

# Identification de sources vibratoires par approche bayésienne: apport des a priori locaux suivant une loi normale généralisée

Mathieu Aucejo, Olivier de Smet

▶ **To cite this version:**

Mathieu Aucejo, Olivier de Smet. Identification de sources vibratoires par approche bayésienne: apport des a priori locaux suivant une loi normale généralisée. 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. hal-02305511

**HAL Id: hal-02305511**
**https://hal.science/hal-02305511**

Submitted on 4 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification de sources vibratoires par approche bayésienne: apport des a priori locaux suivant une loi normale généralisée

**M. Aucejo[a], O. De Smet[a]**

a. *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam Paris*

## Résumé :

*Parmi les méthodes d'identification de sources vibratoires, celles de type Tikhonov sont certainement les plus utilisées. Cependant, sous leur forme standard, elles peuvent conduire à des identifications peu précises lorsque la structure est excitée à la fois par des sources localisées et réparties, car elles n'introduisent qu'un a priori global sur les sources à identifier. Ce papier propose une méthode d'identification visant à tirer parti de l'information locale disponible a priori sur la nature et la répartition spatiale des sources. L'approche proposée repose sur l'inférence bayésienne, qui permet d'exploiter finement notre connaissance des sources. Cette connaissance se traduit par l'utilisation d'a priori locaux suivant des lois normales généralisées. Formellement, la solution correspond à l'estimateur du maximum a posteriori. Pratiquement, on cherche la solution du problème dual à partir d'une forme généralisée de l'algorithme des moindres carrés repondérés itérativement. La validité de l'approche est illustrée via une expérience numérique.*

## Abstract :

*Among all the methods developed to identify mechanical sources, the Tikhonov-like regularizations are certainly the most popular. However, in their standard form, a global a priori is assumed on the spatial distribution of sources. Incidentally, imprecise results can be obtained if a structure is subjected to localized and distributed sources. This paper aims at providing an identification methodology able to take advantage of prior local information on both the nature and location of excitation sources. For this purpose, the bayesian framework is well adapted to exploit our a priori knowledge on the sources. The proposed bayesian formulation is based on the use of generalized gaussian priors, which provide a flexible way to introduce local a priori information. Practically, the resulting optimization problem is solved from a Generalized Iteratively Reweighted Least-Squares algorithm. The validity of the proposed methodology is illustrated numerically.*

**Mots clefs : Problème inverse ; Approche bayésienne ; a priori locaux**

## 1 Introduction

L'identification de sources vibratoires à partir de la mesure du champ de déplacement ou de vitesse à la surface d'une structure est connue pour être un problème inverse mal-posé, ce qui signifie que l'existence d'une solution unique et stable n'est pas garantie. Une approche classique pour pallier cette difficulté consiste à inclure dans la formulation du problème inverse de l'information a priori sur les sources à identifier pour contraindre l'espace des solutions admissibles. Cette idée est à la base des méthodes de régularisation de type Tikhonov [3]. Bien qu'aujourd'hui ces méthodes soient largement utilisées, elles ne permettent d'introduire, sous leur forme standard, qu'une connaissance a priori globale des sources agissant sur la structure. Par suite, elles peuvent conduire à des identifications peu précises lorsque la structure est excitée à la fois par des sources localisées et réparties.
Ce papier présente une méthode d'identification visant à tirer parti de l'information locale, dont on

dispose a priori sur la nature et la répartition spatiale des sources. L'approche proposée s'appuie sur l'inférence bayésienne, qui offre un cadre mathématique rigoureux permettant de combiner des informations probabilistes et mécaniques [4]. Pour exploiter au mieux notre connaissance a priori des sources excitatrices, la structure est divisée en différentes zones dans lesquelles on suppose que les a priori locaux sur les distributions sources suivent des lois normales généralisées. De cette manière, l'information introduite a priori peut être ajustée finement. Formellement, la solution du problème inverse correspond à l'estimateur du maximum a posteriori. Pratiquement, la solution recherchée est celle du problème dual, qui est calculée grâce une forme généralisée de l'algorithme des moindres carrés repondérés itérativement [2]. Pour démontrer la validité de l'approche proposée, une expérience numérique est finalement présentées. Les résultats obtenus derniers montrent que l'exploitation d'a priori locaux améliore significativement la qualité de l'identification.

# 2 Formulation bayésienne du problème d'identification

## 2.1 Présentation du problème

Considérons la situation générale où le champ vibratoire $\mathbf{X}$, mesuré à la surface d'une structure, est produit par un champ excitateur inconnu $\mathbf{F}$. Lorsque la structure est linéaire, son comportement vibratoire est complètement déterminé par la connaissance de sa matrice des fonctions de transfert $\mathbf{H}$, reliant le champ vibratoire $\mathbf{X}$ au champ excitateur inconnu $\mathbf{F}$. Si l'on suppose, par ailleurs, que le champ vibratoire mesuré est corrompu par un bruit de mesure $\mathbf{N}$, alors le champ vibratoire $\mathbf{X}$ est obtenu grâce au problème direct suivant :

$$\mathbf{X} = \mathbf{HF} + \mathbf{N}. \tag{1}$$

L'objectif du problème d'identification est de reconstruire le champ excitateur inconnu $\mathbf{F}$ à partir du champ vibratoire $\mathbf{X}$ mesuré à la surface de la structure. Pour cela, on adopte ici le cadre bayésien, qui offre un cadre mathématique rigoureux permettant de combiner des informations probabilistes et mécaniques. Le modèle bayésien est un modèle d'incertitude, dans lequel tous les paramètres sont supposés aléatoires. L'incertitude sur chaque paramètre est alors représentée par une distribution de probabilité, qui décrit l'état de connaissance ou l'a priori sur ce paramètre. La formulation bayésienne du problème d'indentification s'appuie sur la règle de Bayes :

$$p(\mathbf{F}|\mathbf{X}) \propto p(\mathbf{X}|\mathbf{F})p(\mathbf{F}), \tag{2}$$

où :
- $p(\mathbf{F}|\mathbf{X})$ est la distribution de probabilité *a posteriori*, définissant la probabilité d'observer le champ excitateur $\mathbf{F}$ étant donnée un champ vibratoire $\mathbf{X}$ ;
- $p(\mathbf{X}|\mathbf{F})$ est la fonction de vraissemblance, définissant la probabilité d'observer le champ vibratoire mesuré $\mathbf{X}$ étant donné un champ excitateur $\mathbf{F}$ ;
- $p(\mathbf{F})$ est la distribution de probabilité *a priori*, définissant la probabilité d'observer le champ excitateur $\mathbf{F}$ avant que le champ vibratoire $\mathbf{X}$ ne soit mesuré.

Dans le cadre de ce papier, on va chercher le champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}$ le plus probable étant donné le champ vibratoire mesuré $\mathbf{X}$. Du point de vue bayésien, cela revient à trouver un estimateur ponctuel de $\widehat{\mathbf{F}}$ qui soit un mode (i.e. qui maximise) de la distribution de probabilité *a posteriori*. Mathématiquement, on cherche donc l'estimateur du maximum a posteriori tel que :

$$\widehat{\mathbf{F}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmax}}\ p(\mathbf{F}|\mathbf{X}) = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmax}}\ p(\mathbf{X}|\mathbf{F})p(\mathbf{F}). \tag{3}$$

Pratiquement, il est généralement plus simple de chercher une solution du problème dual, c'est-à-dire :

$$\widehat{\mathbf{F}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}}\ -\ln p(\mathbf{X}|\mathbf{F}) - \ln p(\mathbf{F}). \tag{4}$$

## 2.2 Choix de la fonction de vraissemblance et de la distribution de probabilité *a priori*

### 2.2.1 Choix de la fonction de vraissemblance

La fonction de vraissemblance traduit l'incertitude associée à la mesure du champ vibratoire $\mathbf{X}$. Par définition, cette incertitude est principalement liée au bruit de mesure $\mathbf{N}$. Par conséquent la fonction de vraissemblance $p(\mathbf{X}|\mathbf{F})$ peut se réecrire sous la forme :

$$p(\mathbf{X}|\mathbf{F}) = p(\mathbf{X} - \mathbf{HF}|\mathbf{N}), \tag{5}$$

ce qui traduit la probabilité d'obtenir $\mathbf{X} - \mathbf{HF} = \mathbf{0}$ étant donné le bruit de mesure $\mathbf{N}$.

Si l'on suppose que le bruit provient de multiples causes indépendantes, alors en vertu du théorème central limite la distribution de probabilité $p(\mathbf{X}|\mathbf{F})$ peut être assimilée à une loi normale de moyenne $\mathbf{HF}$ et de variance $\alpha^2$ :

$$p(\mathbf{X}|\mathbf{F}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2}{\alpha^2}\right]. \tag{6}$$

où $\| \bullet \|_2$ est la norme euclidienne, également appelée norme $L_2$.

### 2.2.2 Choix de la distribution de probabilité *a priori*

La distribution de probabilité *a priori* traduit l'incertitude associée au champ non observable $\mathbf{F}$. Il s'agit d'un modèle d'expertise, qui peut être vu comme une mesure de la connaissance a priori que l'on possède sur le champ excitateur $\mathbf{F}$. Si l'on suppose qu'une structure est excitée en différentes zones par des excitations non corrélées de nature différentes, alors les champs excitateurs locaux $\mathbf{F}_i$ peuvent être considérés comme des vecteurs aléatoires indépendants. De ce fait, la distribution de probabilité *a priori* peut s'écrire sous la forme :

$$p(\mathbf{F}) = \prod_{i=1}^{N} p(\mathbf{F}_i), \tag{7}$$

où $N$ est le nombre zones considérées et $p(\mathbf{F}_i)$ est la distribution locale de probabilité, traduisant la connaissance a priori de l'expert sur la nature des sources dans la zone $i$.

Pour des raisons pratiques, on suppose que les champs excitateurs $\mathbf{F}_i$ suivent des lois normales généralisées de moyenne nulle de la forme :

$$p(\mathbf{F}_i) \propto \exp\left[-\frac{1}{q_i}\frac{\|\mathbf{L}_i\mathbf{F}_i\|_{q_i}^{q_i}}{\beta_i^{q_i}}\right], \tag{8}$$

où :
- $q_i$ est un paramètre variable, tel que $0 < q_i < +\infty$, permettant de contrôler la forme de la distribution dans la zone $i$ ;
- $\| \bullet \|_{q_i}$ est la norme ou quasi-norme $L_{q_i}$ ;
- $\beta_i$ est un paramètre d'échelle, qui définit la dispersion de la distribution autour de la moyenne. De ce fait, il peut être vu comme une mesure généralisée de la variance de la distribution dans la zone $i$
- $\mathbf{L}_i$ est un opérateur de différentiation discrétisé qui permet de contrôler la régularité de la solution recherchée.

## 2.3 Forme finale du problème d'identification

Pour obtenir la forme finale du problème d'identification, il suffit d'introduire les expressions de la fonction de vraissemblance et de la distribution de probabilité *a priori* [cf. Eqs. (6) et (8)] dans l'équation (4). Ce faisant, on obtient :

$$\widehat{\mathbf{F}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{HF}\|_2^2}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{q_i}\frac{\|\mathbf{L}_i\mathbf{F}_i\|_{q_i}^{q_i}}{\beta_i^{q_i}}. \tag{9}$$

A ce stade, on dispose de $2N+1$ paramètres ($q_i$, $\beta_i$, $\alpha$) pour traduire notre connaissance a priori sur le problème. Cependant, concernant la distribution de probalité *a priori*, les paramètres $q_i$ et $\beta_i$ ont un rôle sensiblement analogue. De ce fait, il est possible de n'utiliser qu'un seul jeu de paramètres d'ajustement ($q_i$ ou $\beta_i$) pour traduire finement notre a priori sur la nature des sources. Ici, nous choisissons de travailler sur les paramètres $q_i$. Par suite, on suppose que tous les moments statistiques $\beta_i^{q_i}$ sont égaux. Dans la suite, ces derniers seront notés $\underline{\beta}$. Finalement, le problème d'identification s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{F}} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \ \frac{1}{2}\|\mathbf{X}-\mathbf{HF}\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i}\|\mathbf{L}_i\mathbf{F}_i\|_{q_i}^{q_i}, \tag{10}$$

où $\lambda = \frac{\alpha^2}{\underline{\beta}}$ est généralement appelé paramètre de régularisation. On remarque que l'on retrouve la méthode de régularisation de Tikhonov lorsque $q_i = 2$ pour tout $i \in [1, N]$.

# 3 Résolution du problème d'identification

Dans ce papier, la résolution du problème de miminisation (10) est réalisée grâce à une forme généralisée de l'algorithme des moindres carrés repondérés itérativement [2].

## 3.1 Principe

L'idée de base consiste à remplacer, dans le cadre d'un processus itératif, la minimisation d'une fonctionnelle de type $L_2 - L_{q_i}$, qui n'a pas de solution explicite, par celle d'une fonctionnelle de type $L_2 - L_2$ pour laquelle la solution à chaque itération possède une forme explicite. Pour cela, on part du fait que :

$$\forall x_i, \forall q, \ \frac{1}{q}\|x\|_q^q = \frac{1}{q}\sum_i |x_i|^q = \frac{1}{2}\sum_i w_i |x_i|^2, \tag{11}$$

où $w_i(x_i) = \frac{2}{q}|x_i|^{q-2}$ est appelée coefficient de pondération.

Dans le cadre d'un processus itératif, si l'on dipose de la solution $x^{(k)}$ à l'itération $k$, on va fixer la valeur du coefficient de pondération $w_i(x_i)$ à $w_i(x_i^{(k)})$ et l'on va chercher à déterminer la solution $x^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$, de manière à retrouver l'équalité (11) lorsque le processus a convergé. Ici, cela signifie que l'on va remplacer le problème de miminisation (10) par un processus itératif équivalent dont le champ excitateur $\widehat{F}^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$ est solution du problème de minimisation suivant :

$$\widehat{F}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{F}}{\operatorname{argmin}} \ \frac{1}{2}\|\mathbf{X}-\mathbf{HF}\|_2^2 + \frac{\lambda^{(k+1)}}{2}\sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{W}_i^{(k)^{1/2}}\mathbf{L}_i\mathbf{F}_i\|_2^2, \tag{12}$$

où $\mathbf{W}_i^{(k)}$ est une matrice définie positive, définie de la manière suivante :

$$\mathbf{W}_i^{(k)} = \operatorname{diag}\left[\frac{2}{q_i} T_\epsilon\left(\mathbf{L}_i\widehat{\mathbf{F}_i}^{(k)}\right)\right], \tag{13}$$

avec :

$$T_\epsilon(x^{(k)}) = \begin{cases} |x^{(k)}|^{q_i-2} \text{ si } x^{(k)} > \epsilon_i^{(k)} \\ {\epsilon_i^{(k)}}^{q_i-2} \text{ si } x^{(k)} \leq \epsilon_i^{(k)} \end{cases}, \tag{14}$$

où $\epsilon_i^{(k)}$ est un nombre réel positif agissant comme un paramètre d'amortissement, dans la mesure où il évite d'avoir des pondérations infinies lorsque $|x^{(k)}| \to 0$ et $q_i < 2$.

## 3.2 Choix des paramètres d'ajustements, de la solution initiale et du critère d'arrêt

D'après l'équation (12), les paramètres d'ajustements du problème sont les variables $q_i$, le paramètre de régularisation $\lambda^{(k+1)}$ et le paramètre $\epsilon_i^{(k)}$. Pour choisir correctement les variables $q_i$, il faut se rappeler

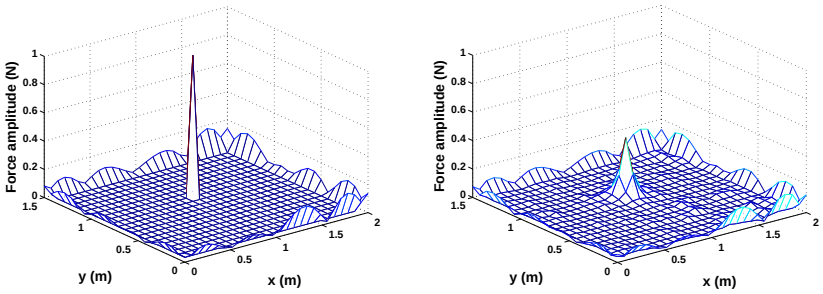
que ces paramètres contrôle la forme de la distribution de probabilité dans la zone considérée. Ainsi, en choisissant $q_i \geq 2$, on privilégiera des solutions réparties, alors qu'en choisissant $q_i \leq 1$, on privilégiera des solutions parcimonieuses (i.e. possédant très peu de valeurs non nulles).

Concernant le choix du paramètre de régularisation $\lambda^{(k+1)}$ à l'itération $k+1$, celui-ci est réalisé de manière automatique à partir de la méthode de la courbe en L [1]. Le paramètre $\epsilon_i^{(k)}$ est également choisi automatiquement. Sa valeur est fixée de manière à ce qu'un certain pourcentage $p_i$ des plus petites valeurs de $|\mathbf{L}_i\widehat{\mathbf{F}_i}^{(k)}|$ soient inférieures à $\epsilon_i^{(k)}$. Dans la suite, $p_i = 5\%$.

Enfin, comme l'algorithme utilisé est itératif, il est nécessaire de définir une solution initiale et un critère d'arrêt. Le choix de la solution initiale est l'un des points clés de la convergence de l'algorithme vers une solution non dénuée de sens, dans la mesure où la fonctionnelle à minimiser est non convexe si $q_i < 1$. Une bonne solution initiale est une solution du problème, éventuellement grossière, simple à calculer, mais suffisamment proche de la solution finale pour assurer la convergence du processus itératif. Ces conditions sont remplies par la solution de la méthode de régularisation de Tikhonov. Concernant le choix du critère d'arrêt, on utilise un critère classique consistant à arrêter le processus itératif lorsque l'évolution de la fonctionnelle $J(\mathbf{F}^{(k)}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{X}-\mathbf{H}\mathbf{F}^{(k)}\|_2^2 + \frac{\lambda^{(k)}}{2}\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{W}_i^{(k-1)^{1/2}}\mathbf{L}_i\mathbf{F}_i^{(k)}\|_2^2$ entre deux itération a atteint une certaine tolérance. Dans la suite, la tolérance est fixée à $10^{-6}$.

## 4 Validation numérique

On cherche ici à identifier une force ponctuelle harmonique, d'amplitude $\mathbf{F_0}$ unitaire, excitant en flexion une plaque d'acier de dimensions $2 \times 1.5 \times 0.017$ m$^3$ simplement appuyée sur ces quatres bords à la fréquence de 450 Hz. Les coordonnées de la force ponctuelle, mesurées par rapport au coin inférieur gauche de la plaque, sont $(x, y) = (1.04\text{ m}, 0.93\text{ m})$. De plus, pour simuler le champ vibratoire mesuré $\mathbf{X}$ (ici le champ de déplacement transverse), un modèle éléments finis de la plaque comprenant 567 éléments coques à 4 nœuds a été utilisé. Pour simuler le bruit mesure, un bruit additif gaussien a été ajouté au champ vibratoire. Le bruit de mesure a été calculé de manière à avoir un rapport signal-à-bruit de 6 dB. Enfin, pour réaliser l'identification, le modèle éléments finis décrit précédemment a été utilisé pour calculer la fonction de transfert $\mathbf{H}$ de la plaque à bords libre. De cette manière, il devient possible d'identifier non seulement la force ponctuelle, mais aussi les réactions aux limites.

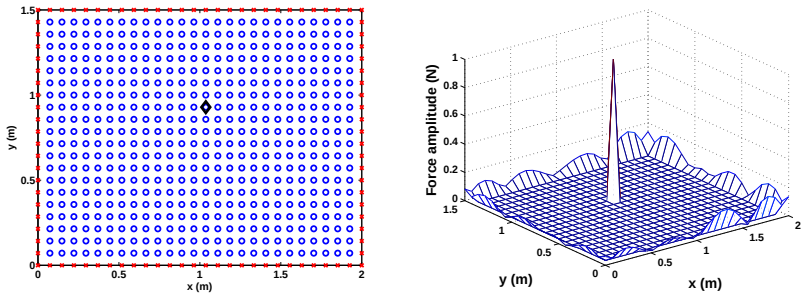



(a) (b)

FIGURE 1 – Validation numérique - (a) Champ excitateur $\mathbf{F}$ à identifier et (b) Champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}$ identifié par la régularisation de Tikhonov

La Figure 1 présente une comparaison du champ excitateur $\mathbf{F}$ à identifier [cf. Figure 1a] et du champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}$ identifié à partir de la méthode de régularisation classique de Tikhonov [cf. Figure 1b]. Cette comparaison montre la position de la force ponctuelle est estimée correctement, bien que son amplitude soit grandement sous-estimée. A l'inverse, les réactions d'appuis sont correctement identifiées. Ce résultat contrasté peut s'expliquer par le fait que l'a priori global utilisé favorise les solutions réparties. Pour améliorer le résultat obtenu, il faut utiliser l'information dont on dispose a priori sur la nature et la répartition des sources, à savoir un champ excitateur parcimonieux sauf aux limites de la structure où celui-ci est réparti. Par conséquent, la structure est divisée en deux zones d'identification,

une zone centrale contenant la force ponctuelle, dans laquelle la solution est supposée parcimonieuse ($q_1 = 0.5$), et une zone correspondant aux limites de la structure, dans laquelle la solution est supposée répartie ($q_2 = 2$) [cf. Figure 2a].




(a) (b)

FIGURE 2 – Validation numérique - (a) Définition des zones sélectionnées (○) zone 1 (solution parcimonieuse, $q_1 = 0.5$), (×) zone 2 (solution répartie, $q_2 = 2$) et (◊) position de la force et (b) Champ excitateur $\widehat{\mathbf{F}}$ identifié grâce à l'approche proposée avec $\mathbf{L_i} = \mathbf{Identité}$

La Figure 2b présente le champ excitateur obtenu à partir de l'approche proposée dans ce papier. La comparaison de ce résultat avec celui présenté en Figure 1b montre clairement que l'approche proposée permet d'identifier correctement non seulement la position et l'amplitude de la force ponctuelle ($\widehat{\mathbf{F}}_\mathbf{0} = 0.995$), mais également les réactions aux appuis.

## 5 Conclusions

L'objectif initial de ce papier était de proposer une formulation bayésienne du problème d'identification de sources vibratoires, capable d'exploiter pleinement l'information spatiale dont on dispose a priori sur la nature et la localisation des sources. Pour cela, la structure est divisée en différentes régions dans lesquelles on suppose que les a priori locaux sur les distributions de sources suivent des lois normales généralisées. Cette formulation est très flexible dans la mesure où les paramètres de ces lois peuvent être ajustés pour traduire finement l'a priori de l'expérimentateur dans les différentes zones définies. Formellement, la solution du problème inverse correspond à l'estimateur du maximum a posteriori. Pratiquement, on cherche la solution du problème dual, qui est équivalente à la solution recherchée et correspond à une forme généralisée de la régularisation de Tikhonov. La résolution de ce problème dual s'appuie sur l'utilisation d'un algorithme des moindres carrés repondérés itérativement. Les résultats numériques, présentés dans la dernière partie de ce papier, montrent que l'utilisation d'a priori locaux, traduisant une connaissance préalable, même grossière, sur la nature et la localisation des sources, permet d'améliorer significativement la qualité de l'identification.

## Références

[1] Hansen, P.C. 1998 Rank-Deficient and Discrete ill-Posed Problems : Numerical Aspects of Linear Inversion. *SIAM*

[2] Rodriguez, P., Wohlberg, B. 2006 An Iteratively Weighted Norm Algorithm for Total Variation Regularization. *In Proceedings of the 2006 Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, USA.

[3] Thite, A. N., Thompson, D. J. 2003 The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 2 : Use of regularization techniques. *J. Sound Vib.* **264 (2)** 433-451

[4] Zhang, E., Antoni, J., Feissel, P. 2012 Bayesian force reconstruction with an uncertain model *J. Sound Vib.* **331** 798-814