



**HAL**  
open science

# Quelques résultats mathématiques sur un système hyperbolique modélisant la chromatographie en phase gazeuse avec prise en compte de l'effet de sorption

Christian Bourdarias, Marguerite Gisclon, Stéphane Junca

## ► To cite this version:

Christian Bourdarias, Marguerite Gisclon, Stéphane Junca. Quelques résultats mathématiques sur un système hyperbolique modélisant la chromatographie en phase gazeuse avec prise en compte de l'effet de sorption. SMAI 2009, May 2009, La Colle sur Loup, France. hal-02301936

**HAL Id: hal-02301936**

**<https://hal.science/hal-02301936v1>**

Submitted on 30 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques résultats mathématiques sur un système hyperbolique modélisant la chromatographie en phase gazeuse avec prise en compte de l'effet de sorption

Christian BOURDARIAS, LAMA, Université de Savoie

Marguerite GISCLON, LAMA, Université de Savoie

Stéphane JUNCA, Labo J.A.D., Université de Nice.

## 1 Introduction

On examine un modèle utilisé pour la séparation de composants gazeux par adsorption isotherme sélective sur un substrat solide dans le domaine de la chromatographie, avec cinétique instantanée. L'effet de sorption (variations de vitesse liées au processus) est pris en compte via une contrainte de pression totale et la cinétique d'échange entre phases est supposée instantanée, [4]. Le système est de type hyperbolique à condition d'échanger les rôles de l'espace (en une dimension) et du temps.

Dans le cas de deux composés on obtient un système strictement hyperbolique  $2 \times 2$  avec données initiales et au bord, de la forme suivante, dans le quadrant  $t > 0, x > 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h(c)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial(u c)}{\partial x} + \frac{\partial I(c)}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c(0, x) = c_0(x) \in [0, 1], \quad x > 0 \\ c(t, 0) = c_b(t) \in [0, 1], \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u_b(t) > 0, \quad t > 0, \end{array} \right.$$

$u$  désigne la vitesse et  $c$  la concentration d'un composé. On décrit les invariants de Riemann et toutes les entropies, on évoque quelques résultats récents sur ce système hyperbolique nonlinéaire:

- existences de solutions entropiques avec vitesse  $L^\infty$  et concentrations  $BV$ , [2, 3],
- convergence du schéma de Godunov, [2, 3],
- structure stratifiée de la vitesse, application au passage de la limite faible sur la vitesse entrante et la limite forte sur la concentration dans le tube, [5],
- Exemple d'explosion de la vitesse dans  $L^\infty$  avec donnée dans  $L^\infty$  pour la concentration, [6],
- formulation cinétique et application au développement d'un schéma numérique, [7].

## 2 Le modèle

Pour une discussion plus détaillée sur le modèle, on renvoie à [4]. La **Chromatographie gaz-solide** est une technique d'analyse des mélanges gazeux.

“Le mélange analysé est vaporisé à l'entrée d'une colonne, qui renferme une substance active solide appelée phase stationnaire, puis il est transporté à travers celle-ci à l'aide d'un gaz porteur.

Les différentes molécules du mélange vont se séparer et sortir de la colonne les uns après les autres et après un certain laps de temps qui est fonction de l'affinité de la phase stationnaire avec ces molécules.” source: (Wikipedia)

Les équations de conservation de la masse sont:

$$\partial_t(c_i + \mathbf{q}_i) + \partial_x(u c_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Les  $\mathbf{q}_i$  et les  $c_i$  ne sont pas indépendants :

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^*(c_1, \dots, c_d)$$

$\mathbf{q}_i^*$  est la  $i^{eme}$  isotherme : résulte de considérations thermodynamiques ou de mesures .

Les inconnues sont donc la vitesse  $u$ , les concentrations en phase gazeuse  $c_i$  (en moles/m<sup>3</sup>)

$u$  est une inconnue contrairement la chromatographie liquide, voir les travaux de F. James & co, [13, 16, 17].

Voici quelques exemples d'isothermes:

**Isotherme linéaire :**  $\mathbf{q}_i^* = K_i c_i$ , avec  $K_i \geq 0$

**Isotherme de Langmuir :**  $\mathbf{q}_i^* = \frac{Q_i K_i c_i}{1 + \sum_{j=1}^d K_j c_j}$ , avec  $K_i \geq 0, Q_i > 0$

**Isotherme BET :** pour un seul gaz actif et un gaz inerte porteur

$$\mathbf{q}_i^* = \frac{Q K c_1}{(1 + K c_1 - (c_1/c_s))(1 - (c_1/c_s))}, \quad Q > 0, K > 0, c_s > 0,$$

On se concentre sur le cas de **deux composants**, avec  $\rho \equiv 1$  (ce qui n'est pas très restrictif) et  $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\partial_t(c_1 + \mathbf{q}_1^*(c_1, c_2)) + \partial_x(u c_1) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t(c_2 + \mathbf{q}_2^*(c_1, c_2)) + \partial_x(u c_2) = 0, \quad (2)$$

De plus la densité totale  $\rho$  ne dépend pas de  $x$  dans le processus. On prend  $\rho \equiv 1$  pour simplifier.

$$c_1 + c_2 = \rho = 1 \quad (3)$$

On pose alors  $c = c_1$  et  $\mathbf{q}_i(c) = \mathbf{q}_i^*(c, 1 - c)$ ,  $i = 1, 2$ .

(1) + (2) donne alors, avec (3):

$$\partial_t(q_1(c) + q_2(c)) + \partial_x u = 0$$

N.B. : les propriétés classiques des isothermes induisent :  $q_1' = \frac{dq_1}{dc} \geq 0$  et  $q_2' = \frac{dq_2}{dc} \leq 0$

Finalement, le système s'écrit:

$$\begin{cases} \partial_t(c + q_1(c)) + \partial_x(u c) = 0, \\ \partial_t h(c) + \partial_x u = 0, \end{cases}$$

avec  $h(c) = q_1(c) + q_2(c)$ , complété par des données initiales et entrantes :

$$\begin{cases} c(0, x) = c_0(x) \in [0, 1], & x > 0, \\ c(t, 0) = c_b(t) \in [0, 1], & t > 0, \\ u(t, 0) = u_b(t) > 0, & t > 0. \end{cases}$$

### 3 Hyperbolicité du système

L'analyse du système est faite en inversant les variables  $x$  et  $t$  (mais on ne les renomme pas) d'après [19]:

$$\begin{cases} \partial_x(u c) + \partial_t(c + q_1(c)) = 0, \\ \partial_x u + \partial_t h(c) = 0, \end{cases}$$

Les valeurs propres sont  $\mathbf{0}$  et  $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{H}(c)}{u}$  avec  $H(c) = 1 + (1 - c)q_1' - cq_2' \geq 1$

Le système est strictement hyperbolique pour  $u > 0$ , [14, 20]. De plus :

$$d\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} = \frac{H(c)}{u^2} f''(c)$$

avec  $\mathbf{r}$  : vecteur propre associé à  $\boldsymbol{\lambda}$  et

$$\mathbf{f}(c) = q_1(c) - c h(c) = \mathbf{q}_1 c_2 - \mathbf{q}_2 c_1$$

$\lambda$  est vraiment non linéaire quand  $f''' \neq 0$ .

Donnons quelques remarques sur la convexité de  $f$ , des isothermes et donc sur la vraie non linéarité de la valeur propre  $\lambda$ .

**Isotherme de Langmuir :**  $f''(c) = 2 \frac{(Q_2 K_2 - Q_1 K_1)(1+K_1)(1+K_2)}{(1+K_1 c + K_2 (1-c))^3}$  a un signe constant.

**Isotherme BET :** on suppose le composé 2 inerte, alors  $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = (\mathbf{1} - \mathbf{c}) \mathbf{q}_1(\mathbf{c})$  n'est ni concave ni convexe

A part certains cas importants : Langmuir, ammoniacque, vapeur d'eau, les isothermes sont généralement non convexes

**Interprétation chimique:** à chaque point d'inflexion de l'isotherme le composé adsorbé couvre le substrat et une nouvelle couche commence à se fixer

### 3.1 Invariants de Riemann

Des calculs sur les solutions régulières, [2], montrent que

$$\partial_x (u G(c)) = 0 \quad (4)$$

$$\partial_x c + \frac{H(c)}{u} \partial_t c = 0, \quad (5)$$

avec  $g'(c) = \frac{-h'(c)}{H(c)}$ ,  $G = \exp(g)$ . Le système admet donc les invariants de Riemann :

$$c \quad \text{et} \quad W = u G(c) = u e^{g(c)}.$$

Un autre écriture de l'invariant de Riemann  $W$  est particulièrement utile pour obtenir des estimations sur  $\inf u$  et sur  $u$  dans  $BV$ . C'est l'invariant de Riemann  $w = \ln(W) = \ln(u) + g(c)$ .

### 3.2 Entropies

Il existe une famille d'entropies régulières données par [3]:

$$S(c, u) = \phi(W) + u \psi(c),$$

$\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions régulières et  $W = u G(c)$ .

Les flux d'entropie correspondants satisfont

$$Q'(c) = h'(c) \psi(c) + H(c) \psi'(c)$$

Pour toute fonction régulière convexe  $\psi$ ,  $S = u \psi(c)$  est convexe, mais non strictement convexe !

Il y a des entropies strictement convexes de la forme  $S = \phi(W)$  si et seulement si  $G''$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ , voir [3].

En particulier  $S_\alpha(c, u) := u^\alpha G^\alpha(c)$  est une entropie croissante en  $W$  et strictement convexe si  $\alpha > 1$  et  $G''' > 0$ , ou  $\alpha < 1$  et  $G''' < 0$ .

En fait : si  $G''$  change de signe, il n'y a pas d'entropie strictement convexe.

On peut maintenant définir les solutions faibles entropiques.

#### Définition 3.1 [Solutions faibles entropiques]

Soient  $T > 0$ ,  $X > 0$ ,

$$u \in L^\infty((0, T) \times (0, X)) \text{ et } 0 \leq c(t, x) \leq 1 \text{ p.p. dans } (0, T) \times (0, X)$$

$(c, u)$  est une solution entropique si pour toute fonction convexe  $\psi$  :

$$\partial_x (u \psi(c)) + \partial_t Q(c) \leq 0$$

au sens des distributions, avec

$$Q' = H\psi' + h'\psi.$$

**Remarque :** si  $G''$  garde un signe constant sur  $[0, 1]$ ,  $(c, u)$  doit satisfaire :

$$\text{signe}(G'') \partial_x (u G(c)) \leq 0, \text{ sur } [0, 1]$$

### 3.3 Quand le système est-il de Temple?

Le système d'adsorption (1), (2), (3) a tant de propriété qu'il est naturel de se demander s'il appartient à la classe de Temple, [14, 20].

En général, on a montré que le système n'est pas dans la classe de Temple, [6]. En effet Supposons  $f'' > 0$ . Le système est de Temple si et seulement si  $\partial_x W = 0$  pour toute solution entropique ( $W = uG(c)$ ).

Exemples de cas où le système d'adsorption est dans la classe de Temple :

- si  $G'' = 0$  alors le système est de Temple.
- si  $q_1 = 0$  (gaz 1 inerte), le système est de Temple si et seulement si  $q_2'' = 0$ .

## 4 Problème de Riemann

Nous avons étudié le problème de Riemann du système d'adsorption (1), (2), (3) dans [2, 3]. On le pose sous la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_t h(c) & = 0, \\ \partial_x (uc) + \partial_t (c + q_1(c)) & = 0, \\ c(0, x) = c^- \in [0, 1], \quad x > 0, & \begin{cases} c(t, 0) = c^+ \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u^+ > 0, \end{cases} \quad t > 0 \end{cases}$$

et on cherche une solution faible autosimilaire :

$$c(t, x) = C(z), \quad u(t, x) = U(z) \quad \text{avec} \quad z = \frac{t}{x} > 0$$

### 4.1 Raréfactions

Supposons par exemple  $0 \leq a < c^- < c^+ < b \leq 1$  and  $f'' > 0$  in  $]a, b[$ . Alors la seule solution régulière autosimilaire est telle que :

$$\begin{cases} C(z) = c_-, & 0 < z < z_-, \\ \frac{dC}{dz} = \frac{H(C)}{z f''(C)} > 0, & z_- < z < z_+, \\ C(z) = c_+, & z_+ < z, \end{cases}$$

où  $z^+ = \frac{H(c^+)}{u^+}$ ,  $z^- = z^+ e^{-\Phi(c^+)}$  avec  $\Phi(c) = \int_{c^-}^c \frac{f''(\xi)}{H(\xi)} d\xi$

De plus  $u^- = \frac{H(c^-)}{z^-}$ , et  $U$  est donné par

$$\begin{cases} U(z) = u_-, & 0 < z < z_-, \\ U(z) = \frac{H(C(z))}{z}, & z_- < z < z_+, \\ U(z) = u_+, & z_+ < z. \end{cases}$$

## 4.2 Chocs

On cherche un choc admissible au sens de Liu, [14], car il y a des ondes composites.

Soit  $U^-$  un état donné.

Supposons que  $\lambda_i(U^-)$  soit une valeur propre simple et soit  $W_i(s)$  une  $i$ -courbe de choc passant par  $U^-$ .

Un  $i$ -choc de vitesse  $\sigma$  qui connecte  $U^- = W_i(0)$ , à gauche, à  $U^+ = W_i(1)$ , à droite, satisfait la condition d'entropie de Liu si

$$\forall \tau \in [0, 1] \quad \sigma \leq \sigma_i(\tau)$$

où  $\sigma_i(\tau)$  est la vitesse du choc  $(U^-, W_i(\tau))$

Si  $(c^-, c^+)$  satisfait le critère d'admissibilité alors le problème de Riemann admet une solution sous forme d'un choc défini par :

$$C(z) = \begin{cases} c^- & \text{if } 0 < z < s, \\ c^+ & \text{if } s < z \end{cases}, \quad U(z) = \begin{cases} u^- & \text{if } 0 < z < s, \\ u^+ & \text{if } s < z \end{cases},$$

où  $u^-$  et la vitesse  $s$  du choc sont donné par :

$$\frac{[f]}{u^- [c]} + \frac{1 + h^-}{u^-} = \sigma = \frac{[f]}{u^+ [c]} + \frac{1 + h^+}{u^+}$$

**Remarque fondamentale :** un choc connectant deux états  $U^-$  et  $U^+$  tels que  $c^- \neq c^+$  satisfait la condition d'admissibilité de Liu si et seulement si:

$$\text{pour tout } c \text{ entre } c^- \text{ et } c^+, \quad \frac{f(c^+) - f(c^-)}{c^+ - c^-} \leq \frac{f(c) - f(c^-)}{c - c^-}.$$

## 4.3 Discontinuité de contact

Deux états  $U^-$  et  $U^+$  sont connectés par une discontinuité de contact dans les deux cas suivants:

- pour la valeur propre 0:

$$c^- = c^+ \quad \& \quad u^- \neq u^+$$

- pour la valeur propre  $\lambda$  quand elle est linéairement dégénérée:

$$c^- \neq c^+, \quad u^- G(c^-) = u^+ G(c^+), \quad \text{et } f \text{ affine sur } [c^-, c^+].$$

Ces trois résultats pour résoudre le **problème de Riemann** ont déjà été trouvés formellement par une équipe de **chimistes**,[21].

En revanche, nous avons trouvé l'estimation clef suivante.

### Lemme 4.1 [ Estimation BV pour $\ln(u)$ à travers une $\lambda$ -onde], [3]

Soit  $U$  la solution du problème de Riemann  $(c^-, c^+, u^+)$ .

On suppose  $U^+ = (u^+, c^+)$  connecté à un état intermédiaire  $U^0$  par une  $\lambda$ -onde composite pour  $z^0 < z < z^+$  et  $U^0$  connecté à  $U^- = (u^-, c^-)$  par une 0-discontinuité de contact ( $c^0 = c^-$ ).

Alors il existe une constante  $\gamma$  dépendant seulement des fonctions  $q_1, q_2$  et de leurs dérivées telle que :

$$TV[\ln(u(z)), (z^0, z^+)] \leq \gamma |c^+ - c^0|.$$

## 5 Résultats mathématiques

Nous avons obtenu l'existence de solutions faibles à l'aide de schémas numériques. Nous avons découvert une structure stratifiée de la vitesse qui permet de passer à la limite faible sur la vitesse entrante.

## 5.1 Existence de solutions

Nous avons prouvé l'existence de solutions faibles entropiques à l'aide du schéma de Godunov, [2, 3], et de l'algorithme de suivi de front (FTA), [5].

Notre première approche a été d'utiliser le **schéma de Godunov** sous la condition (CFL) :

$$\sup_{[0, \Delta t] \times [0, \Delta x[} u = \max(u_-, u_+) < \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

des données BV pour la concentration, et une vitesse entrante seulement  $L^\infty$ . Noter que nous avons obtenu un rare résultat de convergence du schéma de Godunov pour un système  $2 \times 2$ .

### **Théorème 5.1 [Existence de solution faible entropique], [3]**

Soient  $X > 0, T > 0$ . si  $c_0 \in BV(0, X), c_b \in BV(0, T), u_b \in L^\infty(0, T)$

$$0 \leq c_0, c_b \leq 1 \quad \text{et} \quad \inf_{0 < t < T} u_b(t) > 0$$

Alors il existe une solution entropique  $(c, u)$  telle que :

$$\begin{aligned} 0 \leq c \leq 1, \quad |u| &\leq \|u_b\|_\infty \exp(\gamma TV(c_I)) \quad \text{et} \quad \inf u > 0 \\ c &\in L^\infty((0, T); BV(0, X)) \cap L^\infty((0, X); BV(0, T)) \\ c &\in Lip(0, T; L^1(0, X)) \cap Lip(0, X; L^1(0, T)) \\ \ln(u) &\in L^\infty((0, T); BV(0, X)) \end{aligned}$$

L'unicité a été obtenue dans le cas d'un gaz actif et d'un gaz inerte porteur dans une classe de fonctions "régulières par morceaux", mais avec des hypothèses restrictives sur les isothermes, [2].

## 5.2 Structure stratifiée de la vitesse

Pour notre deuxième approche, on a utilisé un schéma plus précis: le "**Front Tracking Algorithm**", [8, 14]. Cet algorithme (noté FTA) permet de montrer l'existence d'une solution entropique, avec une analyse plus fine de la régularité de la vitesse. On a ainsi obtenu dans [5]:

- Structure  $L_t^\infty \times BV_{t,x}$  de la vitesse
- Stabilité par rapport aux limites faibles en vitesses.

Cette approche est cependant limitée à  $f'' > 0$ , le cas où la valeur propre  $\lambda$  est vraiment non linéaire. Le cas d'ondes composites est plus difficile à traiter avec le FTA, [1, 14, 15].

Dans la suite,  $(u, c)$  est une solution entropique construite à partir du FTA, avec des données concentrations  $c_0, c_b$  à variation bornée. On s'intéresse à la régularité de la vitesse  $u$  :

### **Théorème 5.2 [Structure BV de la vitesse avec vitesse entrante $L^\infty$ ], [5]**

Si  $\ln u_b \in BV(0, T)$ , alors  $c \in BV((0, T) \times (0, X))$  et

$$u \in L^\infty((0, T), BV(0, X)) \cap L^\infty((0, X), BV(0, T)).$$

Si  $\ln u_b \in L^\infty(0, T)$ , alors  $u$  peut s'écrire

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_b(t) \times \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$$

avec

$$\ln v \in L^\infty((0, X), BV(0, T)) \cap L^\infty((0, T), BV(0, X)).$$

Cette structure stratifiée de la vitesse permet de propager des oscillations de grandes amplitudes pour la vitesse, [5], comme dans [9, 10, 11, 12, 18].

De plus, un résultat de stabilité découle de ce résultat. On peut passer à la limite faible sur la vitesse entrante et on obtient un passage à la limite forte sur la concentration qui vérifie un système d'adsorption moyenné.

**Corollaire 5.1 [Passage à la limite faible sur la vitesse entrante],[5]**

On se donne :

- des concentrations  $c_0$  (initiale) et  $c_b$  (entrante) à variation bornée
- une famille  $(u_b^\varepsilon)_{0 < \varepsilon < 1}$  de vitesses entrantes avec  $\ln(u_b^\varepsilon)$  borné dans  $L^\infty$  et t.q.

$$u_b^\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_b \text{ in } L^\infty(0, T) \text{ weak }^*.$$

- $(c^\varepsilon, u^\varepsilon)$  une solution entropique sur  $(0, T) \times (0, X)$  obtenue par le FTA, associée aux données ci-dessus.

Alors, à extraction près d'une sous suite :

$$\begin{aligned} c^\varepsilon(t, x) &\rightarrow c(t, x) \text{ dans } L^1([0, T] \times [0, X]), \\ u^\varepsilon(t, x) &\rightharpoonup u(t, x) \text{ dans } L^\infty([0, T] \times [0, X]) \text{ faible }^*, \\ u^\varepsilon(t, x) &= u_b^\varepsilon(t) \times v(t, x) + o(1) \text{ dans } L^1([0, T] \times [0, X]), \end{aligned}$$

avec  $v(t, x) = \frac{u(t, x)}{\bar{u}_b(t)}$  et  $(u(t, x), c(t, x))$  solution entropique associée aux données  $c_0(x)$ ,  $c_b(t)$  et  $\bar{u}_b(t)$ .

## 6 Travaux en cours

On a obtenu récemment d'une part un modèle cinétique, [7], et, d'autre part, on a découvert un nouveau phénomène de blow-up, [6].

### 6.1 Un modèle cinétique

On a obtenu une formulation partiellement cinétique du système d'adsorption.

**Théorème 6.1 [Formulation cinétique], [7]**

Si  $(u, c)$  est une solution faible entropique, alors il existe une mesure positive  $m(t, x, \xi)$  t.q. :

$$\partial_x(u \chi(c, \cdot)) + a(\xi) \partial_t \chi(c, \cdot) + \partial_t(h(c) \chi(c, \cdot)) = \partial_\xi m.$$

$$\text{où } \chi(c, \xi) := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \xi < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } a(\xi) = H(\xi) - h(\xi)$$

Inversement, s'il existe  $u > 0$  t.q.  $\ln u \in L^\infty$ , une fonction  $f(t, x, \xi) \in L^1_\xi$  t.q.  $f$  soit une fonction indicatrice, et une mesure positive  $m$  t.q.

$$\partial_x(u f(t, x, \xi)) + a(\xi) \partial_t f(t, x, \xi) + \partial_t(h(c) f(t, x, \xi)) = \partial_\xi m$$

alors  $(u, c)$  est une solution **entropique**, avec  $c(t, x) = \int_0^1 f(t, x, \xi) d\xi$

Cette formulation nous a permis de trouver un **schéma cinétique** pour palier aux ondes composites difficilement solubles par un schéma de Godunov en pratique.

## 6.2 Un exemple de "Blow up" doublement caractéristique

Sous les hypothèses :

$G'' < 0$ ,  $h'$  et  $f''$  ne s'annulent pas, et le système n'est pas de Temple,

on a construit dans [6] une solution pour laquelle  $\|u(\cdot, x)\|_{L^\infty(0,T)} \rightarrow +\infty$  en "pseudo temps"  $x$  fini, pour des données initiales arbitrairement petites.

L'hypothèse  $G'' < 0$  est cruciale car alors  $\partial_x W \geq 0$  et  $u$  peut exploser.

De plus cette hypothèse est vérifiée pour l'ammoniaque et la vapeur d'eau et, plus généralement dans le cas d'un gaz inerte et d'une isotherme strictement convexe pour le gaz actif.

Ce phénomène montre qu'une théorie  $L^\infty$  ne peut pas aboutir sans hypothèses supplémentaires. De plus cette explosion survient au bord du domaine qui devient doublement caractéristique. Cela conduit à d'autres pistes de réflexions: la solution est-elle prolongeable en dehors du bord? avec des hypothèses supplémentaires sur les données au bord, une théorie  $L^\infty$  est-elle possible?

### Références

- [1] P. BAITI AND H. K. JENSSEN, *Well-posedness for a class of  $2 \times 2$  conservation laws with  $L^\infty$  data*, J. Differential Equations, 140(1):161-185, 1997.
- [2] C. BOURDARIAS, M. GISCLON AND S. JUNCA. *Some mathematical results on a system of transport equations with an algebraic constraint describing fixed-bed adsorption of gases*. J. Math. Anal. Appl., 313 : 551 – 571, 2006.
- [3] C. BOURDARIAS, M. GISCLON AND S. JUNCA. *Existence of Weak Entropy Solutions for Gas Chromatography system with one or two active species and non Convex Isotherms*. Commun. Math. Sci., Vol. 5, no 1, 2007.
- [4] C. BOURDARIAS, M. GISCLON AND S. JUNCA. *Hyperbolic models in gas-solid chromatography*. Bol. Esp. Mat. Apl., no 43, 29 – 57, 2008.
- [5] C. BOURDARIAS, M. GISCLON AND S. JUNCA. *Strong Stability with respect to weak limit for a Hyperbolic System arising from Gas Chromatography*. preprint 2009.
- [6] C. BOURDARIAS, M. GISCLON, S. JUNCA. *Blow up for a  $2 \times 2$  strictly hyperbolic system from chemical engineering hyperbolic system arising in gas chromatography*. in preparation.
- [7] C. BOURDARIAS, M. GISCLON, S. JUNCA. *A kinetic scheme for a  $2 \times 2$  hyperbolic system arising in gas chromatography*. in preparation.
- [8] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 20. Oxford University Press, Oxford, (2000)*.
- [9] C. Cheverry, O. Guès and G. Métivier, *Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear hyperbolic systems*. *Adv. Differential Equations*, 9, no. 7-8, 829–890, (2004).
- [10] C. Cheverry, O. Guès and G. Métivier, *Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré*. (French) [Strong oscillations on a linearly degenerate field]. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) 36, no. 5, 691-745, (2003).
- [11] A. Corli, O. Guès. *Local existence of stratified solutions to systems of balance laws*. Workshop on Partial Differential Equations (Ferrara, 1999). *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)* 45 (1999), suppl., 109-119 (2000).
- [12] A. Corli, O. Guès. *Stratified solutions for systems of conservation laws*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 353, no. 6, 2459-2486, (2001).
- [13] E. Canon and F. James. *Resolution of the Cauchy problem for several hyperbolic systems arising in chemical engineering*. *Ann. I.H.P. Analyse non linéaire*, 9(2):219–238, 1992.

- [14] C. Dafermos. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum physics. *Springer*, Heidelberg, (2000).
- [15] O. Glass, P.-G. Le Floch. Nonlinear hyperbolic systems: non-degenerate flux, inner speed variation and graph solutions. *Archive for Rational Mechanic Analysis* , 185, p. 409-480, (2007).
- [16] F. James. *Sur la modélisation mathématique des équilibres diphasiques et des colonnes de chromatographie*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1990.
- [17] F. James. Convergence results for some conservation laws with a reflux boundary condition and a relaxation term arising in chemical engineering. *SIAM J. Num. Anal.*, 1997.
- [18] A. Museux. Stratified weak solutions of the 1-D Lagrangian Euler equations are viscosity solutions. *Adv. Differential Equations*, 9, no. 11-12, 1395-1436, (2004).
- [19] P. Rouchon, M. Sghoener, P. Valentin and G. Guiochon. Numerical Simulation of Band Propagation in Nonlinear Chromatography. *Vol. 46 of Chromatographic Science Series.*, Eli Grushka, Marcel Dekker Inc., New York, (1988).
- [20] D. Serre. Systèmes de lois de conservation I. *Diderot Editeur, Arts et Sciences*, (1996).
- [21] M. Douglas Le Van, C.-A. Costa, A.-E. Rodrigues, A. Bossy and D. Tondeur. Fixed-bed adsorption of gases: Effect of velocity variations on transition types. *AIChE Journal*, 34(6):996-1005, (1988).

**Christian BOURDARIAS**, Université de Savoie, LAMA, UMR CNRS 5127, 73376 Le Bourget-du-Lac,  
 bourdarias@univ-savoie.fr

**Marguerite GISCLON**, Université de Savoie, LAMA, UMR CNRS 5127, 73376 Le Bourget-du-Lac,  
 gisclon@univ-savoie.fr

**Stéphane JUNCA**, Labo Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose,  
 06108 Nice Cedex 02  
 junca@unice.fr