



HAL
open science

Fonctions de résistance et fonctions de dissipation

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Fonctions de résistance et fonctions de dissipation. 1971. hal-02309448

HAL Id: hal-02309448

<https://hal.science/hal-02309448>

Submitted on 9 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTIONS DE RESISTANCE ET FONCTIONS DE DISSIPATION

par

J. J. MOREAU

1 - INTRODUCTION

1-a Vitesses et forces .

Soit \mathcal{C} un système matériel, de liberté finie ou non. Il est constant en mécanique d'associer à chaque configuration éventuelle d'un tel système, à chaque instant, un espace vectoriel réel \mathcal{V} (de dimension infinie si la liberté de \mathcal{C} est infinie) dont les éléments constituent, en un sens général, les vitesses éventuelles du système s'il vient à passer par la configuration en question. On peut dire, si l'on veut, que \mathcal{V} est espace vectoriel tangent au point considéré de la variété des configurations.

Par une forme bilinéaire, qu'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$, l'espace \mathcal{V} est mis en dualité avec un autre espace vectoriel réel \mathcal{F} dont les éléments constituent, en un sens général, des forces éventuellement appliquées au système : $\langle v, f \rangle$ représente par définition la puissance de la force $f \in \mathcal{F}$ si la vitesse du système est $v \in \mathcal{V}$.

On restera parfois plus près de la description concrète de la situation mécanique en ne supposant pas que la dualité entre \mathcal{V} et \mathcal{F} soit séparante. Par exemple si \mathcal{C} est un solide tridimensionnel

parfait de la mécanique élémentaire, son état de vitesse relativement à un repère choisi est décrit par le champ vectoriel $M \mapsto \vec{V}(M)$ des vitesses de ses éléments, champ vectoriel équiprojectif de E_3 ; l'ensemble de ces champs vectoriels, ensemble muni de la structure naturelle d'espace vectoriel, est de dimension 6 : tel est en la circonstance notre espace \mathcal{V} .

La mécanique élémentaire envisage, comme "dynamiques" (cf. MOREAU [2], chap. 5) appliqués au solide, des familles finies de forces : à une telle famille s'associe un champ vectoriel $M \mapsto \vec{F}(M)$ différent de zéro seulement en un nombre fini de points ; l'ensemble des champs vectoriels de cette sorte constitue un espace vectoriel de dimension infinie : c'est ici notre \mathcal{F} . Soit $v : M \mapsto \vec{V}(M)$ un élément de \mathcal{V} et $f : M \mapsto \vec{F}(M)$ un élément de \mathcal{F} , la puissance correspondante est

$$\langle v, f \rangle = \sum \vec{V}(M) \cdot \vec{F}(M) .$$

La dualité ainsi définie n'est évidemment pas séparante dans \mathcal{F} .

Notons \mathcal{F}_0 l'orthogonal de \mathcal{V} dans \mathcal{F} pour cette dualité ; une famille de forces appartenant à \mathcal{F}_0 est classiquement dite "équivalente à zéro". Lorsqu'il s'avère utile de manier une dualité séparante on introduit l'espace quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0 = \mathcal{T}$ dont les éléments sont appelés torseurs.

1-b Lois de résistance .

C'est dans le cadre général de la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ qu'on va étudier les lois de résistance ; nous entendons par là une relation, notons-la \mathcal{R} , édictée entre la vitesse $v \in \mathcal{V}$ du système et l'une, soit f , des forces qu'il subit : \mathcal{R} méritera proprement le titre de loi de résistance si le phénomène qu'elle représente est dissipatif.

c'est à dire si on a l'implication

$$(1.1) \quad v \mathcal{R} f \Rightarrow \langle v, f \rangle \leq 0 .$$

Les lois de viscosité ou de fluage sont de ce type, mais aussi la loi du frottement de Coulomb ou les lois de plasticité. Un aspect essentiel de ces deux derniers exemples est que la relation \mathcal{R} ne s'y trouve pas "résoluble" par rapport à f ou v ; il existe des f correspondant à une infinité de valeurs de v et des v correspondant à une infinité de valeurs de f ; le traitement mathématique de ces lois donne cependant prise aux techniques de la théorie moderne des fonctions convexes et du "calcul sous-différentiel" ce qui permet une formalisation tout aussi simple que si les relations étaient univoques par rapport à f ou v .

On montrera en effet que, pour toutes les lois ci-dessus (par loi de Coulomb, entendre la loi du frottement entre deux surfaces lorsque la composante normale de la réaction est traitée comme connue), il existe une fonction numérique ϕ , définie sur \mathcal{V} , convexe, telle que

$$v \mathcal{R} f \iff -f \in \partial \phi (v) .$$

Nous disons que ϕ est fonction de résistance de la loi \mathcal{R} .

A l'égard de cette relation entre vitesse et force, la fonction ϕ joue donc le rôle que tient le "surpotentiel" pour certaines relations entre configuration et force, notion introduite antérieurement par l'auteur (cf. MOREAU [3]) et concernant des systèmes dont l'espace des configurations est vectoriel.

Pour les définitions, notations et théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions convexes utilisés dans ce qui suit, on se reportera à MOREAU [1] ou ROCKAFELLAR [1].

La simplicité, la cohérence et la généralité de ce traitement des lois de résistance, aussi bien que les succès déjà enregistrés au niveau des applications (cf. DEBORDES [1] ; NAYROLES [1], [2]) engendrent la conviction que le "calcul sous-différentiel" est un instrument extrêmement bien adapté au sujet.

1-c Puissance dissipée

Les lois de résistance usuelles possèdent aussi une propriété plus spéciale : la vitesse $v \in \mathcal{V}$, même si elle ne détermine pas univoquement la force f se trouve déterminer univoquement la valeur de la puissance dissipée $-\langle v, f \rangle$, notée dès lors $D(v)$, et on découvre que la valeur $\phi(v)$ de la fonction de résistance détermine la valeur $D(v)$; autrement dit, dans chacun de ces cas spéciaux il existe une application h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $D = h \circ \phi$. Le paragraphe 3 a pour objet la caractérisation des fonctions de résistance possédant cette propriété (fonctions dites quasi-homogènes).

1-d Orthogonalité de Ziegler

Dans le cas d'une loi de viscosité (ou amortissement linéaire) la relation \mathcal{R} prend la forme

$$-f = Lv,$$

où L est une application linéaire (faiblement continue) de \mathcal{V} dans \mathcal{F} ; l'existence d'une fonction de résistance pour cette loi signifie que L est le gradient (gradient faible au sens de la dualité entre \mathcal{V} et \mathcal{F}) d'une forme quadratique ≥ 0 sur \mathcal{V} , souvent appelée fonction de Rayleigh. Cela équivaut à dire que l'application linéaire L est "autoadjointe" ou "symétrique" relativement à la dualité

(V, \mathcal{F}) , en dimension finie, si l'on prend dans les deux espaces des bases duales, ce fait s'exprime par la symétrie de la matrice représentant L . On a l'habitude de rapprocher cette symétrie du principe d'Onsager, lequel concerne, d'une façon générale la thermodynamique des processus affectés d'une irréversibilité de type linéaire (ce rapprochement est toutefois contesté par certains auteurs, cf. TRUESDELL [1]).

Nous ne chercherons pas ici à généraliser en une conjecture thermodynamique la propriété qu'ont les lois de résistance usuelle d'admettre une fonction de résistance. Toutefois, le paragraphe 4-a reprend une propriété des lois de résistance formulée par H. ZIEGLER [1] [2] [3] et rattachée par cet auteur à des arguments de thermodynamique statistique : se limitant à des espaces de dimension finie et à une force f fonction univoque de la vitesse v , H. ZIEGLER pose en principe qu'au point v l'hyper-surface de niveau de la fonction de dissipation D admet f comme vecteur normal, c'est à dire que f est colinéaire à $\text{grad } D(v)$. Cette propriété d'orthogonalité est tout autre chose que l'existence d'une fonction de résistance ϕ ; cependant ZIEGLER [1] insiste sur le cas particulier de lois de résistance possédant la particularité supplémentaire que voici : la direction de v détermine celle de f ; c'est le cas des lois de résistance usuelles : nous montrons au paragraphe 4-b, parmi toute une série d'implications du même genre que, moyennant cette hypothèse additionnelle, l'orthogonalité de ZIEGLER implique qu'on se trouve dans la situation décrite au paragraphe 3-b : il existe une fonction de résistance quasi-homogène, reliée à la fonction D .

2 - FONCTION DE RESISTANCE

2-a Définition

Soit une relation \mathcal{R} édictée entre la vitesse éventuelle $v \in \mathcal{V}$ du système matériel \mathcal{S} et l'une, soit $f \in \mathcal{F}$, des forces que ce système subit. Nous disons que cette relation (ou "loi de force") admet pour fonction de résistance la fonction $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ si cette relation équivaut à

$$(2.1) \quad - f \in \partial \phi (v)$$

(évidemment alors $\phi + C$, avec C constante finie, est aussi bien fonction de résistance de cette loi de force).

Sauf mention du contraire, on supposera toujours

$\phi \in \Gamma_0 (\mathcal{V}, \mathcal{F})$ c'est à dire que ϕ est convexe, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, s.c.i. pour les topologies (localement convexes) compatibles avec la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, non réduite à la constante $+\infty$. C'est ce qui est certainement réalisé dans le cas usuel où la loi de force en question associe à tout $v \in \mathcal{V}$ au moins une valeur de f : en ce cas en effet ϕ est sous-différentiable en tout point, donc enveloppe supérieure d'une famille de fonction affines continues pour les topologies en question.

Si $\phi \in \Gamma_0 (\mathcal{V}, \mathcal{F})$, il lui correspond bijectivement sa fonction polaire $\phi^* \in \Gamma_0 (\mathcal{F}, \mathcal{V})$ et (2.1) équivaut à

$$(2.2) \quad v \in \partial \phi^* (-f),$$

c'est à dire aussi à

$$(2.3) \quad \phi (v) + \phi^* (-f) = - \langle v, f \rangle .$$

En général une relation telle que (2.1) n'impose pas un signe déterminé pour la puissance $\langle v, f \rangle$ de la force f .

Toutefois la monotonie des multiapplications sous-différentielles fait que cette relation est "antimonotone", c'est à dire que, si (v', f') est un autre couple vérifiant (2.1), on a

$$(2.4) \quad \langle v - v', f - f' \rangle \leq 0 \quad .$$

Supposons alors, ce qui est le cas habituel, que la loi de force en question permette à la force la valeur zéro lorsque la vitesse est nulle :

$$(2.5) \quad 0 \in \partial \phi (0) \quad .$$

En prenant $(0, 0)$ comme couple (v', f') , (2.4) fournit l'implication

$$(2.6) \quad - f \in \partial \phi (v) \implies - \langle v, f \rangle \geq 0 \quad .$$

Dans ce cas la loi de force est proprement une loi de résistance. Comme (2.5) exige que $\phi(0)$ soit fini, on pourra, par addition d'une constante réelle à ϕ faire que $\phi(0) = 0$: alors la fonction ϕ prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$.

D'une façon générale (2.4) montre qu'une loi de force de la forme (2.1) peut toujours se ramener à une loi de résistance proprement dite moyennant l'addition de termes constants à v et f (ou "changement d'origine" dans l'espace des vitesses et dans l'espace des forces).

2-b Viscosité

Une loi de résistance est traditionnellement dite de type visqueux si elle s'écrit

$$(2.7) \quad - f = L(v)$$

L désignant une application linéaire de \mathcal{V} dans \mathcal{F} , que nous supposons ici faiblement continue relativement à la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

Dans toutes les applications, L se trouve en outre autoadjointe c'est à dire que, quels que soient v et v' dans \mathcal{V} on a

$$\langle v, L(v') \rangle = \langle v', L(v) \rangle .$$

On en déduit élémentairement que L est le gradient (où différentielle de Gâteaux, au sens de la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$) de la forme quadratique

$$(2.8) \quad v \mapsto \phi(v) = \frac{1}{2} \langle v, L(v) \rangle$$

souvent appelée fonction de Rayleigh de cette loi de viscosité.

En outre, dans la pratique, ces lois de viscosité sont proprement des lois de résistance, c'est à dire que (2.7) implique $\langle v, f \rangle \leq 0$: la forme quadratique construite en (2.8) prend alors ses valeurs dans $[0, +\infty[$. Elle est donc convexe ce qui entraîne que, pour tout $v \in \mathcal{V}$, son sous-différentiel $\partial \phi(v)$ est réduit au simple élément $L(v) = \text{grad } \phi(v)$. De la sorte (2.7) prend la forme (2.1) : la fonction de Rayleigh ϕ est fonction de résistance pour la loi de viscosité en question.

2-c Plasticité

Les lois de plasticité parfaite (c'est à dire sans écrouissage) peuvent classiquement s'énoncer sous la forme d'un "principe de dissipation maximale" : est donné, dans l'espace \mathcal{F} , un ensemble C , convexe, contenant l'origine, et que nous supposerons fermé (pour les topologies compatibles avec la dualité $(\mathcal{F}, \mathcal{V})$).

La formulation de la relation \mathcal{R} est ici la suivante : les $f \in \mathcal{F}$ que cette relation associe à un $v \in \mathcal{V}$ sont caractérisés par

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in C \\ \forall f' \in C \quad \langle v, f' \rangle \geq \langle v, f \rangle . \end{array} \right.$$

En d'autres termes ces f sont les éléments de C où la fonction $f' \mapsto \langle v, f' \rangle$ atteint son maximum relatif à cet ensemble. L'ensemble de ces f est convexe fermé ; dans le cas où C est compact (le moins restrictif sera d'entendre cette compacité au sens de la topologie faible $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{V})$) on peut affirmer que l'ensemble de ces f est non vide, quel que soit $v \in \mathcal{V}$.

On obtient une formulation équivalente en introduisant la fonction indicatrice ψ_C de l'ensemble C ; (2.9) équivaut à

$$(2.10) \quad \forall f' \in \mathcal{F} \quad : \quad - \langle v, f' - f \rangle + \psi_C(f) \leq \psi_C(f') .$$

En effet (2.9) entraîne visiblement (2.10) ; inversement, si (2.10) a lieu, on voit d'abord, en prenant pour f' un point quelconque de l'ensemble non vide C que $\psi_C(f)$ est fini, donc $f \in C$ c'est à dire $\psi_C(f) = 0$ et la seconde des conditions (2.9) s'ensuit immédiatement.

Or (2.10) signifie

$$(2.11) \quad -v \in \partial \psi_C(f) ,$$

ce qui équivaut à

$$(2.12) \quad f \in \partial \psi_C^*(-v) ,$$

ou aussi bien à

$$(2.13) \quad \psi_C^*(-v) + \psi_C(f) + \langle v, f \rangle = 0 .$$

Notons ϕ la fonction $v \mapsto \psi_C^*(-v)$; c'est à dire :

$$\phi(v) = \sup_{f \in C} \langle -v, f \rangle = \sup_{g \in -C} \langle v, g \rangle ;$$

ϕ constitue donc la fonction d'appui de l'ensemble $-C$;

(2.12) s'écrit

$$(2.14) \quad - f \in \partial \phi(v)$$

signifiant que ϕ est fonction de résistance de la présente loi.

On peut aussi écrire (2.13) sous la forme

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in C \\ - \langle v, f \rangle = \phi(v) \end{array} \right.$$

En d'autres termes les $f \in \mathcal{F}$ que la relation en question associe à un $v \in \mathcal{V}$ sont les éléments de C fournissant une valeur de la puissance dissipée égale à $\phi(v)$: cela justifie la dénomination de fonction de dissipation donnée ici à ϕ ; nous reviendrons là-dessus en 3.b .

Rappelons les caractères les plus frappants d'une telle loi de résistance. Cette relation entre v et f n'est "résoluble" ni par rapport à v ni par rapport à f : à la valeur $v = 0$ correspondent tous les points de C . Les valeurs de v correspondant à un $f \in \mathcal{F}$ forment, d'après (2.11), l'ensemble $-\partial \psi_C(f)$ (certainement vide si $f \notin C$). Cet ensemble est en particulier réduit à $\{0\}$ si f est point interne de C . D'une manière générale, $-\partial \psi_C(f)$ est un cône convexe fermé (de sommet l'origine) qu'on peut appeler le cône des normales entrantes au point f du convexe C .

Pour des exemples d'application de ce formalisme à l'étude de systèmes plastiques ou élastoplastiques, voir DEBORDES [1], MOREAU [6], NAYROLES [1], [2].

2-d Frottement

La loi de Coulomb, régissant le frottement entre deux surfaces solides régulières \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , rentre dans le cadre présent si on traite comme connue la composante normale de la réaction que les deux solides exercent l'un sur l'autre en leur point de contact M ; notons $r > 0$ le produit de la mesure de cette réaction par le coefficient de frottement (on suppose l'égalité entre le coefficient de frottement au repos et le coefficient de frottement de glissement).

Ici v sera le vecteur vitesse de glissement au point M du solide \mathcal{S}_1 sur le solide \mathcal{S}_2 : on montre en cinématique que v appartient à l'espace vectoriel Π , de dimension 2, des vecteurs tangents en M aux deux surfaces ; f est la composante tangentielle, c'est à dire la projection orthogonale sur Π , de la réaction subie par \mathcal{S}_1 de la part de \mathcal{S}_2 . Donc $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \Pi$, espace vectoriel mis en dualité avec lui-même par le produit scalaire euclidien banal : si on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire - $\langle v, f \rangle$ représente bien la "puissance dissipée" au contact en M entre les deux solides.

La loi de Coulomb se formule classiquement comme suit

1°)

$$|f| \leq r$$

2°)

Si $v \neq 0$, f est colinéaire à v , de sens opposé et $|f| = r$.

Les propriétés élémentaires du cercle montrent immédiatement qu'une telle relation entre v et f est du type décrit au paragraphe 2-c ci-dessus, si, dans l'espace vectoriel Π , on appelle C le disque fermé de rayon r , centré à l'origine.

Ici la fonction de résistance s'écrit :

$$\phi(v) = r |v|.$$

En prenant pour C un convexe autre qu'un disque on formulerait une loi de frottement anisotrope entre les deux surfaces : une telle anisotropie est courante, tenant soit à la structure intime des solides en contact, soit à l'histoire de leurs surfaces (voir aussi dans MOREAU [4] comment le contact entre un véhicule et le sol par l'intermédiaire d'une roue à la fois dérapante et freinée peut se décrire globalement sous l'aspect d'un frottement anisotrope).

2-e Liaisons

Une liaison, en mécanique, est une loi de force d'un type particulier ; la formulation d'une telle loi comporte fondamentalement deux sortes d'informations (cf. MOREAU [2], chap. 6) :

- les informations cinématiques, énonçant la restriction que la liaison impose à la liberté du système,

- les informations sthéniques, concernant les forces de liaison ou "réactions" a priori inconnues, que met en jeu le dispositif assurant ladite liaison.

Dans le cadre où nous plaçons ici, si la liaison satisfait des conditions convenables de différentiabilité, l'information cinématique aura la forme suivante la vitesse $v \in \mathcal{V}$ du système ne peut prendre que des valeurs appartenant à une certaine variété affine

$$\mathcal{L} = \mathcal{U} + e$$

\mathcal{U} désignant un certain sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{V} et e un certain élément de \mathcal{V} .

Comme toute la présente étude concerne seulement le passage éventuel du système par une certaine configuration fixée, nous n'avons pas à savoir ici si cette condition cinématique est "holonome" ou non.

La liaison est déclarée parfaite (ou "sans frottement") si l'information sthénique consiste en ceci : la force de liaison $f \in \mathcal{F}$ est orthogonale à la variété affine \mathcal{L} , c'est à dire

$$f \in \mathcal{U}^\perp$$

(orthogonalité au sens de la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$).

Les deux conditions $v \in \mathcal{L}$ et $f \in \mathcal{U}^\perp$ se condensent immédiatement en

$$(2.15) \quad - f \in \partial \psi_{\mathcal{L}}(v).$$

Cette relation entre v et f se trouve avoir la forme (2.1) : la liaison parfaite est une loi de force admettant $\psi_{\mathcal{L}}$ comme fonction de résistance. Elle ne constitue une loi de résistance proprement dite que si $\psi_{\mathcal{L}}$ s'annule à l'origine, c'est à dire si $\mathcal{L} = \mathcal{U}$, sous-espace vectoriel de \mathcal{V} ; alors en effet la condition de dissipativité (1.1) est bien vérifiée, au sens large, puisque la puissance $\langle v, f \rangle$ s'annule pour tout couple (v, f) vérifiant (2.15) : c'est le cas élémentaire des liaisons parfaites "indépendantes du temps".

3 - LOI QUASI-HOMOGENE ET FONCTION DE DISSIPATION

3-a Fonctions convexes quasi-homogènes

Rappelons qu'une fonction F définie sur un espace vectoriel

- sur \mathcal{V} pour fixer les idées - à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, est dite sous-linéaire si, pour tout x et tout y dans \mathcal{V} , pour tout λ et tout μ dans $]0, +\infty[$, on a

$$F(\lambda x + \mu y) \leq \lambda F(x) + \mu F(y)$$

Une telle fonction est évidemment convexe ; on constate aisément qu'elle est en outre positivement homogène de degré 1, c'est à dire que

$$F(\lambda x) = \lambda F(x) .$$

Inversement, une fonction convexe et positivement homogène de degré 1 est sous-linéaire.

Un exemple usuel de telle fonction est le suivant : soit C une partie convexe de \mathcal{V} , contenant l'origine. On appelle jauge de C la fonction numérique

$$x \mapsto j(x) = \inf \{ \lambda \in]0, +\infty[: \frac{1}{\lambda} x \in C \}$$

où l'inf est pris dans $\overline{\mathbb{R}}$ (l'ensemble entre accolades est vide si x n'est pas absorbé par C : en ce cas $j(x) = +\infty$) : on vérifie que cette fonction est sous-linéaire ≥ 0 , nulle à l'origine. Inversement on pourra dire de toute fonction sous-linéaire ≥ 0 nulle à l'origine que c'est une jauge, car elle est la jauge de l'ensemble

$$j \leq (1) = \{ x \in \mathcal{V} : j(x) \leq 1 \}$$

Pour une topologie sur \mathcal{V} , la fonction j est s.c.i. si et seulement si l'ensemble $j \leq (1)$ est fermé.

Soit, d'autre part, α une application convexe de $[0, +\infty]$ dans lui-même, telle que $\alpha(0) = 0$, $\alpha(+\infty) = +\infty$. Des raisonnements élémentaires montrent qu'une telle application est croissante. Nous supposons de plus qu'elle est continue à gauche, ce qui revient à

dire s.c.i. On trouve qu'il existe ξ_1 et ξ_2 dans $[0, +\infty[$;
 $\xi_1 \leq \xi_2$ (éventuellement nuls ou infinis) tels que α prend la
 valeur 0 sur $[0, \xi_1]$; est strictement croissante sur $[\xi_1, \xi_2]$;
 finie et continue sur $[0, \xi_2[$; elle prend la valeur $+\infty$ sur
 $]\xi_2, +\infty[$.

Alors, si j est une jauge, la fonction composée $\phi = \alpha \circ j$
 est convexe, s.c.i. ; pour les diverses valeurs de $\lambda \in [0, +\infty[$;
 les tranches de cette fonction, c'est à dire les ensembles

$$\phi^{\leq}(\lambda) = \{v \in \mathcal{V} : \phi(v) \leq \lambda\}$$

sont aussi bien des tranches de la fonction j , c'est à dire des
 ensembles tous homothétiques du convexe $C = j^{\leq}(1)$.

Nous dirons en ce cas que ϕ est une fonction convexe quasi-homogène ;
 le prototype des fonctions de cette sorte est fourni en prenant pour α
 la fonction

$$\xi \mapsto c \xi^p$$

($c > 0$ et $p \geq 1$, constantes) ; dans ce cas $\alpha \circ j$ est une
 fonction convexe positivement homogène de degré p .

Un cas extrême est obtenu en prenant pour α la fonction
 indicatrice d'un segment $[0, \xi_0]$: alors $\alpha \circ j$ est la fonction
 indicatrice de l'ensemble $\xi_0 C$.

Les fonctions polaires de fonctions quasi-homogènes sont
 étudiées dans AGGERI-LESCARRET [1], MOREAU [1], section 14 : à C ,
 partie convexe de \mathcal{V} , fermée pour les topologies compatibles avec
 la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, contenant l'origine, correspond bijectivement
 son ensemble polaire D dans \mathcal{F} . Soit k la fonction conjuguée de
Young de α , définie pour $\eta \in [0, +\infty[$ par

$$\beta(\eta) = \sup_{\xi} [\xi\eta - \alpha(\xi)]$$

(en outre, on posera $\beta(+\infty) = +\infty$). De ce que α était supposée s.c.i. on peut déduire que α est, à son tour la conjuguée de Young de β . On suppose que l'une et l'autre sont finies au moins sur un voisinage de l'origine ; on montre alors que les fonctions $\alpha \circ j$ et $\beta \circ k$ sont mutuellement polaires au sens de la dualité $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

On trouve que deux points $x \in \mathcal{V}$ et $y \in \mathcal{F}$ sont conjugués par rapport à ces fonctions si et seulement si $j(x)$ et $k(y)$ sont finis avec les relations suivantes :

$$(3.1) \quad \alpha [j(x)] + \beta [k(y)] = j(x) k(y) \\ j(x) k(y) = \langle x, y \rangle$$

On en tire en particulier une expression du sous-différentiel de la fonction $\phi = \alpha \circ j$; en supposant, ce qui suffira pour la suite, que j est partout finie et que α est différentiable (soit $\dot{\alpha}$ sa dérivée), on trouve l'adaptation suivante de la règle classique de dérivation des fonctions composées :

$$(3.2) \quad \partial \phi(x) = \dot{\alpha} [j(x)] \cdot \partial j(x)$$

Noter que la relation (3.1), étant positivement homogène séparément par rapport à x et à y , définit une relation entre les demi-droites engendrées respectivement dans \mathcal{V} et \mathcal{F} par ces deux vecteurs ; on peut dire que ces demi-droites sont des rayons conjugués par rapport au couple de jauges conjuguées j et k .

3-b Fonction de dissipation

Il peut arriver qu'une relation \mathcal{R} entre v et f , même si elle n'est pas "résoluble" par rapport à f , c'est à dire même si elle ne définit pas une fonction univoque $v \mapsto f$, définisse la puissance dissipée $- \langle v, f \rangle$ comme fonction univoque de v . Tel est le cas pour les lois de plasticité ou de frottement présentées en 2-c et 2-d : la deuxième équation (2.14) montre dans cet exemple que la puissance dissipée se trouve égale à $\phi(v)$. D'une manière générale il faut et il suffit que l'ensemble des $f \in \mathcal{F}$ associées par la relation \mathcal{R} à un $v \in \mathcal{V}$ se trouve contenu dans une variété affine orthogonale à v , pour qu'il existe une fonction numérique univoque

$$D : v \mapsto - \langle v, f \rangle$$

et on dit alors que D est la fonction de dissipation de la loi de force \mathcal{R} .

Que la loi de force \mathcal{R} se trouve par ailleurs admettre une fonction de résistance ϕ n'implique pas a priori de relation entre les fonctions ϕ et D . Pourtant, dans le cas des lois de plasticité on vient de voir que $D = \phi$; d'autre part pour une loi de viscosité, (2.8) montre que $D = 2\phi$. Le lien est ici évident avec l'identité d'Euler concernant les fonctions homogènes : si la fonction de résistance ϕ est (positivement) homogène de degré $p \geq 1$, on conclura que $D = p\phi$ est fonction de dissipation.

L'objet de ce paragraphe est de caractériser plus généralement les fonctions de résistance ϕ telles que la valeur $\phi(v)$ se trouve déterminer la valeur de la puissance dissipée :

PROPOSITION (MOREAU [5]) . Soit une loi de force admettant la fonction de résistance ϕ non identiquement nulle, avec $\partial\phi(v)$ non vide quel que soit $v \in \mathcal{V}$; on suppose $0 \in \partial\phi(0)$ et $\phi(0) = 0$. Pour qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assurant l'implication

$$(3.3) \quad - f \in \partial\phi(v) \Rightarrow - \langle v, f \rangle = h[\phi(v)] .$$

(autrement dit $D = h \circ \phi$), il faut et il suffit que ϕ ait la forme (quasi-homogène) : $\phi = \alpha \circ j$ où j est une jauge partout sous-différentiable sur \mathcal{V} et α une application convexe différentiable de $[0, +\infty[$ dans lui-même, avec $\alpha(0) = 0$.

Montrons d'abord que cette forme est nécessaire.

Soit v_0 un élément non nul de \mathcal{V} . Puisque ϕ est une fonction convexe ≥ 0 partout finie, nulle à l'origine, la restriction de cette fonction à la demi-droite engendrée par v_0 , ou plus précisément la fonction

$$\alpha : \xi \in [0, +\infty[\mapsto \phi(\xi v_0)$$

est une fonction convexe ≥ 0 , nulle à l'origine, partout finie sur $[0, +\infty[$ donc continue. Selon le choix de v_0 deux circonstances au plus peuvent se présenter :

- ou bien la fonction α est nulle sur $[0, +\infty[$, éventualité que nous laissons provisoirement de côté,

- ou bien la fonction α , nulle sur un intervalle $[0, \xi_0]$ (peut être $\xi_0 = 0$) est, au delà de ξ_0 , strictement croissante et tend vers $+\infty$ à l'infini. Elle prend donc pour un unique ξ_1 la valeur 1 ; quitte à remplacer v_0 par un vecteur proportionnel,

on peut supposer $\xi_1 = 1$, c'est à dire

$$(3.4) \quad \alpha(1) = 1 .$$

Soit $\xi > 0$ et soit $f \in \mathcal{F}$ tel que $-f \in \partial \phi(\xi v_0)$,

c'est à dire

$$\forall w \in \mathcal{V} : -\langle w - \xi v_0, f \rangle + \phi(\xi v_0) \leq \phi(w).$$

Faisons $w = \zeta v_0$, $\zeta \in [0, +\infty[$:

$$\forall \zeta \in [0, +\infty[: -\frac{1}{\xi} \langle \xi v_0, f \rangle (\zeta - \xi) + \alpha(\xi) \leq \alpha(\zeta)$$

ce qui signifie que le réel $-\langle \xi v_0, f \rangle / \xi$ appartient au sous-différentiel de la fonction α au point ξ ; il est bien connu d'ailleurs qu'une telle fonction possède au point ξ une dérivée à gauche $\dot{\alpha}^-(\xi)$ est une dérivée à droite $\dot{\alpha}^+(\xi)$, d'où l'écriture équivalente

$$\dot{\alpha}^-(\xi) \leq -\frac{1}{\xi} \langle \xi v_0, f \rangle \leq \dot{\alpha}^+(\xi).$$

Si l'implication (3.3) a lieu, cela donne une sorte d'équation différentielle :

$$(3.5) \quad \forall \xi \in]0, +\infty[: \dot{\alpha}^-(\xi) \leq \frac{1}{\xi} h[\alpha(\xi)] \leq \dot{\alpha}^+(\xi) .$$

Nous allons montrer que, la fonction h étant, d'après l'énoncé, indépendante de l'élément v_0 choisi, cette propriété, jointe à (3.4), détermine la fonction α indépendamment de cet élément : cela établira la structure de la fonction ~~sur~~ sur l'espace \mathcal{V} en prouvant qu'elle a des restrictions "semblables" à toute les demi-droites issues de 0.

Faisons le changement de variable $\eta = \text{Log } \xi$, en notant σ la fonction

$$\eta \mapsto \sigma(\eta) = \alpha(\exp \eta),$$

fonction convexe > 0 sur $] -\infty; +\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $[\text{Log } \xi_0, +\infty[$; (3.5) équivaut à

$$(3.6) \quad \forall \eta \in \mathbb{R} : \dot{\sigma}^-(\eta) \leq h[\sigma(\eta)] \leq \dot{\sigma}^+(\eta)$$

et (3.4) se traduit par

$$\sigma(0) = 1$$

Introduisons enfin

$$\gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

fonction réciproque de σ : c'est une fonction concave, strictement croissante, avec $\gamma(1) = 0$; cela donne à (3.6) la forme

$$\forall \theta \in]0, +\infty[: \dot{\gamma}^-(\theta) \geq \frac{1}{h(\theta)} \geq \dot{\gamma}^+(\theta)$$

A ce stade on peut invoquer la théorie élémentaire de la convexité pour voir que $\dot{\gamma}^-$ est décroissante continue à gauche, que $\dot{\gamma}^+$ est décroissante continue à droite, d'où l'intégrabilité de ces deux fonctions égales presque partout et finalement

$$(3.7) \quad \gamma(\theta) = \int_1^\theta \frac{d\tau}{h(\tau)}$$

La fonction h détermine ainsi les fonctions γ , σ et a (on a là d'ailleurs un procédé constructif pour obtenir a à partir de h).

Considérons alors l'ensemble

$$\phi^{\leq}(1) = \{w \in \mathcal{V} : \phi(w) \leq 1\},$$

convexe fermé, absorbant puisque ϕ est partout finie; sa jauge j est partout finie.

Soit v non nul quelconque dans \mathcal{V} . Ou bien la restriction de ϕ à la demi-droite engendrée par v est partout nulle : dans ce

cas $\phi \leq (1)$ contient cette demi-droite, donc $j(v) = 0$ et finalement, si α est la fonction déterminée ci-dessus à partir de h , on a banalement

$$(3.8) \quad \phi(v) = \alpha [j(v)] .$$

Si par contre, la restriction en question n'est pas partout nulle, il existe v_0 sur la demi-droite tel que $\phi(v_0) = 1$. D'après la définition de j :

$$v = j(v) v_0 ; \quad \text{c'est alors}$$

la définition même de α qui fournit (3.8) ; bref $\phi = \alpha \circ j$.

Montrons maintenant que la fonction α est différentiable, c'est à dire que pour tout $\xi \in]0, +\infty[$, on a $\dot{\alpha}^-(\xi) = \dot{\alpha}^+(\xi)$.

Soit v_0 tel que $\phi(v_0) = 1$ (on a supposé ϕ non identiquement nulle), donc $j(v_0) = 1$. De ce que $\partial\phi(v_0)$ n'est pas vide on conclut l'existence d'un hyperplan d'appui au point v_0 pour l'ensemble

$\phi \leq (1) = j \leq (1)$ et finalement l'existence de g non nul appartenant à $\partial j(v_0)$, c'est à dire aussi bien à $\partial j(\xi v_0)$, vu l'homogénéité de j ; cela s'écrit :

$$(3.9) \quad \forall v \in \mathcal{V} : \quad \langle v - \xi v_0, g \rangle + j(\xi v_0) \leq j(v)$$

Tout m tel que

$$(3.10) \quad \dot{\alpha}^-(\xi) \leq m \leq \dot{\alpha}^+(\xi)$$

est un sous-gradient de α au point ξ , c'est à dire :

$$(3.11) \quad \forall \eta \in [0, +\infty[: \quad m(\eta - \xi) + \alpha(\xi) \leq \alpha(\eta) .$$

La combinaison des inégalités (3.9) et (3.11) fournit $m \langle g, v_0 \rangle \in \partial\phi(v_0)$; or, en remarquant que $\langle v_0, g \rangle \neq 1$, on obtient $\langle v_0, mg \rangle = m$. Donc l'existence de plusieurs valeurs de m vérifiant

(3.10) contredirait l'hypothèse (3.3).

Il reste maintenant à établir que, réciproquement, toute fonction ϕ ayant la forme $\alpha \circ j$ en question assure bien l'implication (3.3). Il résulte de (3.2) que, pour une telle ϕ , α étant différentiable, on a, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$\partial \phi(v) = \dot{\alpha} [j(v)] \cdot \partial j(v) .$$

L'homogénéité de j fait que, pour tout $g \in \partial j(v)$, on a $\langle v, g \rangle = j(v)$, donc

$$- f \in \partial \phi(v) \Rightarrow - \langle f, v \rangle = \dot{\alpha} [j(v)] \cdot j(v)$$

La fonction α est nulle sur un intervalle $[0, \xi_0]$ (avec, peut-être $\xi_0 = 0$) ; elle est strictement croissante sur l'intervalle $[\xi_0, +\infty[$; soit δ la fonction réciproque de α , définie sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans $[\xi_0, +\infty[$. Pour tout v tel que $j(v) \in [\xi_0, +\infty[$, on a

$$j(v) = \delta [\phi(v)] .$$

Pour v tel que $j(v) \in [0, \xi_0]$, on a $\dot{\alpha} [j(v)] = 0$, donc $-\langle f, v \rangle = 0$. Bref ϕ assure bien l'implication (3.3) si on définit h de la manière suivante, pour tout $\eta \in [0, +\infty[$:

$$h(\eta) = \dot{\alpha} [\delta(\eta)] \cdot \delta(\eta) .$$

REMARQUES

Noter que h est une fonction strictement croissante.

La fonction $D = h \circ \phi$ n'est pas convexe en général, mais seulement quasi-convexe : ses tranches sont des ensembles convexes homothétiques de l'ensemble $j \leq (1)$.

4 - ORTHOGONALITE DE H. ZIEGLER

4-a Principe de ZIEGLER

S'appuyant sur des raisonnements de thermodynamique statistique, H. ZIEGLER [1], [2], [3] propose la voie suivante pour étendre à des cas d'irréversibilité non linéaire le principe d'Onsager. Dans le cadre où se place cet auteur, la liberté n du système est finie et on peut prendre $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^n$; il considère une loi de force faisant dépendre univoquement une force f de la vitesse v du système ; à cette loi s'associe donc une fonction de dissipation D bien définie qu'il suppose différentiable et de gradient non nul. Le principe de Ziegler énonce que, pour chaque v , la force f est normale en ce point à l'hypersurface de niveau correspondante de la fonction D , Cela peut s'écrire

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : f = \lambda \text{ grad } D(v) ;$$

vu la définition de D ,

$$D'(v) = - \langle v, f \rangle ,$$

on obtient finalement

$$f = - \frac{D'(v)}{\langle v, \text{grad } D(v) \rangle} \text{ grad } D(v) .$$

Ziegler remarque par ailleurs que les lois de résistance usuelles possèdent la propriété supplémentaire que voici : pour toutes les valeurs de v appartenant à un même rayon issu de l'origine, la direction de f est la même. Il montre que, conjointe à l'orthogonalité précédente, cette propriété entraîne que la loi $v \mapsto f$ est le gradient d'une fonction numérique, d'ailleurs liée à D

et quasi-homogène,

Dans les perspectives de Ziegler, les propriétés de convexité n'apparaissent que comme conditions adventices assurant stabilité ou unicité, conformément aux idées de R. HILL ou D.C. DRUCKER. Cette convexité posée, la situation ci-dessus rentre dans le cadre de notre proposition 3-b ;

Le paragraphe qui vient, établit une série d'implications de même sorte, moyennant des hypothèses de différentiabilité, mais sans que la convexité intervienne.

4-b Quelques équivalences

PROPOSITION On suppose les espaces \mathcal{V} et \mathcal{F} de dimension finie, en dualité séparante. On considère une loi de force $f = F(v)$ où F est une application (univoque) continue de \mathcal{V} dans \mathcal{F} , d'où une fonction de dissipation $v \mapsto D(v) = -\langle v, F(v) \rangle$, et les propriétés éventuelles suivantes :

- i) Il existe une fonction $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout v on a $F(v) = - \text{grad } \phi(v)$.
- ii) Il existe une relation différentiable vérifiée quel que soit v par les réels $\phi(v)$ et $D(v)$.
- iii) La fonction ϕ est quasi-homogène, c'est à dire de la forme $\phi = h \circ p$ où $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positivement homogène de degré 1
- iv) La fonction D est quasi-homogène.
- v) Sous réserve que la fonction D soit différentiable il existe une fonction $s : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(v) = s(v) \text{ grad } D(v)$ (orthogonalité de Ziegler).

vi) Si $\lambda > 0$, les vecteurs $F(v)$ et $F(\lambda v)$ sont colinéaires.

L'association de deux de ces propriétés implique toutes les autres, aux exceptions près que voici :

1°) le couple iv) vi) n'entraîne pas nécessairement les autres propriétés ;

2°) les propriétés ii) ou iii) n'ont de sens qu'associées à i).

Montrons $i) + ii) \Rightarrow iii)$. Soit $v_0 \in \mathcal{V}$ non nul ;
pour $\xi \in]0, +\infty[$, notons

$$a(\xi) = \phi(\xi v_0),$$

La fonction a admet pour dérivée :

$$(4.1) \quad \dot{a}(\xi) = \langle v_0, \text{grad } \phi(\xi v_0) \rangle = \frac{1}{\xi} D(\xi v_0).$$

La relation supposée entre ϕ et D se résoud au moins localement sous la forme $D = g(\phi)$ de sorte que (4.1) constitue une équation différentielle :

$$\frac{da}{d\xi} = \frac{1}{\xi} g(a)$$

qui s'intègre comme suit

$$(4.2) \quad \text{Log } \xi + \text{cte} = \int \frac{da}{g(a)}$$

La primitive de $1/g$ écrite au second membre pourra être construite indépendamment de v_0 : seule la constante du premier membre dépend de cet élément et (4.2) peut se résoudre sous la forme

$$\phi(\xi v_0) = a(\xi) = G[\xi^p(v_0)].$$

où $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction indépendante de v_0 et où $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$;
la quasi-homogénéité de ϕ est ainsi en évidence.

Montrons i) + iii) \Rightarrow ii). Si $\phi = h \circ p$, on a

$$- F(v) = \text{grad } \phi = \dot{h}(p) \text{ grad } p$$

d'où

$$D(v) = \dot{h}(p) \langle v, \text{grad } p \rangle = \dot{h}(p) p,$$

en vertu de l'identité d'Euler pour la fonction p , homogène de degré 1.

Comme $\phi(v) = h(p)$, l'élimination de la variable $p = p(v)$ donne bien une relation entre $\phi(v)$ et $D(v)$.

L'implication i) + ii) + iii) \Rightarrow iv), v) et vi) est facile.

Montrons i) + iv) \Rightarrow iii). Par hypothèse, il existe

$p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, positivement homogène et $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $D = k \circ p$.

Soit $v_0 \in \mathcal{V}$ et $a(\xi) = \phi(\xi v_0)$; la dérivée de la fonction a s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{a}(\xi) &= \langle v_0, \text{grad } \phi \rangle = \frac{1}{\xi} D(\xi v_0) \\ &= \frac{1}{\xi} k[\xi p(v_0)]. \end{aligned}$$

d'où

$$(4.3) \quad a(\xi) = \phi(0) + \int_0^\xi \frac{1}{x} k[xp(v_0)] \cdot dx.$$

L'espace \mathcal{V} est la réunion de trois cônes dans lesquels on a respectivement $p > 0$, $p < 0$ et $p = 0$.

Selon qu'il appartient à l'un ou l'autre de ces cônes, un $v \in \mathcal{V}$

s'écrit $v = \xi v_0$ avec $p(v_0) = 1$ ou -1 ou 0 . Dans chacun des trois

cas (4.3) définit la fonction a et prouve que ϕ est quasi-homogène.

Montrons i) + v) \Rightarrow ii). L'hypothèse implique que les vecteurs $\text{grad } \phi$ et $\text{grad } D$ sont colinéaires; il en résulte classiquement ii) (on devra toutefois supposer que ces gradients ne sont pas nuls).

Montrons $i) + vi) \Rightarrow iii)$, au moins localement.

Par hypothèse, pour tout v appartenant à une demi-droite Δ issue de l'origine, le vecteur $F(v)$ a la même direction. Si cette direction est orthogonale à Δ , la restriction de ϕ à Δ est constante. Ce cas mis à part, soit Π un sous-espace de dimension 2 contenant Δ . Les lignes de niveau de ϕ dans Π ont, en chacun de leurs points, soit v , une tangente orthogonale à $F(v) = -\text{grad } \phi$. Cette direction de tangente est donc la même pour tous les points d'une demi-droite issue de l'origine. Si on se repère dans Π par des coordonnées cartésiennes (x, y) on trouve ainsi que ces lignes de niveau sont les intégrales d'une équation différentielle "homogène" :

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Donc, au moins au voisinage de Δ , elles se déduisent toutes de l'une d'entre elles par homothétie. Il en résulte visiblement que, au voisinage de Δ dans \mathcal{V} , la fonction ϕ est quasi-homogène.

Il reste maintenant à montrer que deux quelconques des propriétés $iv) v) vi)$ impliquent la troisième. L'implication $v) + vi) \Rightarrow iv)$ s'établit exactement comme ci-dessus, cela à titre local. L'implication $iv) + v) \Rightarrow vi)$ résulte d'un calcul banal.

Terminons par un contre-exemple montrant que $iv) + vi)$ n'implique pas nécessairement les autres propriétés : On suppose $\mathcal{V} = \mathcal{F}$ euclidien, de dimension 3 pour fixer les idées. A partir d'une loi de force $f = F(v)$ possédant toutes les propriétés de l'énoncé on construit une autre loi $f = F_1(v)$ de la façon suivante : pour tous les v appartenant à une même demi-droite issue de

l'origine, $F_1(v)$ se déduit de $F(v)$ par une certaine rotation autour de la demi-droite en question. Cette nouvelle loi possède la même fonction de dissipation D que la première et possède encore la propriété vi) ; mais elle ne possèdera pas en général la propriété v) .

B I B L I O G R A P H I E

AGGERI (J.C.) , LESCARRET (C)

- [1] Fonctions convexes duales associées à un couple
d'ensembles mutuellement polaires,
C.R. Acad. Sci. , 260 (1965), p. 6011-6014.

DEBORDES (O.)

- [1] Application de la programmation convexe au calcul des
coques de révolution, rigides plastiques parfaites,
Thèse de 3ème cycle, Poitiers, 1971.

MOREAU (J.J.)

- [1] Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations
aux dérivées partielles,
Collège de France, Paris 1966-67 (multigraphié 108 p.)
- [2] Mécanique classique,
tome I, 1968 ; tome II, 1971 ; Masson, Paris.
- [3] La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales
en élastostatique,
C.R. Acad. Sci. Ser. A, 267 (1968), p. 954-957.
- [4] Convexité et frottement,
Université de Montréal, Département d'informatique,
publ. n° 32, 1970 (multigraphié 30 p.).
- [5] Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité,
C.R. Acad. Sci. Ser. A, 271 (1970), p. 608-611.

- [6] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique,
C.R. Acad. Ser. A, 273 (1971), p. 118-121.

NAYROLES (B.)

- [1] Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides
plastiques parfaites,
Journ. de mécanique, 9 (1970), p. 491-506.
- [2] Quelques applications variationnelles de la théorie des
fonctions duales à la mécanique des solides,
Journ. de mécanique, 10 (1971), p. 263-289.

PRAGER (W.)

- [1] Composite stress-strain relations: for elastoplastic
solids, in : H. PARKUS, L.I. SEDOV (editors),
IUTAM Symp. on Irreversible Aspects of continuum
Mechanics
(Vienna 1966), Springer-Verlag 1968, p. 315-325.

ROCKAFELLAR (R. T)

- [1] Convex analysis,
Princeton University Press, 1970.

TRUESDELL (C.)

- [1] Thermodynamics for beginners, in : H. PARKUS,
L.I. SEDOV (editors), IUTAM Symp. on Irreversible
aspects of continuum mechanics (Vienna 1966),
Springer-Verlag 1968, p. 373-389.

ZIEGLER (H.)

- [1] An attempt to generalize Onsager's principle and its
significance for rheological problems, Z. angew.
Math. Phys. , 9b (1958) p. 748-763.

- [2] A possible generalization of Onsager's theory, in :
H.PARKUS, L.I. SEDOV (editors), IUTAM Symp. on
Irreversible Aspects of Continuum mechanics (Vienna 1966)
Springer-Verlag 1968, p. 411-424.
- [3] Proof of an orthogonality principle in irreversible
thermodynamics,
J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), 21 (1970). p. 853-863.
-