_-^n$  la valeur à gauche,  $u_+^n$  la valeur à droite :

$$u_+^n = \text{proj}(u_-^n, C_+^n) ,$$

où  $C_+^n = C(\theta)$  pour un certain  $\theta \geq T_1$ . Soit  $D$  la droite joignant  $u_+^n$  et  $u_-^n$  ; soit  $b'$  la projection orthogonale de  $b$  sur  $D$ . L'hyperplan normal à  $D$  au point  $u_+^n$  sépare  $u_-^n$  du convexe  $C(\theta)$ , lequel



contient, par hypothèse, la boule  $\beta$ . On a

$$|b - u_{-}^n|^2 - |b - u_{+}^n|^2 = |b' - u_{-}^n|^2 - |b' - u_{+}^n|^2,$$

c'est à dire

$$(5.5) \quad (|b - u_{-}^n| - |b - u_{+}^n|)(|b - u_{-}^n| + |b - u_{+}^n|) \\ = |u_{+}^n - u_{-}^n| \cdot (|b' - u_{-}^n| + |b' - u_{+}^n|)$$

et, vu la situation de  $u_{-}^n$  et celle de la boule  $\beta$  par rapport à l'hyperplan en question,

$$|b' - u_{-}^n| > |b' - u_{+}^n| \geq r.$$

Par ailleurs, la constante  $b$  étant une solution du problème de râteau par  $C^n$  sur  $[T_1, +\infty[$  et vu (5.3)

$$|b - u_{+}^n| < |b - u_{-}^n| \leq |b - u_1|.$$

L'inégalité (5.5) fournit donc

$$|u_{+}^n - u_{-}^n| \leq \frac{1}{2} |b - u_1| \cdot (|b - u_{-}^n| - |b - u_{+}^n|).$$

Si on fait la somme des inégalités analogues pour toutes les discontinuités de  $u^n$  dans l'intervalle  $[\sigma, \tau]$  on obtient bien (5.4). A la limite (5.4) devient

$$|u(\tau) - u(\sigma)| \leq \frac{1}{r} |b - u_1| \cdot (|b - u(\sigma)| - |b - u(\tau)|).$$

Pour toute subdivision de  $[T_1, t]$  en sous-intervalles tels que  $[\sigma, \tau]$ , on fait la somme des inégalités semblables à la précédente, finalement en prenant le sup pour toutes ces subdivisions, cela laisse

$$\text{var}(u; T_1, t) \leq \frac{1}{r} |b - u_1| \cdot (|b - u_1| - |b - u(t)|)$$

d'où (5.2).

Bref,  $u$  est à variation bornée sur  $[T_1, +\infty[$ , ce qui prouve l'existence de la limite forte

$$u_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) .$$

Montrons enfin que  $u_\infty$  est adhérent à l'ensemble (5.1).

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $t_\varepsilon$  tel que

$$t > t_\varepsilon \implies |u(t) - u_\infty| < \varepsilon .$$

Quel que soit  $t > T_1$ , l'ensemble convexe  $C(t)$  contient le point  $u(t)$  et la boule  $\beta$ , donc contient l'enveloppe convexe de  $\{u(t)\} \cup \beta$ .

Un raisonnement de géométrie élémentaire, dans le plan des trois points  $u_\infty$ ,  $b$  et  $u(t)$ , montre que, si  $|u(t) - u_\infty| < \varepsilon$ , cette enveloppe convexe contient aussi le point  $u_\varepsilon$ , divisant le segment  $[u_\infty, b]$  dans le rapport  $\frac{\varepsilon}{r}$  et on a

$$|u_\infty - u_\varepsilon| = \frac{|u_\infty - b| \varepsilon}{\varepsilon + r} < \frac{|u_\infty - b| \varepsilon}{r} .$$

Bref, la boule de centre  $u_\infty$ , ayant pour rayon l'expression ci-dessus rencontre l'ensemble

$$\bigcap_{t > t_\varepsilon} C(t)$$

donc rencontre l'ensemble (5.1).

REMARQUE. Si  $C$  est à variation bornée continue, on se ramène par changement de variable au cas absolument continu (cf. Première Partie), de sorte que la dérivée  $\dot{u}$  existe pour presque tout  $t$ . Alors on peut aussi établir (5.2) de la façon suivante, qui à l'intérêt de mettre en évidence le rôle joué dans la présente question par la propriété de monotonie du second membre de (1.1). Pour tout  $x \in \beta$ , la constante  $x$  est solution du problème de réflexion par  $C$  sur l'intervalle  $[T_1, +\infty[$ ; on en tire,

pour presque tout  $t$  dans cet intervalle,

$$(x - u(t) \mid \dot{u}(t)) \geq 0 .$$

Cela veut dire que  $-\dot{u}(t)$  appartient au cône polaire du cône (de sommet l'origine) engendré par l'ensemble  $\beta - u(t)$ . La géométrie élémentaire montre que ce cône est de révolution et que son demi-angle au sommet  $\alpha$  se définit par

$$\cos \alpha = \frac{r}{|b - u(t)|} \geq \frac{r}{|b - u_1|} .$$

Donc, pour presque tout  $t \geq T_1$ ,

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} |u(t) - b|^2 &= 2 (b - u(t) \mid \dot{u}(t)) \\ &\geq 2 |b - u(t)| |\dot{u}(t)| \cos \alpha \\ &\geq \frac{2r}{|b - u_1|} |b - u(t)| |\dot{u}(t)| , \end{aligned}$$

d'où finalement

$$|\dot{u}(t)| \leq - \frac{|b - u_1|}{r} \frac{d}{dt} |b - u(t)| .$$

Par intégration sur  $[T_1, t]$  on en tire

$$\text{var}(u, T_1, t) \leq \frac{|b - u_1|}{r} (|b - u_1| - |b - u(t)|) .$$

ce qui fournit bien (5.2).

5.c. Cas où la dimension de  $H$  est finie.

PROPOSITION. Si l'espace hilbertien  $H$  est de dimension finie l'existence de la boule  $\beta$ , invoquée dans la proposition 5.b, équivaut à l'hypothèse suivante : l'ensemble

$$\bigcup_{T \geq 0} \bigcap_{t \geq T} C(t)$$

possède un intérieur non vide.

Evidemment, si la boule  $\beta$  existe, elle est contenue dans l'ensemble en question qui possède ainsi un intérieur non vide. Réciproquement si l'ensemble est d'intérieur non vide il contient un simplexe  $S$ , de sommets  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $n$  : dimension de  $H$ ). Pour chacun de ces  $n+1$  points, soit  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), il existe  $t_i \geq 0$  tel que

$$x_i \in \bigcap_{t \geq t_i} C(t)$$

Si on appelle  $T_1$  le plus grand des  $t_i$ , on a donc

$$t \geq T_1 \Rightarrow S \subset C(t)$$

et il n'y a plus qu'à choisir une boule  $\beta$  contenue dans  $S$ .

REMARQUE. Dans ce cas d'une dimension finie on peut donner une démonstration plus rapide de la proposition 5.b : la fonction

$$t \mapsto |b - u(t)|$$

étant décroissante sur l'intervalle  $[T_1, +\infty[$  les valeurs prises par la fonction  $u$  sur cet intervalle appartiennent à la boule fermée de centre  $b$ , de rayon  $|b - u_1|$ , laquelle est maintenant compacte. Pour montrer que la fonction  $u$  tend vers une limite, il suffit de prouver qu'elle possède une seule valeur d'adhérence pour  $t$  tendant vers  $+\infty$ . De fait, quel que soit  $x \in \beta$ , la constante  $x$  est solution du problème de raffle par  $C$  sur  $[T_1, +\infty[$ , de sorte que la fonction  $t \mapsto |x - u(t)|$  est décroissante. Si la fonction  $u$  possédait deux valeurs d'adhérence distinctes  $a_1$  et  $a_2$  on concluerait, par la continuité de la fonction distance, que

$$|x - a_1| = |x - a_2|.$$

Ainsi la boule  $\beta$  serait contenue dans l'hyperplan médiateur des points  $a_1$  et  $a_2$ , ce qui est absurde.

(Manuscrit reçu le 13 Janvier 1972)

B I B L I O G R A P H I E

On pourra consulter la liste de références donnée dans :

J.J. MOREAU. Raïfle par un convexe variable (Première Partie),  
Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier 1971,  
Exposé n° 15 (multigraphié 43p.) .