



HAL
open science

Rafle par un convexe variable (Première partie)

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Rafle par un convexe variable (Première partie). 1971. hal-02309451

HAL Id: hal-02309451

<https://hal.science/hal-02309451>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1971 Exposé n° 15

RAFLE PAR UN CONVEXE VARIABLE

(Première partie)

par

J. J. MOREAU

1 - INTRODUCTION

1.a. Formulation du problème

Soit H un espace hilbertien réel; on y notera $|\cdot|$ la norme et $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire. Soit $C(t)$ une famille de parties convexes fermées non vides de H , indexées par $t \in [0, T]$. On emploiera au besoin le langage de la cinématique, en interprétant t comme le temps : la multiapplication $t \mapsto C(t)$ définit alors un convexe en évolution dans H ou convexe mobile.

Soit

$$x \mapsto \psi(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(t) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(t) \end{cases}$$

la fonction indicatrice de l'ensemble $C(t)$.

On demande de déterminer une application $t \mapsto u(t)$ de $[0, T]$ dans H (c'est à dire, si l'on préfère, un point mobile dans H) vérifiant l'équation différentielle à second membre multivoque

$$(1.1) \quad - \frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u)$$

et la condition initiale

$$(1.2) \quad u(0) = a$$

(a élément donné de $C(0)$).

Le sous-différentiel $\partial\psi(t, u)$ constitue le cône des "normales sortantes" au point u du convexe $C(t)$ (cône réduit, en particulier, à $\{0\}$ lorsque u est un point interne du convexe) ; de là une image mécanique du problème : grossièrement parlant, le point mobile u reste fixe dans H tant qu'il est interne au convexe variable $C(t)$; lorsque u est rejoint par la frontière de cet ensemble, il est poussé par cette frontière, dans la direction d'une normale entrante, de manière à rester dans $C(t)$ pour tout t . C'est ce qu'on peut appeler un processus de râfle. Nous avons été conduits à ce type de problème par la théorie des systèmes mécaniques élasto-plastiques, de liberté finie ou infinie (cf. MOREAU [5]) ; dans ce cas le point u représente non pas une configuration du système mécanique étudié, mais en un sens généralisé, une force ; l'ensemble $C(t)$ dérive de la loi de plasticité du système ; la convexité de cet ensemble a une signification mécanique profonde et n'est pas seulement motivée par la commodité mathématique. La structure hilbertienne de H , pour sa part, est liée à la loi d'élasticité du système.

Certains problèmes économétriques aboutissent aussi à des formulations du même genre.

1.b. Autre interprétation

Donnons encore une autre image mécanique, surtout claire si H a la dimension 2 : le graphe de la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est une partie de $[0, T] \times H$ dont la frontière peut être visualisée

comme un tube de section convexe non uniforme. Pour fixer les idées, imaginons que l'axe des t est "vertical descendant". Le graphe d'une application $t \mapsto u(t)$ solution de (1.1) est une ligne caractérisée comme suit : toute portion éventuelle de cette ligne qui se trouve "interne" au tube précédent est un segment de droite vertical ; toute portion située sur la "paroi" du tube est orthogonale en chacun de ses points aux section horizontales donc est ligne de pente de cette paroi avec la particularité supplémentaire que voici : le sens des t croissants sur cette ligne, c'est à dire, vu notre convention, le sens descendant, correspond au sens entrant dans $C(t)$; cette particularité exprime que la ligne de pente en question ne saurait être tracée sur une partie "en surplomb" de la paroi. Bref, une image mécanique de la courbe est fournie par un filet d'eau tombant dans le tube : chute libre verticale sans contact avec la paroi, en certaines parties ; en d'autres parties ruissellement sur la paroi, selon une ligne de pente. Cette image mécanique a l'intérêt d'attirer l'attention sur une caractérisation extrémale de la dérivée $\frac{du}{dt}$, à chaque instant où elle existe : la norme de cette dérivée est égale à la tangente de l'angle que fait avec "l'axe des t " la tangente au point correspondant du graphe ci-dessus. Les propriétés élémentaires des lignes de pente d'une surface suggèrent que cet angle α , en chaque point de la courbe, la plus petite valeur compatible avec la condition :

$$\forall t, u(t) \in C(t) .$$

On formulera avec plus de précision dans un rapport ultérieur cette propriété qui conduit à l'équivalence de (1.1) avec une équation différentielle à second membre univoque.

1.c. Travaux antérieurs

Pour chaque t , la multiapplication $x \mapsto \partial\psi(t, x)$ écrite au second membre de (1.1) est monotone au sens de Kachurovski-Minty. Les équations d'évolution de la forme plus générale

$$(1.3) \quad \frac{du}{dt} \in A(t, u)$$

où la multiapplication donnée $x \mapsto A(t, x)$ est monotone pour chaque t , ont fait l'objet dans les dernières années d'assez nombreux travaux (dans ce cadre entre notamment les inéquations variationnelles d'évolution ; on pourra consulter J.L. LIONS [1]). F.E. BROWDER [1] étudiait d'abord le cas où A est univoque, continu de $\mathbb{R}_+ \times H$ dans H et transforme les bornés en bornés ; il montrait que (1.3) possède dans ce cas, pour toute valeur de la donnée initiale $u(0)$, une solution au sens strict, c'est à dire fortement dérivable, définie sur \mathbb{R}_+ tout entier. Une conséquence de la monotonie de A dans le cas général est que le "flot" des solutions éventuelles de (1.3) contracte les distances (cf. 3.b ci-après) ; autrement dit, si u_1 et u_2 sont deux solutions, la fonction $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$ est décroissante (de là l'unicité de la solution pour chaque donnée $u(0)$). Par là le cas particulier d'un A indépendant de t est intimement lié à la théorie des semi-groupes de contraction de l'espace hilbertien H (où d'une partie de cet espace). Consulter : Y. KOMURA [1], T. KATO [1], H. BREZIS [1]. L'étude du cas où A dépend de t était jusqu'à présent presque toujours subordonnée à l'hypothèse que le domaine de A : c'est à dire l'ensemble $\text{dom } A = \{x \in H : A(t, x) \neq \emptyset\}$ est indépendant de t . Ce n'est pas du tout le cas dans ce qui nous occupe, puisque

dom $\partial\psi = C(t)$. Il faut cependant noter le cas particulier où A varie simplement par translation, c'est à dire

$$A(t, x) = A_0(x - b(t))$$

A_0 désignant une multiapplication monotone indépendante de t et b une application donnée de $[0, T]$ dans H admettant (en un sens convenable) une fonction dérivée $t \mapsto \dot{b}(t)$. Alors le changement de fonction inconnue

$$u(t) - b(t) = v(t)$$

ramène (1.3) à l'équation

$$(1.4) \quad - \frac{dv}{dt} \in A_0(v) + \dot{b}(t)$$

étudiée notamment dans T. KATO [2]; BENILAN-BREZIS [1] et, plus spécialement, si $A_0 = \partial\varphi$ (avec φ fonction numérique convexe s.c.i.) dans H. BREZIS [1]. Le cas, utile pour les applications, où notre convexe $C(t)$ varie par translation entre dans ce cadre et les travaux ci-dessus révèlent certaines propriétés fines des solutions dans ce cas. Cependant, même pour cette forme particulière de variation du convexe $C(t)$, ces travaux n'abordent pas l'une des questions principales du présent rapport : la convergence de l'algorithme de rattrapage (section 4).

1.d. Principaux résultats de cette première partie

Par solution de (1.1) sur un intervalle $[0, T]$ nous entendons toujours une application u de $[0, T]$ dans H qui soit primitive d'une $\dot{u} \in \mathcal{L}_H^1 [0, T]$; i.e

$$u(t) = Cte + \int_0^t \dot{u}(s) ds$$

(au sens de l'intégration forte des fonctions à valeurs dans l'espace

de Banach H ; en fait \hat{u} se trouve alors être presque partout dérivée forte de u : voir à ce sujet KOMURA [1]) telle que $-\hat{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t))$ pour tout $t \in [0, T]$; les hypothèses de continuité qu'on fera dans la suite, quant à la multiapplication $t \mapsto C(t)$ font d'ailleurs qu'il revient au même d'imposer seulement cette relation pour presque tout t , c'est à dire finalement de rechercher \hat{u} comme élément de l'espace séparé $L^1_H [0, T]$.

u est alors continue de $[0, T]$ dans H (fort) et on montre en 3.b qu'il existe au plus une telle solution satisfaisant la condition initiale (1.2).

L'existence est prouvée en 3.e moyennant l'hypothèse suivante : la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est absolument continue au sens de la distance de Hausdorff entre parties de H (c'est plutôt une pseudo-distance car nous ne supposons pas ici que l'ensemble $C(t)$ soit borné). Un appendice résume les faits essentiels concernant, d'une manière générale, la continuité absolue d'une application de \mathbb{R} dans un espace métrique E ; le cas où E est l'ensemble des parties convexes fermées non vides de H est détaillé à la section 2 : on y montre en particulier comment cette continuité absolue se reflète dans les propriétés de la fonction d'appui $x \mapsto \gamma(t, x)$ du convexe $C(t)$.

Ce résultat couvre en particulier le cas d'un convexe variant par translation $C(t) = C(0) + b(t)$: la continuité absolue se réduit alors à celle de l'application univoque $t \mapsto b(t)$ de $[0, T]$ dans H .

Incidentement on se trouve obtenir un théorème de sélection : si la multiapplication $t \mapsto C(t)$, à valeurs convexes fermées non vides

dans H , est absolument continue (resp. à variation bornée continue) elle possède une sélection absolument continue (resp. à variation bornée continue). De semblables théorèmes ont été établis tout récemment par N. KIKUCHI et Y. TOMITA [1] pour $H = \mathbb{R}^n$ et $C(t)$ compact, non nécessairement convexe.

Noter un caractère spécifique de l'équation (1.1), qu'on ne retrouve pas dans le cas général (1.3) : le second membre $\partial\psi(t, u)$ est un cône (convexe). De là une propriété par ailleurs intuitive : le processus de râfle, c'est à dire la relation entre l'évolution du convexe et celle du point u défini par (1.1), (1.2) est indifférente à un changement d'indexage préservant l'ordre ; de façon précise si π est une application absolument continue croissante (peut être non strictement) d'un intervalle $[0, T']$ sur $[0, T]$ et qu'on pose $C'(t') = C(\pi(t'))$, la fonction $t' \mapsto u(\pi(t'))$ est solution du problème de râfle associé à la multiapplication $t' \mapsto C'(t')$. Ce fait joue un rôle fondamental dans le présent rapport. Dans cet esprit même on peut définir, au moyen d'une factorisation évidente, les solutions généralisées du problème de râfle pour une multiapplication $t \mapsto C(t)$ qui est seulement supposée à variation bornée continue, au sens de la distance de Hausdorff (paragraphe 3.e).

La continuité absolue peut paraître une hypothèse exagérément restrictive lorsque le convexe $C(t)$ n'est pas borné : elle se trouve en effet exiger que le cône asymptotique de ce convexe soit indépendant de t . C'est pourquoi un cas d'existence locale est présenté en 3.d .

La section 4 qui termine ce rapport est consacrée à la convergence de l'algorithme de rattrapage ; cet algorithme est tout naturellement suggéré par la propriété de minimisation de la vitesse expliquée

intuitivement en 1.b ci-dessus : on "discrétise le temps", c'est à dire qu'on intercale entre 0 et T n-1 valeurs $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. La donnée initiale a est projetée sur $C(t_1)$, puis cette projection sur $C(t_2)$, et ainsi de suite ... On montre en 4.d que cette suite de points (ou plus précisément la fonction en escalier qu'on bâtit sur elle) converge uniformément vers la solution u du problème de râfle, lorsqu'on raffine la subdivision de manière que $\sup (t_{i+1} - t_i)$ tende vers zéro. On fait pour cela l'hypothèse que la multiapplication C est à variation bornée continue.

La technique constamment employée dans tout ce rapport est celle de la régularisation (on peut aussi bien ici l'intituler pénalisation) : remplacement de (1.1) par des équations différentielles ordinaires du type de Cauchy ; on parvient à montrer que leurs solutions respectives pour la donnée initiale a, convergent vers une solution de (1.1). Une originalité de la section 4 est que le coefficient de la régularisation s'y trouve varier avec t ; c'est ce que nous appelons la régularisation modulée.

D'autres techniques seront présentée dans les rapports ultérieurs.

2 - MULTIAPPLICATIONS ABSOLUMENT CONTINUES

2.a Distance de Hausdorff de deux ensembles

Soient C et C' deux parties non vides de H que nous supposons toujours convexes fermées. Rappelons qu'on appelle distance de Hausdorff, notée $\delta(C, C')$, de ces deux ensembles l'inf des $\rho > 0$ tels que, si β désigne la boule (fermée, par exemple) de centre O,

de rayon ρ , on ait

$$(2.1) \quad C \subset \beta + C' \quad \text{et} \quad C' \subset \beta + C$$

Cette métrique, à valeurs dans $[0, +\infty]$, vérifie bien l'inégalité triangulaire et $\delta(C, C')$ s'annule si et seulement si $C = C'$ (on vérifiera ces faits, si on veut, en utilisant l'expression (2.2) ci-après).

Soient γ et γ' les fonctions d'appui de C et C' ;

(2.1) équivaut à

$$\gamma \leq \rho|\cdot| + \gamma' \quad \text{et} \quad \gamma' \leq \rho|\cdot| + \gamma$$

Donc $\delta(C, C')$ est fini seulement si γ et γ' ont même domaine D et en ce cas :

$$(2.2) \quad \delta(C, C') = \sup \{ |\gamma(y) - \gamma'(y)| : y \in D, |y| = 1 \}$$

ou, vu l'homogénéité des fonctions d'appui

$$(2.3) \quad \delta(C, C') = \sup \{ |\gamma(y) - \gamma'(y)| : y \in D, |y| \leq 1 \}$$

Rappelons que l'adhérence de $\text{dom } \gamma$ est le cône polaire du cône asymptotique de C ; on en conclut que si $\delta(C, C') < +\infty$, les ensembles C et C' ont même cône asymptotique.

Exemple : Si $a \in H$ et $C' = C + a$, on a $\gamma' = \gamma + (a|\cdot|)$ d'où $\delta(C, C') \leq |a|$ (égalité si $\text{dom } \gamma = H$, c'est à dire C borné).

2.b. Variation bornée et continuité absolue.

Soit $t \mapsto C(t)$ une multiapplication de l'intervalle $[0, T]$ dans H , à valeurs convexes fermées non vides. L'usage de la distance de Hausdorff permet d'appliquer à C les définitions rappelées dans l'Appendice, avec pour \mathbb{E} l'ensemble des parties convexes fermées non

vides de H .

Soit $y \mapsto \gamma(t, y)$ la fonction d'appui de $C(t)$.

Si C est à variation bornée, la distance $\delta(C(s), C(t))$ est finie quels que soient s et t dans $[0, T]$; alors le domaine D de la fonction $\gamma(t, \cdot)$ est indépendant de t et (2.2) montre que, pour tout $y \in D$, on a

$$(2.4) \quad |\gamma(t, y) - \gamma(s, y)| \leq |y| \cdot \delta(C(s), C(t)) .$$

Il en résulte qu'en posant

$$v(t) = \text{var}(C; 0, t) ,$$

on a

$$(2.5) \quad |\gamma(t, y) - \gamma(s, y)| \leq |y| \cdot |v(t) - v(s)| .$$

La multiapplication C est absolument continue si et seulement si la fonction numérique v est absolument continue. En ce cas (2.5) montre que, pour tout $y \in D$, la fonction $\gamma(\cdot, y)$ est absolument continue, donc est primitive d'une fonction $\dot{\gamma}(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1[0, T]$ et, pour presque tout t ,

$$(2.6) \quad |\dot{\gamma}(t, y)| \leq |y| \cdot \dot{v}(t) .$$

Selon la terminologie posée dans l'Appendice, \dot{v} est la vitesse numérique du convexe mobile.

Exemple : convexe variant par translation, c'est à dire

$$C(t) = C(0) + b(t) ,$$

où $b : [0, T] \rightarrow H$ est une fonction absolument continue, primitive de $\dot{b} \in \mathcal{L}_H^1[0, T]$. Alors

$$\gamma(t, y) = \gamma(0, y) + (b(t) | y)$$

d'où

$$\dot{\gamma}(t, y) = (\dot{b}(t) | y) .$$

Dans ce cas, pour presque tout t ,

$$\dot{v}(t) \leq |\dot{b}(t)|$$

(égalité si $C(0)$ est borné) .

2.c. Distance d'un point à $C(t)$.

Soit $t \mapsto z(t)$ une application de $[0, T]$ dans H (ou "point mobile"), absolument continue, donc primitive forte d'une fonction $\dot{z} \in \mathcal{L}_H^1(0, T)$; posons

$$h(t) = \text{dist}(z(t), C(t))$$

(attention : ce n'est pas la distance de Hausdorff entre les ensembles $\{z(t)\}$ et $C(t)$).

Rappelons que la distance d'un point à un ensemble peut s'exprimer comme une inf-convolution :

$$\text{dist}(z, C) = \inf_{u \in H} (|z-u| + \psi_C(u)) = (|\cdot| \nabla \psi_C)(z) .$$

Comme C est convexe fermé non vide, la fonction duale de ψ_C est γ ; celle de $|\cdot|$ est ψ_B (B boule unité fermée de H) fonction continue à l'origine ; donc la fonction duale de $|\cdot| \nabla \psi_C$ est $\psi_B + \gamma$, d'où

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, C) &= \sup_{u \in H} ((z|u) - \psi_B(u) - \gamma(u)) \\ &= \sup_{u \in B} ((z|u) - \gamma(u)) \end{aligned}$$

et on peut ici remplacer B par $B' = B \cap \text{dom } \gamma$.

On en conclut, pour tout s et tout t dans $[0, T]$,

$$\begin{aligned} |h(t) - h(s)| &\leq \sup_{u \in B'} |(z(t)|u) - \gamma(t, u) - (z(s)|u) + \gamma(s, u)| \\ &\leq |z(t) - z(s)| + |v(t) - v(s)| \end{aligned}$$

Par suite h est absolument continue, donc primitive d'une $\dot{h} \in \mathcal{L}^1[0, T]$, avec pour presque tout t ,

$$(2.7) \quad |\dot{h}(t)| \leq |\dot{z}(t)| + \dot{v}(t).$$

Nous aurons besoin d'une estimation plus précise:

PROPOSITION. Notons $q(t, z)$ la moitié du carré de la distance d'un point $z \in H$ au convexe fermé $C(t)$; soit $t \mapsto z(t)$ une application absolument continue de $[0, T]$ dans H ; posons

$$g(t) = q(t, z(t)) = \frac{1}{2} (h(t))^2$$

Si la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est absolument continue, de vitesse numérique \dot{v} , la fonction numérique g est absolument continue, primitive de $\dot{g} = h \dot{h}$, et on a pour presque tout t

$$(2.8) \quad |\dot{g}(t) - (\dot{z}(t) \mid \text{grad } q(t, z(t)))| \leq h(t) \dot{v}(t).$$

En effet, notant Q la fonction $\frac{1}{2} |\cdot|^2$, la théorie des applications "prox" (cf. MOREAU [1]) fournit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{dist}^2(z, C) &= (Q \nabla \psi)(z) = Q(z) - (Q \nabla \gamma)(z) \\ &= \inf_{u \in H} [Q(u) + \gamma(t, u) - (z \mid u)] \end{aligned}$$

et l'inf est atteint pour u au point

$$(2.9) \quad y(t) = \text{prox}(z, \gamma) = z - \text{proj}(z, C) = \text{grad } q(t, z).$$

L'application $t \mapsto y(t)$ est continue (la continuité de $t \mapsto \text{proj}(z(t), C(t))$ si $t \mapsto z(t)$ est continue et $t \mapsto C(t)$ continue pour la distance de Hausdorff est classique; voir, si on veut, MOREAU [6]). Donc si β est l'intersection de $\text{dom } \gamma$ (ensemble indépendant de t) avec une boule de centre $y(t)$, de rayon $r > 0$, il existe

$\varepsilon > 0$ tel que, quels que soient $\sigma \leq \tau$ dans $[0, T] \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$, les points $y(\sigma)$ et $y(\tau)$ appartiennent à β , d'où

$$g(\sigma) = - \inf_{u \in \beta} [Q(u) + \gamma(\sigma, u) - (z(\sigma) | u)]$$

et une expression semblable pour $g(\tau)$; alors

$$\begin{aligned} g(\tau) - g(\sigma) &= \sup_{u \in \beta} [-Q(u) - \gamma(\tau, u) + (z(\tau) | u)] \\ &\quad - \sup_{u \in \beta} [-Q(u) - \gamma(\sigma, u) + (z(\sigma) | u)] \\ &\leq \sup_{u \in \beta} [\gamma(\sigma, u) - \gamma(\tau, u) + (z(\tau) - z(\sigma) | u)] \end{aligned}$$

Or, vu (2.5), pour tout $u \in \beta$, on a

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma, u) - \gamma(\tau, u) &= - \int_{\sigma}^{\tau} \dot{\gamma}(s, u) ds \leq |u| \int_{\sigma}^{\tau} \dot{v}(s) ds \\ &\leq (|y(t)| + r) \int_{\sigma}^{\tau} \dot{v}(s) ds \end{aligned}$$

et

$$(z(\tau) - z(\sigma) | u - y(t)) \leq r \int_{\sigma}^{\tau} |\dot{z}(s)| ds$$

L'inégalité ci-dessus fournit donc

$$\begin{aligned} g(\tau) - g(\sigma) - (z(\tau) - z(\sigma) | y(t)) &\leq |y(t)| \int_{\sigma}^{\tau} \dot{v}(s) ds \\ &\quad + r \int_{\sigma}^{\tau} (|\dot{z}(s)| + \dot{v}(s)) ds \end{aligned}$$

Or le premier membre s'écrit

$$\int_{\sigma}^{\tau} [\dot{g}(s) - (\dot{z}(s) | y(t))] ds$$

Comme $t \mapsto y(t)$ est une fonction continue et que, d'autre part, r peut être rendu arbitrairement petit en limitant ε , il vient, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{g}(t) - (\dot{z}(t) | y(t)) \leq |y(t)| \dot{v}(t)$$

Le même raisonnement, avec $\tau \leq \sigma$, fournirait une inégalité semblable au remplacement près du premier membre par son opposé : cela établit (2.8).

3 -- UNICITE, EXISTENCE.

3.a. Définition

L'interprétation de l'écriture (1.1) est subordonnée au sens en lequel on entend la dérivation $\frac{d}{dt}$.

Dans toute la suite, nous dirons qu'une application u de $[0, T]$ dans H est solution de (1.1) et (1.2) s'il existe $\dot{u} \in \mathcal{L}_H^1[0, T]$ telle que

$$(3.1) \quad u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s) ds$$

(ce qu'on exprimera en disant que \dot{u} est dérivée de u) et que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(3.2) \quad -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, u(t)).$$

Cette définition correspond à la démarche la plus classique en théorie des équations différentielles : notant S l'opération "primitive nulle à l'origine", linéaire de $\mathcal{L}_H^1[0, T]$ dans $\mathcal{C}_H[0, T]$, l'élément \dot{u} est caractérisé par l'équation intégrale

$$(3.3) \quad \forall t \in [0, T] : -\dot{u}(t) \in \partial\psi(t, a + (S\dot{u})(t))$$

Que (3.2) soit satisfaite pour tout $t \in [0, T]$ exige en particulier

$$(3.4) \quad \forall t \in [0, T] : u(t) \in C(t),$$

puisque le sous-différentiel $\partial\psi(t, x)$ est vide lorsque $x \notin C(t)$.

Notons que les hypothèses de régularité qu'on fera dans la suite sur la multiapplication $t \mapsto C(t)$, pour assurer l'existence d'une solution du problème, impliqueront toujours la continuité de cette multiapplication au sens de la distance de Hausdorff. Il sera dès lors équivalent d'imposer seulement que (3.2) soit vérifiée presque partout : en effet, cela impliquera $u(t) \in C(t)$ presque partout, or (3.1) assure que u est fortement continue, d'où continuité de la fonction numérique

$$t \mapsto \text{dist} (u(t), C(t)),$$

d'où (3.4) ; alors $\partial \psi(t, u(t))$ est non vide pour tout t (cet ensemble contient au moins le zéro de H), d'où, dans une seconde étape, possibilité d'assurer (3.2) partout en corrigeant seulement \dot{u} sur un ensemble de mesure nulle.

En vertu de cette remarque, on se contentera souvent de rechercher \dot{u} comme élément de l'espace séparé $L^1_H[0, T]$.

3. b. Unicité

LEMME. Soit $\dot{w} \in \mathcal{L}^1_H[0, T]$ et soit w une primitive de \dot{w} ; alors quels que soient t_1 et t_2 dans $[0, T]$, on a

$$(3.5) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}(t) \mid w(t)) dt = \frac{1}{2} |w(t_2)|^2 - \frac{1}{2} |w(t_1)|^2.$$

En effet, le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}(t) \mid w(t_1) + \int_{t_1}^t \dot{w}(s) ds) dt \\ &= \left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{w}(t) dt \mid w(t_1) \right) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t (\dot{w}(t) \mid \dot{w}(s)) ds dt \end{aligned}$$

d'où le résultat en remarquant que l'intégrale double ci-dessus, représentant l'intégrale de la fonction symétrique $(t, s) \mapsto (\dot{w}(t) \mid \dot{w}(s))$ sur un demi-carré de \mathbb{R}^2 (supposer $t_1 \leq t_2$ pour fixer les idées), vaut la moitié de l'intégrale de cette même fonction sur le carré entier.

PROPOSITION. Soient u et v (primitives respectives de fonctions \dot{u} et \dot{v} appartenant à $\mathcal{L}_H^1 [0, T]$) deux solutions de (3.2). Alors si $t_1 \leq t_2$ on a

$$|u(t_1) - v(t_1)| \geq |u(t_2) - v(t_2)| .$$

Il suffit en effet d'appliquer le lemme ci-dessus à la fonction $w = u - v$, en remarquant que, vu la monotonie de la multiapplication $\partial\psi$, (3.2) implique

$$(\dot{w}(t) \mid w(t)) \leq 0 .$$

Cette proposition entraîne, en particulier que (3.2) possède au plus une solution s'accordant à une donnée initiale $u(0) = a$.

3.c. Régularisation ou pénalisation.

C'est une idée très usuelle, notamment dans certaines techniques numériques, lorsqu'un problème met en jeu la fonction indicatrice ψ d'un ensemble C , d'approcher ce problème en remplaçant ψ par une fonction à valeurs finies, dite fonction de pénalisation, qui prend comme ψ la valeur 0 sur C et des valeurs rapidement croissantes lorsqu'on s'éloigne de C .

Rappelons que $q(t, x)$ désigne, dans ce rapport, le demi-carré de la distance d'un point x au convexe $C(t)$. Alors la fonction $x \mapsto \rho q(t, x)$ est une fonction de pénalisation de $C(t)$, approchant

"d'autant mieux" la fonction indicatrice $x \mapsto \psi(t, x)$ de cet ensemble que la constante $\rho > 0$ est plus grande. De là la présomption qu'en remplaçant ψ par ρq au second membre de (3.2) on obtiendra une équation dont les solutions approchent celles de (3.2) d'autant mieux que ρ est plus grand. Or, la fonction $x \mapsto q(t, x)$ étant convexe et Frechet différentiable, son sous-différentiel au point x se réduit à son gradient, à savoir (cf. par exemple, MOREAU [1])

$$\text{grad } q(t, x) = x - \text{proj}(x, C(t)) .$$

On écrit ainsi une équation d'évolution, dite régularisée de (3.2), concernant une fonction inconnue qu'on notera u_ρ .

$$(3.6) \quad \dot{u}_\rho(t) = \rho \text{ grad } q(t, u_\rho(t)) .$$

Il se trouve que c'est aussi bien l'équation qu'on obtiendrait en appliquant à la multiapplication (monotone maximale) $\partial\psi$ la procédure de régularisation dite de Yosida : on rejoint donc une voie d'approche classique dans l'étude des équations de la forme générale (1.3) . L'interprétation cinématique est ici très claire : alors que, dans le processus de râfle que régit l'équation (3.2), le point mobile u est strictement maintenu dans l'ensemble mobile $C(t)$, la loi d'évolution (3.6) permet au point mobile u_ρ de sortir de cet ensemble ; mais u_ρ possède alors une vitesse proportionnelle à son "vecteur projetant" $\text{proj}(u_\rho, C(t)) - u_\rho$; on conçoit que, du moins si l'évolution de $C(t)$ est assez régulière, le point u_ρ s'éloignera de cet ensemble d'autant moins que le coefficient $\rho > 0$ de cette proportionnalité sera plus grand.

Si la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est continue au sens de la distance de Hausdorff, l'équation différentielle (3.6) possède quelle que soit la donnée initiale $u_\rho(0) = a$, une solution unique fortement différentiable sur $[0, T]$.

En effet, il est connu dans ce cas (cf. par exemple MOREAU [6]) que l'application $t \mapsto \text{proj}(x, C(t))$ est continue, donc aussi l'application $t \mapsto \text{grad } q(t, x)$; d'autre part l'application $x \mapsto \text{grad } q(t, x)$ est contractante; l'équation différentielle (3.6) est donc du type de Cauchy (cf. par exemple BOURBAKI [1]).

Moyennant des hypothèses supplémentaires de régularité de la multiapplication $t \mapsto C(t)$, on établira dans le paragraphe qui vient, que les fonctions $t \mapsto u_\rho(t)$, lorsque ρ tend vers $+\infty$, convergent, uniformément sur $[0, T]$, vers une fonction qui est solution du problème au sens de la définition 3.a.

Dans le contexte de la théorie des systèmes mécaniques élastoplastiques (cf. MOREAU [5]) la mise en oeuvre d'un tel passage à la limite est très naturelle: en effet, au moins dans la situation la plus simple de cette théorie, la fonction d'appui γ de $C(t)$ constitue, à un terme linéaire près, la "fonction de résistance" (ou aussi bien "fonction de dissipation"; cf. MOREAU [3], [4]) de la loi de plasticité. Remplacer ψ par ρq revient à ajouter à la fonction duale γ le terme $\frac{1}{2\rho} |\cdot|^2$, lequel constitue la fonction de résistance d'une loi de viscosité de coefficient $\frac{1}{\rho}$: au système élastoplastique est substitué un système élastoviscoplastique. La démarche précédente revient donc à introduire une viscosité qu'on fait ensuite tendre vers zéro. Cette procédure de "viscosité artificielle" est familière dans l'étude de certaines équations ou inéquations aux dérivées partielles (cf. par exemple LIONS [1]).

3.d. Existence : cas d'un convexe à vitesse dans L^2 .

On suppose dans ce paragraphe que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est absolument continue et que sa vitesse numérique \dot{v} appartient non seulement à $L^1[0, T]$ mais à $L^2[0, T]$.

On va considérer l'équation (3.6) seulement avec $\rho = n$ entier ≥ 0 ; on notera u_n la solution de l'équation différentielle

$$(3.7) \quad -\dot{u}_n = n \operatorname{grad} q(t, u_n)$$

s'accordant à la donnée initiale $u_n(0) = a$.

PROPOSITION. Moyennant les hypothèses ci-dessus et si $a \in C(0)$, la suite des fonctions u_n converge uniformément sur $[0, T]$ vers une fonction u qui vérifie (3.1) et (3.2) ; la "dérivée" \dot{u} est la limite forte des \dot{u}_n dans $L^2_H[0, T]$.

Posons

$$h_n(t) = |\operatorname{grad} q(t, u_n(t))| = \sqrt{2q(t, u_n(t))} ,$$

fonction numérique continue sur $[0, T]$. En vertu du paragraphe 2.c , la fonction $g_n = \frac{1}{2} (h_n)^2$ est absolument continue et sa dérivée \dot{g}_n vérifie, pour presque tout t , l'inégalité

$$|\dot{g}_n(t) - (\dot{u}_n(t) | \operatorname{grad} q(t, u_n(t))|) \leq h_n(t) \dot{v}(t) ,$$

où $\dot{v} \in \mathcal{L}^2_H[0, T]$ est la vitesse numérique du convexe.

En invoquant (3.7), cela donne

$$(3.8) \quad |\dot{g}_n(t) + n(h_n(t))^2| \leq h_n(t) \dot{v}(t) .$$

Comme $a \in C(0)$, on a $g_n(0) = 0$ et il en résulte, par intégration sur $[0, T]$,

$$g_n(T) + n \int_0^T (h_n(t))^2 dt \leq \int_0^T h_n(t) \dot{v}(t) dt$$

Notons indifféremment $\|\cdot\|$ la norme dans $L^2[0, T]$

ou dans $L^2_H[0, T]$; l'inégalité ci-dessus implique, puisque $g_n(T) \geq 0$,

$$n \|\dot{h}_n\|^2 \leq \|\dot{h}_n\| \|\dot{v}\|$$

d'où

$$(3.9) \quad \|\dot{h}_n\| \leq \frac{1}{n} \|\dot{v}\|$$

et

$$(3.10) \quad \|\dot{u}_n\| \leq \|\dot{v}\|$$

A partir de cette majoration des \dot{u}_n on peut atteindre de bien des manières la convergence des u_n vers une solution de notre problème.

Soient m et n deux entiers > 0 :

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt} |u_m - u_n|^2 = 2 (u_m - u_n | \dot{u}_m - \dot{u}_n) \\ = - 2 (u_m - u_n | m \operatorname{grad} q(t, u_m) - n \operatorname{grad} q(t, u_n)).$$

En notant abrégativement

$$\operatorname{grad} q(t, u_m(t)) = \nabla_{q_m} \quad (\text{resp. } \nabla_{q_n})$$

une inégalité usuelle dans le maniement des régularisées Yosida⁽¹⁾

s'écrit

$$(u_m - u_n | m \nabla_{q_m} - n \nabla_{q_n}) \geq (\nabla_{q_m} - \nabla_{q_n} | m \nabla_{q_m} - n \nabla_{q_n}).$$

En intégrant (3.11) sur $[0, T]$ on obtient donc

$$(3.12) \quad \frac{1}{2} |u_m(T) - u_n(T)|^2 \leq - \int_0^T (\nabla_{q_m} - \nabla_{q_n} | m \nabla_{q_m} - n \nabla_{q_n}) dt$$

(1) Pour la commodité du lecteur reproduisons le calcul dans le contexte présent : posant $\operatorname{proj}(u_m(t), C(t)) = u'_m$ (resp. u'_n) on a $\nabla_{q_m} = u_m - u'_m$ et $m \nabla_{q_m} \in \partial\psi(t, u'_m)$. La monotonie de $\partial\psi$ donne alors

$$(m \nabla_{q_m} - n \nabla_{q_n} | u'_m - u'_n) \geq 0$$

d'où l'inégalité.

Le premier membre étant essentiellement ≥ 0 , cette inégalité implique, si on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire dans l'espace hilbertien $L_H^2[0, T]$,

$$\langle \frac{1}{m} \dot{u}_m - \frac{1}{n} \dot{u}_n | \dot{u}_m - \dot{u}_n \rangle \leq 0 .$$

D'après un lemme de CRANDALL, PAZY [1], cette propriété entraîne d'abord que la suite numérique $\|\dot{u}_n\|$ est croissante, donc convergente en vertu de la majoration (3.10), puis que la suite des \dot{u}_n est fortement convergente dans cet espace hilbertien.

Notons $\dot{u} \in \mathcal{D}_H^2[0, T]$ un représentant de la limite de cette suite et posons

$$u(t) = a + \int_0^t \dot{u}(s) ds .$$

L'inégalité

$$|u(t) - u_n(t)| = \left| \int_0^t (\dot{u}(s) - \dot{u}_n(s)) ds \right| \leq \sqrt{t} \|\dot{u} - \dot{u}_n\|$$

montre que la fonction u est limite des u_n , uniformément sur $[0, T]$.

Il reste à prouver que u et \dot{u} vérifient (3.2).

Posons

$$u'_n(t) = \text{proj} (u_n(t), C(t)) .$$

Alors

$$u_n(t) - u'_n(t) = \text{grad } q(t, u_n(t)) = -\frac{1}{n} \dot{u}_n(t) ,$$

de sorte que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(3.13) \quad -\dot{u}_n(t) \in \partial\psi(t, u'_n(t))$$

et que, vu (3.10), u'_n converge fortement vers u dans $L_H^2[0, T]$.

Il existe donc une partie infinie \mathbb{N}' de \mathbb{N} telle que, ν décrivant \mathbb{N}' , les $u'_\nu(t)$ convergent dans $H(\text{fort})$ vers $u(t)$ pour presque tout t et que, pour ces mêmes valeurs de t , les $\dot{u}_\nu(t)$ convergent dans $H(\text{fort})$ vers $\dot{u}(t)$. Comme le graphe de la multiapplication

$x \mapsto \partial\psi(t, x)$ est fermé dans $H \times H$ (fort), (3.13) montre que (3.2) est vérifié pour les t en question ; on achève par l'argument final du paragraphe 3.a.

Remarque. Soit $p \in [1, +\infty[$; (3.8) donne, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(h_n)^{p-1} \dot{h}_n + n (h_n)^p \leq (h_n)^{p-1} \dot{v} ,$$

d'où, par intégration sur $[0, T]$, comme précédemment,

$$n \int_0^T (h_n(t))^p dt \leq \int_0^T (h_n(t))^{p-1} \dot{v}(t) dt .$$

Si $\dot{v} \in \mathcal{L}_H^p[0, T]$, l'inégalité de Hölder fournit alors la même écriture qu'en (3.9), $|\cdot|$ représentant cette fois la norme dans L_H^p ou dans L^p . Faisant enfin tendre p vers $+\infty$, on obtient la même conclusion pour L^∞ , autrement dit, s'il existe M tel que, pour presque tout t ,

$$|\dot{v}(t)| \leq M ,$$

alors $|\dot{u}_n(t)| \leq M$ pour tout t , donc, à la limite $|\dot{u}(t)| \leq M$ pour presque tout t ; il en résulte que la fonction u est lipschitzienne.

C'est ce qu'on pourrait obtenir aussi en tirant de (3.3)

l'inégalité

$$\dot{h}_n + n h_n \leq \dot{v} \quad \text{à laquelle}$$

on appliquerait les mêmes techniques de comparaison qu'à la section 4 ci-après.

3.e. Existence : cas d'un convexe absolument continu.

PROPOSITION. On suppose que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est absolument continue sur $[0, T]$, de vitesse numérique \dot{v} , et que $a \in C(0)$.

Alors le problème de râfle possède une solution, au sens de la définition

3.a, et on a, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$(3.14) \quad |\dot{u}(t)| \leq \dot{v}(t) .$$

En effet, d'après l'Appendice, la multiapplication C se factorise sous la forme $C = \Gamma \circ v$. Autrement dit, la fonction variation v envoyant $[0, T]$ sur un intervalle $[0, \Theta]$, il existe une multiapplication $\theta \mapsto \Gamma(\theta)$ de $[0, \Theta]$ dans H , telle que $C(t) = \Gamma(v(t))$. Cette multiapplication Γ est absolument continue ; sa vitesse numérique est constante égale à 1, donc dans $\mathcal{L}^2[0, \Theta]$. La proposition 3.d montre alors l'existence d'une solution du problème de râfle correspondant, c'est à dire l'existence d'une fonction $\zeta \in \mathcal{L}_H^2[0, \Theta]$ telle que si on pose

$$\zeta(\theta) = a + \int_0^\theta \dot{\zeta}(\tau) d\tau$$

on a pour tout $\theta \in [0, \Theta]$,

$$(3.15) \quad \dot{\zeta}(\theta) \in \partial \Psi(\theta, \zeta(\theta))$$

($\Psi(\theta, \cdot)$ représente la fonction indicatrice de l'ensemble $\Gamma(\theta)$).

En outre la remarque finale du paragraphe 3.d montre qu'on peut définir $\dot{\zeta}$ de manière que

$$(3.16) \quad \forall \theta \in [0, \Theta] : |\dot{\zeta}(\theta)| \leq 1 .$$

Comme la fonction v est absolument continue croissante, on voit que la fonction $t \mapsto \dot{\zeta}(v(t))$ appartient à $\mathcal{L}_H^\infty[0, T]$, que la fonction $t \mapsto \dot{v}(t)$ appartient à $\mathcal{L}^1[0, T]$, donc que la fonction $t \mapsto \dot{v}(t) \dot{\zeta}(v(t))$ appartient à $\mathcal{L}_H^1[0, T]$. Il résulte alors de la règle de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue (cf. BOURBAKI [2] ; en fait il s'agit ici d'un cas plus élémentaire car la fonction v est croissante) que

$$a + \int_0^t \dot{v}(t) \dot{\zeta}(v(t)) dt = a + \int_0^{v(t)} \dot{\zeta}(\tau) d\tau = \zeta(v(t)) .$$

Si donc on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= \zeta(v(t)) \\ \dot{u}(t) &= \dot{v}(t) \dot{\zeta}(v(t)) \end{aligned}$$

on aura bien (3.1). Comme, pour tout $x \in H$,

$$\partial \Psi(v(t), x) = \partial \phi(t, x)$$

est un cône (convexe), et que $\dot{v}(t) \geq 0$, (3.15) entraîne (3.2).

Enfin (3.14) découle immédiatement de (3.16).

Remarque.

Si on suppose seulement que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est à variation bornée continue, on a toujours la factorisation $C = \Gamma \circ v$ avec Γ absolument continue, de vitesse unité. La technique de changement de variable ci-dessus incite à poser :

DEFINITION. Pour C à variation bornée continue on dira que la fonction $u = \zeta \circ v$ est solution généralisée du problème de râteau.

Cette solution généralisée est à variation bornée continue et on tire de (3.16) que, quels que soient $t_1 \leq t_2$ dans $[0, T]$,

$$(3.17) \quad \text{var}(u ; t_1, t_2) \leq \text{var}(C ; t_1, t_2)$$

Noter aussi que cette notion de solution généralisée est "conservée" par changement de variable croissant, c'est à dire que si π est une application croissante continue d'un intervalle $[0, T']$ sur $[0, T]$ et si on pose $C' = C \circ \pi$ (multiapplication de $[0, T']$ dans H) le problème de râteau correspondant à C' et à la donnée initiale

$u'(0) = a$ admet pour solution généralisée $u' = u \circ \pi$.

3.f. Cas d'existence locale

L'hypothèse d'une multiapplication C absolument continue, ou même simplement à variation bornée continue, peut paraître très restrictive si C n'est pas borné : on a vu en effet qu'elle exige que le cône asymptotique de C soit indépendant de t .

On est donc conduit à construire une version locale de la proposition 3.e :

PROPOSITION. On suppose qu'il existe une boule fermée D , de centre $a \in C(0)$, de rayon $\rho > 0$ telle que la multiapplication

$t \mapsto C_D(t) = D \cap C(t)$ soit absolument continue sur un intervalle $[0, T_1]$.

Alors le problème de râfle correspondant à C possède une solution sur un intervalle non nul $[0, T_2]$; pour la donnée initiale a .

En effet notons ici v la fonction variation de la multiapplication C_D et soit u la solution sur $[0, T_1]$, pour la donnée initiale a , du problème de râfle par C_D . On tire de (3.14) que, pour tout $t \in [0, T_1]$

$$|u(t) - a| \leq \text{var}(u; 0, t) \leq v(t).$$

Comme la fonction v est continue, nulle à l'origine, il existe $T_2 \in]0, T_1[$ tel que

$$t \in [0, T_2] \implies |u(t) - a| < \rho.$$

Or, en notant

$$\psi_1(t, \cdot) = \psi_D(\cdot) + \psi(t, \cdot)$$

la fonction indicatrice de $D \cap C(t)$, on a, pour tout x intérieur à la boule D , et tout $t \in [0, T_2]$,

$$\partial\psi_1(t, x) = \partial\psi(t, x) .$$

En effet, $u(t)$ est un point où la fonction $\psi(t, \cdot)$ est finie, tandis que la fonction $\psi_D(\cdot)$ s'y trouve finie et continue ; de là, pour ces deux fonctions, l'additivité des sous-différentiels, (cf. MOREAU [2]) avec en outre $\partial\psi_D(x) = \{0\}$.

Donc u est solution du problème de râteau par C sur $[0, T_2]$.

Naturellement, si une hypothèse analogue est vraie sur un intervalle consécutif, avec une boule de centre $u(T_2)$, cette solution se prolongera au delà de T_2 .

4 - ALGORITHME DE RATRAPAGE

4.a. Définition de l'algorithme

On suppose C à variation bornée continue sur $[0, T]$.

Soit (t_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, une suite finie telle que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T .$$

Nous appelons algorithme de rattrapage associé à cette subdivision de l'intervalle $[0, T]$ la construction de la fonction en escalier $t \mapsto x(t)$ définie de la manière suivante :

$$x(t) = x(t_{i+1}) \text{ pour } t_1 < t \leq t_{i+1}$$

$$x(0) = a \in C(0)$$

$$x(t_{i+1}) = \text{proj} (x(t_i), C(t_i)) .$$

L'objet de cette section est de montrer que, lorsqu'on raffine la subdivision, les fonctions en escalier ainsi obtenues convergent

uniformément sur $[0, T]$ vers la solution du problème de râteau ;
de façon précise :

PROPOSITION. Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que la
majoration

$$(4.1) \quad \sup_i (t_i - t_{i-1}) < \eta$$

(resp. il existe $\eta' > 0$ tel que la majoration

$$(4.2) \quad \sup_i \text{var} (C; t_{i-1}, t_i) < \eta' \quad)$$

assure

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t) - x(t)| < \epsilon \quad ,$$

u étant la solution du problème de râteau (au sens généralisé du para-
graphe 3.e, si C n'est pas supposé absolument continu).

Si on pose $\theta_i = v(t_i)$, (4.2) s'écrit

$$\sup_i (\theta_i - \theta_{i-1}) < \eta' \quad .$$

La continuité uniforme de la fonction v sur $[0, T]$ fait que l'asser-
tion concernant η résulte de l'assertion concernant η' ; or prouver
cette dernière revient, en utilisant le même "changement de variable"
qu'au paragraphe 3.d, à établir la proposition dans le cas particu-
lier d'un convexe absolument continu $\theta \mapsto \Gamma(\theta)$, de vitesse numérique
constante égale à 1.

C'est donc dans ce cas particulier que nous ferons la démon-
stration, en notant à nouveau t la variable.

4.b. Régularisation modulée

Soit $t \mapsto \rho(t) \geq 0$ une fonction continue par morceaux sur
 $[0, T]$ (i.e. : cet intervalle est réunion finie de sous-intervalles

sur chacun desquels ρ est continue et pourvue d'une limite finie à chaque extrémité).

Soit u_ρ la solution de l'équation différentielle

$$(4.3) \quad - \frac{du_\rho}{dt} = \rho(t) \operatorname{grad} q(t, u_\rho)$$

pour la donnée initiale

$$u_\rho(0) = a \quad .$$

L'existence de cette solution, continue sur $[0, T]$, fortement dérivable sur chaque intervalle de continuité de ρ , résulte, comme au paragraphe 3.c du théorème de Cauchy puisque le second membre de (4.3) est continu par morceaux relativement à t , lipschitzien relativement à u_ρ .

L'objet de ce paragraphe est de construire des inégalités impliquant que certaines familles de fonctions ρ , aussi bien que les constantes considérées à la section 3, fournissent des u_ρ convergeant uniformément vers la solution du problème de râfle, du moins si on suppose \dot{v} majoré presque partout par une constante M .

Posons

$$h_\rho(t) = \left| \operatorname{grad} q(t, u_\rho(t)) \right| = \sqrt{2q(t, u_\rho(t))} \quad .$$

D'après le paragraphe 2.c, la fonction h_ρ est absolument continue et, pour presque tout t ,

$$h_\rho \dot{h}_\rho - \left(\frac{du_\rho}{dt} \left| \operatorname{grad} q(t, u_\rho) \right| \right) \leq M h_\rho$$

d'où, vu (4.3), pour presque tout t ,

$$(4.4) \quad h_\rho \dot{h}_\rho + \rho h_\rho^2 \leq M h_\rho \quad .$$

Lorsque $h_\rho(t) \neq 0$, on en tire

$$(4.5) \quad \dot{h}_\rho + \rho h_\rho \leq M ;$$

mais cela est vrai aussi pour presque tout t tel que $h_\rho(t) = 0$: en effet, pour presque tout t , $\dot{h}_\rho(t)$ est dérivée de h_ρ au sens classique et 0 est la valeur minimale de cette fonction.

Posons

$$R(t) = \int_0^t \rho(s) ds$$

$$k(t) = h_\rho(t) \exp R(t)$$

la fonction k est absolument continue, primitive de

$$\dot{k} = (\dot{h}_\rho + \rho h_\rho) \exp R$$

de sorte que (4.5) implique, pour presque tout t ,

$$\dot{k} - M \exp R \leq 0 .$$

Il en résulte que la fonction

$$t \mapsto k(t) - M \int_0^t \exp R(s) ds$$

est décroissante, nulle pour $t = 0$, donc finalement pour tout $t \in [0, T]$,

$$(4.6) \quad h_\rho(t) \leq M \int_0^t \exp [R(s) - R(t)] ds .$$

L'intégrale écrite au second membre est d'ailleurs la solution $H(t)$ de

$$(4.7) \quad \frac{dH}{dt} + \rho(t) H = 1 , \quad H(0) = 0 .$$

On posera dans la suite

$$J(\rho) = \sup \{ H(t) : t \in [0, T] \} ,$$

de sorte que (4.6) entraîne

$$(4.8) \quad \forall t \in [0, T] : h_\rho(t) \leq M J(\rho) .$$

Soit σ une autre fonction satisfaisant aux mêmes hypothèses que ρ ; soient u_σ, h_σ les fonctions correspondantes. Le même calcul qu'au paragraphe 3.d fournit l'inégalité semblable à (3.12) :

$$\frac{1}{2} |u_\rho(t) - u_\sigma(t)|^2 \leq \int_0^t - \left(\text{grad } q(s, u_\rho(s)) - \text{grad } q(s, u_\sigma(s)) \right) \cdot \left(\rho(s) \text{grad } q(s, u_\rho(s)) - \sigma(s) \text{grad } q(s, u_\sigma(s)) \right) ds$$

La quantité sous le signe \int est majorée par

$$(4.9) \quad (h_\rho + h_\sigma) (\rho h_\rho + \sigma h_\sigma) = \rho h_\rho^2 + \sigma h_\sigma^2 + (\rho + \sigma) h_\rho h_\sigma$$

Or (4.4) et (4.6) fournissent

$$h_\rho \dot{h}_\rho + \rho h_\rho^2 \leq M^2 J(\rho)$$

d'où, par intégration sur $[0, t]$,

$$\frac{1}{2} (h_\rho(t))^2 + \int_0^t \rho(s) h_\rho^2(s) ds \leq tM^2 J(\rho)$$

et une inégalité analogue avec h_σ et $J(\sigma)$.

De même (4.5) et (4.6) conduisent à

$$h_\sigma \dot{h}_\rho + \rho h_\sigma h_\rho \leq M^2 J(\sigma)$$

$$h_\rho \dot{h}_\sigma + \sigma h_\rho h_\sigma \leq M^2 J(\rho) \quad ,$$

d'où, en ajoutant et intégrant sur $[0, t]$,

$$h_\rho(t) h_\sigma(t) + \int_0^t (\rho(s) + \sigma(s)) h_\rho(s) h_\sigma(s) ds \leq t (J(\rho) + J(\sigma)) \quad .$$

De la sorte, l'intégrale sur $[0, t]$ de la fonction (4.9) est majorée par $2t M^2 (J(\rho) + J(\sigma))$ et finalement

$$|u_\rho(t) - u_\sigma(t)|^2 \leq 4t M^2 (J(\rho) + J(\sigma))$$

En particulier pour $\sigma = n$ constant, on trouve

$$J(n) = \frac{1}{n} (1 - e^{-nT}) \leq \frac{1}{n}$$

Si on fait tendre n vers l'infini, de sorte que u_σ tend vers la solution u du problème de râfle, on obtient donc :

$$(4.10) \quad |u_\rho(t) - u(t)|^2 \leq 4t M^2 J(\rho) .$$

4.c. Estimation de J pour une fonction créneau .

Soit

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

avec, pour tout $i < n$,

$$t_{i+1} - t_i = p_i \leq p .$$

Soit m_i le milieu de l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Définissons la fonction $t \mapsto \rho(t)$ comme suit sur chacun de ces intervalles (A constante indépendante de i) :

$$\rho(t) = \begin{cases} A & \text{si } t_i < t < m_i \\ 0 & \text{si } m_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases} .$$

PROPOSITION. Si $A \geq 4$, alors

$$(4.11) \quad J(\rho) \leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p}{2} .$$

En effet, soit H la fonction définie par (4.7) avec le choix ci-dessus de la fonction ρ ; posons chaque t

$$K(t) = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{A}}, H(t) \right\} .$$

La fonction K est continue, presque partout dérivable, et pour tout t tel que la dérivée K' existe, il résulte de (4.7) que, quand $t \in]t_i, m_i[$ on a

$$(4.12) \quad \begin{aligned} K'(t) &\leq -1 & \text{si} & \quad K(t) > \frac{1}{\sqrt{A}} \\ K'(t) &= 0 & \text{si} & \quad K(t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

et, quand $t \in [m_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} K'(t) &= 1 & \text{si} & \quad K(t) > \frac{1}{\sqrt{A}} \\ K'(t) &= 0 & \text{si} & \quad K(t) = \frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

(vu que $1/\sqrt{A}$ est la valeur minimale de K). On conclut de là que la fonction K est (non strictement) décroissante sur $[t_i, m_i]$, croissante sur $[m_i, t_{i+1}]$. Si $K(m_i) = 1/\sqrt{A}$ il vient évidemment

$$(4.13) \quad K(t_{i+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p_i}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p}{2}$$

Si $K(m_i) > 1/\sqrt{A}$ l'éventualité (4.12) a lieu sur tout l'intervalle $]t_i, m_i[$, d'où

$$K(m_i) \leq K(t_i) - \frac{p_i}{2}$$

et par suite

$$K(t_{i+1}) = K(m_i) + \frac{p_i}{2} \leq K(t_i) .$$

Dans tous les cas on a donc l'implication

$$K(t_i) \leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p}{2} \implies K(t_{i+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p}{2} .$$

Comme $K(t_0) = 1/\sqrt{A}$ l'inégalité ci-dessus a lieu pour tout i et (4.11) en découle, vu que, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ le maximum de K est atteint à une extrémité.

4.d. Convergence de l'algorithme

Conformément à la remarque finale du paragraphe 4.a, nous supposons que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est absolument continue, de vitesse numérique presque partout égale à 1.

1^{ère} étape. Avec les mêmes notations que ci-dessus on construit de la manière suivante une application continue croissante π de $[0, T]$ sur lui-même :

$$\pi(t) = \begin{cases} t_i & \text{si } t_i \leq t \leq m_i \\ 2t - t_{i+1} & \text{si } m_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

et on pose

$$C(\pi(t)) = C'(t) .$$

Autrement dit, sur chaque intervalle de la forme $[t_i, m_i]$ le convexe C' reste fixe, égal à $C(t_i)$; sur l'intervalle consécutif $[m_i, t_{i+1}]$, son évolution est semblable à celle que présente C sur $[t_i, t_{i+1}]$ l'échelle des temps étant simplement ajustée pour que C' rattrape C à la fin de l'intervalle.

L'application π est absolument continue, de dérivée égale à 0 ou 2 selon l'intervalle. Donc le convexe mobile C' est absolument continu, de vitesse $\dot{\pi}$, presque partout majorée par $M = 2$.

Soient respectivement u et u' les solutions du problème de rafle pour les convexes C et C' et la donnée initiale

$$u(0) = u'(0) = a .$$

Il résulte de la remarque finale du paragraphe 3.e que

$$u'(t) = u(\pi(t))$$

Pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$t - \pi(t) \leq \frac{p}{2} .$$

Comme la vitesse $|\dot{u}|$ de u est presque partout moindre que 1 en vertu de (3.14), l'expression ci-dessus de u' donne, pour tout $t \in [0, T]$,

$$(4.14) \quad |u(t) - u'(t)| \leq \frac{p}{2} .$$

2^eme étape. Régularisons le problème de râfle associ e au convexe C' selon la technique de 4.b, avec la fonction ρ définie en 4.c .

On notera donc u'_{ρ} la solution, pour la donnée initiale $u'_{\rho}(0) = a$, de l'équation différentielle

$$(4.15) \quad - \frac{du'_{\rho}}{dt} = \rho(t) \text{ grad } q'(t, u'_{\rho})$$

où $q'(t, x)$ représente la moitié de la distance d'un $x \in H$ au convexe $C'(t)$.

L'intégration de (4.15) peut être explicit e : sur chaque intervalle de la forme $[m_i, t_{i+1}]$, le second membre est nul, d'où

$$(4.16) \quad u'_{\rho}(t) = u'_{\rho}(m_i) \quad \text{pour} \quad m_i \leq t \leq t_{i+1} .$$

Sur chaque intervalle de la forme $]t_i, m_i[$, ρ prend la valeur constante A et la fonction

$$x \mapsto q^*(t, x) = q(t_i, x)$$

est indépendante de t , avec

$$\text{grad } q^*(t, x) = x - \text{proj}(x, C(t_i)) .$$

On vérifie que la fonction

$$(4.17) \quad u'_{\rho}(t) = u'_{\rho}(t_i) + [y_i - u'_{\rho}(t_i)] \cdot [1 - \exp A(t_i - t)] .$$

avec

$$(4.18) \quad y_i = \text{proj} (u'_{\rho}(t_i), C(t_i))$$

est intégrale de (4.15) sur cet intervalle, puisque cet $u'_{\rho}(t)$ variant sur une "normale extérieure" du convexe $C(t_i)$, on a

$$\text{proj} (u'_{\rho}(t), C(t_i)) = y_i .$$

Telle est donc l'expression de u'_{ρ} sur l'intervalle en cause, ainsi qu'aux extrémités t_i et m_i , par continuité.

En supposant $A \geq 4$, on invoque (4.10) et (4.11) pour obtenir, quel que soit $t \in [0, T]$,

$$(4.19) \quad |u'_{\rho}(t) - u'(t)|^2 \leq 16 t \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{p}{2} \right) .$$

Noter que (4.16) et (4.17) donnent, en particulier

$$(4.20) \quad u'_{\rho}(t_{i+1}) = u'_{\rho}(m_i) = u'_{\rho}(t_i) + [y_i - u'_{\rho}(t_i)] \cdot \left[1 - \exp \left(- \frac{Ap_i}{2} \right) \right] .$$

3^{ème} étape. On fait tendre A vers $+\infty$. Comme tous les p_i sont > 0 , (4.20) montre que, pour chaque $i < n$, la différence $u'_{\rho}(t_{i+1}) - y_i$ tend vers zéro dans H fort. Comme l'application $\text{proj} (., C(t_i))$ qui apparait dans la définition (4.18) de y_i est continue, cela montre de proche en proche que, pour chaque $i < n$, la valeur $u'_{\rho}(t_{i+1})$ tend vers $x(t_{i+1})$ tel qu'on l'a défini en 4.a. Ensuite (4.17) montre que pour chaque t appartenant à un intervalle de la forme $]t_i, m_i]$, $u'_{\rho}(t)$ tend vers $x(t)$. Il en est enfin de même sur chaque intervalle $[m_i, t_{i+1}]$ d'après (4.16).

En vertu de cette convergence simple, (4.19) donne à la limite pour tout $t \in [0, T]$

$$|x(t) - u'(t)| \leq \sqrt{8 T p}$$

Le rapprochement avec (4.14) établit la proposition 4.a.

Remarque.

C'est pour abrégé l'écriture que les démonstrations qui précèdent ont été basées sur la considération, dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, d'un point m_i qui est le milieu de l'intervalle. On pourrait plus généralement choisir $\lambda \in]0, 1[$ (indépendant de i), puis prendre $m_i = (1 - \lambda) t_i + \lambda t_{i+1}$. L'avantage est que, une fois les passages à la limite faits et une majoration de $|x(t) - u(t)|$ obtenue, on peut faire tendre λ vers zéro ce qui donne une estimation meilleure de l'erreur, à savoir

$$|x(t) - u(t)| \leq 2 \sqrt{tp}$$

Notons enfin que la convergence de l'algorithme de rattrapage peut être établie par d'autres méthodes, sans s'appuyer sur l'existence de la solution u .

A P P E N D I C E

FONCTIONS A VARIATION BORNEE ET FONCTIONS
ABSOLUMENT CONTINUES A VALEURS DANS UN
ESPACE METRIQUE

A. a. Fonctions à variation bornée

La définition classique des fonctions à variation bornée peut se formuler d'une façon générale pour une fonction f définie sur un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace E pourvu d'une métrique (au sens large : la distance $\delta(a, b)$ de deux éléments a et b de E n'est pas nécessairement supposée finie).

Supposons f partout définie sur un intervalle compact $[s, t]$; à chaque suite finie monotone, soit $S : \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$ d'éléments de cet intervalle associons

$$(A.1) \quad V(S) = \sum_{i=1}^n \delta(f(\tau_i), f(\tau_{i-1})) \geq 0.$$

Le sup des $V(S)$ pour toutes ces suites s'appelle variation de f sur l'intervalle $[s, t]$ et sera noté $\text{var}(f; s, t)$ (à valeurs dans $[0, +\infty[)$).

Si $s \leq t \leq u$ on trouve immédiatement

$$(A.2) \quad \text{var}(f; s, u) = \text{var}(f; s, t) + \text{var}(f; t, u)$$

Dans tout ce qui suit, f est supposée définie sur l'intervalle compact $[0, T]$; avec

$$\text{var}(f; 0, T) = \textcircled{M} < +\infty .$$

On dit qu'elle est à variation bornée sur cet intervalle. Visiblement alors, quels que soient $t_1 \leq t_2$ dans $[0, T]$ on a

$$\delta(f(t_1), f(t_2)) \leq \text{var}(f; t_1, t_2) \leq \textcircled{M}$$

ce qui ramène au cas où E est un espace métrique proprement dit (distance toujours finies).

A chaque $t \in [0, T]$ associons

$$\theta = \text{var}(f; 0, t) .$$

Vu (A.2), l'application $v : t \mapsto \theta$ est croissante (peut être non strictement) de $[0, T]$ sur $\text{range } v \subset [0, \textcircled{M}]$.

Elle n'est pas injective en général ; on a cependant une factorisation $f = \varphi \circ v$:

$$\begin{array}{ccc} t \in [0, T] & \xrightarrow{f} & x \in E \\ & \searrow v & \nearrow \varphi \\ & & \theta \in \text{range } v \end{array}$$

En effet, si $t_1 < t_2$ sont tels que $v(t_1) = v(t_2)$, (A.2) montre que $\text{var}(f; t_1, t_2) = 0$ donc $f(t_1) = f(t_2)$.

L'application f est continue de $[0, T]$ dans E si et seulement si l'application v est continue de $[0, T]$ dans \mathbb{R} (et en ce cas, bien sûr, $\text{range } v = [0, \textcircled{M}]$).

Il est immédiat en effet que la continuité de v entraîne celle de f ; pour établir l'implication inverse, le plus explicite est de démontrer d'abord, dans ce cadre général, le théorème de Jordan sur la rectification des courbes, qui peut se formuler comme suit : Si f (à variation bornée) est continue de $[0, T]$ dans E , à tout $\epsilon > 0$ on peut associer $\eta > 0$ tel que, si $t \in [0, T]$, et si S est une suite monotone de l'intervalle $[0, t]$,

$$S : 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t ,$$

on a l'implication

$$\sup_i (t_{i+1} - t_i) < \eta \implies v(t) - \epsilon < V(S) < v(t)$$

A. b. Fonction absolument continue.

C'est aussi une définition classique que nous formulons dans le cadre général actuel : On dit que $f : [0, T] \rightarrow E$ est absolument continue si, à tout $\epsilon > 0$ on peut associer $\eta > 0$ tel que, pour toute famille finie de paires (s_i, t_i) d'éléments de $[0, T]$ on ait l'implication

$$(A.3) \quad \sum_i |t_i - s_i| < \eta \implies \sum_i \delta(f(t_i), f(s_i)) < \epsilon$$

(f est alors continue et à variation bornée sur $[0, T]$).

Il faut et suffit pour cela que la fonction v définie au paragraphe précédent soit une fonction numérique absolument continue.

La condition est évidemment suffisante en vertu de l'inégalité

$$\delta(f(t_i), f(s_i)) \leq |v(t_i) - v(s_i)|.$$

Réciproquement, supposons f absolument continue sur $[0, T]$; dans chacun des intervalles $[s_i, t_i]$ (on fait ici $s_i \leq t_i$ pour fixer les idées) qui interviennent en (A.3), on peut choisir une suite finie monotone S_i de manière que

$$(A.4) \quad V(S_i) + \epsilon_i \geq \text{var}(f; s_i, t_i) = v(t_i) - v(s_i)$$

(les $\epsilon_i > 0$ choisis, arbitrairement petits). Comme la somme des longueurs des intervalles déterminés par la suite S_i est $\leq |t_i - s_i|$, la définition de la continuité absolue de f donne l'implication

$$\sum_i |t_i - s_i| < \eta \implies \sum_i V(S_i) < \epsilon,$$

d'où, vu (A.4),

$$\sum_i |t_i - s_i| < \eta \implies \sum_i |v(t_i) - v(s_i)| - \sum_i \epsilon_i < \epsilon$$

Comme les ϵ_i peuvent être choisis arbitrairement petits, cela établit la continuité absolue de v sur $[0, T]$.

En invoquant un caractère classique des fonctions numériques absolument continues il vient alors :

La fonction $f : [0, T] \rightarrow E$ est absolument continue si et seulement si il existe $\dot{v} \in \mathcal{L}^1[0, T]$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$

$$v(t) = \int_0^t \dot{v}(s) ds.$$

On peut dire que la fonction \dot{v} ou, si on préfère, la classe de cette fonction dans l'espace séparé $L^1[0, T]$, constitue la dérivée numérique de f ou bien aussi, lorsque $[0, T]$ est interprété comme un intervalle de temps, la vitesse numérique du point mobile f .

Pour en revenir à la factorisation $f = \varphi \circ v$, dès que f est continue à variation bornée, on a, si $\theta = v(t)$

$$\text{var}(f; 0, t) = \text{var}(\varphi; 0, \theta) = \theta.$$

ψ est absolument continue sur $[0, \infty[$, de dérivée numérique presque partout égale à 1.

(Manuscrit reçu le 18 Novembre 1971)

R E F E R E N C E S

P. BENILAN, H. BREZIS

- [1] Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, à paraître dans Ann. Inst. Fourier.

N. BOURBAKI [1] Fonctions d'une variable réelle

(chap IV, §1, n° 5), Hermann, Paris.

- [2] Intégration (chap V, §6, n° 5), Hermann, Paris.

H. BREZIS [1] Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non

linéaires, à paraître dans Israel J. of Math.

F.E. BROWDER [1] Nonlinear equations of evolution,

Ann. of Math, 80 (1964), 485-523.

- [2] Nonlinear initial value problems,

Annals of Math., 82 (1965), 51-87.

M. CRANDALL, A. PAZY

- [1] Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets,

J. Funct. Anal., 3 (1969), 378-418.

T. KATO [1] Nonlinear semigroups and evolution equations,

J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 508-520.

- [2] Accretive operators and nonlinear evolution equations

in Banach spaces, in: Nonlinear Functional Analysis,

Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. , vol. 18 (1970) 138-161.

N. KIKUCHI, Y. TOMITA

- [1] On the absolute continuity of multi-functions and ori-

entor fields, à paraître dans Funkcialaj Ekvaciaj.

- Y. KOMURA [1] Nonlinear semi-groups in Hilbert space,
J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-507.
- J.L. LIONS [1] Inéquations variationnelles d'évolution,
Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970.
[2] Sur certaines équations paraboliques non linéaires,
Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 155-175.
- J.J. MOREAU [1] Proximité et dualité dans un espace hilbertien,
Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 273-299.
[2] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations
aux dérivées partielles, Collège de France, Paris
1967 (multigraphié 108 p.).
[3] Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité,
C.R. Acad. Sci. Ser. A, 271 (1970), 608-611.
[4] Fonctions de résistance et fonctions de dissipation,
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1971,
exposé n° 6 (31 p.).
[5] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique,
C.R. Acad. Sci. Ser. A, 273 (1971), 118-121.
[6] Distance à un convexe mobile d'un espace hilbertien.
Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1971,
Exposé n° 13 (10 p.).
- J. WATANABE [1] On nonlinear semigroups generated by cyclically dissipative
sets, J. Fac. Sci. Tokyo 18 (1971), 127-137.