

Modélisation numérique de la propagation des ondes guidées dans des milieux périodiques multi-hélicoïdaux

Changwei ZHOU¹, Fabien TREYSSÈDE¹, Patrice CARTRAUD²

¹GeoEND, GERS, IFSTTAR

²GeM, Centrale Nantes

14ème Congrès Français d'Acoustique
23-27, Avril, Le Havre



1 Introduction

- Contexte
- Objectif

2 Développement théorique

- Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
- Système de coordonnées multi-hélicoïdales
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal

3 Validation numérique

- Application mono-dimensionnelle sur un brin
- Application bi-dimensionnelle sur une coque

4 Conclusions et perspectives

Table des matières

1 Introduction

- Contexte
- Objectif

2 Développement théorique

- Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
- Système de coordonnées multi-hélicoïdales
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal

3 Validation numérique

- Application mono-dimensionnelle sur un brin
- Application bi-dimensionnelle sur une coque

4 Conclusions et perspectives

Contexte

Ondes guidées mécaniques pour l'évaluation non destructive (END) :

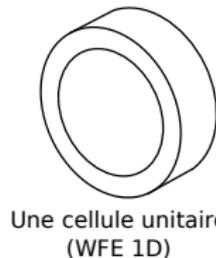
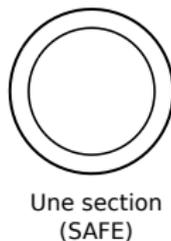
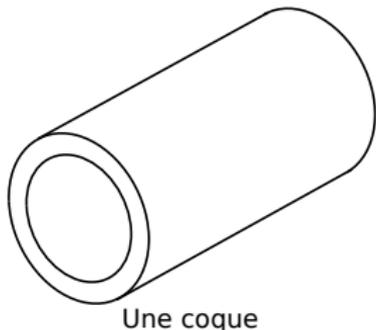
- susceptibles de se propager sur de longues distances
- sensibles à des défauts de petite taille

La nécessité d'avoir des modèles de propagation :

- les ondes guidées sont multimodales et dispersives
- utile pour le dimensionnement des techniques d'END

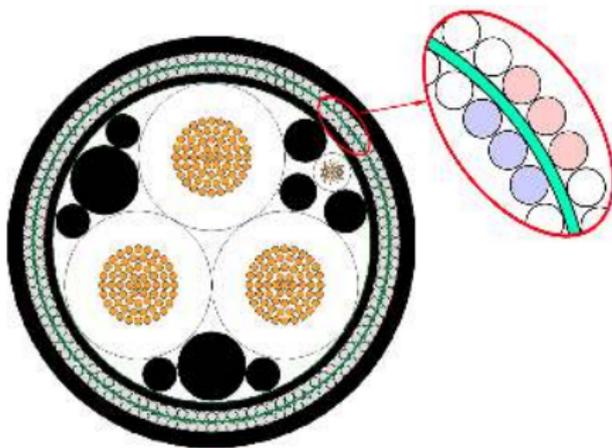
Les méthodes existantes :

- Semi-Analytical Finite Element (SAFE) method modélise juste **une section**
- Wave Finite Element method (WFE) modélise **une cellule unitaire**

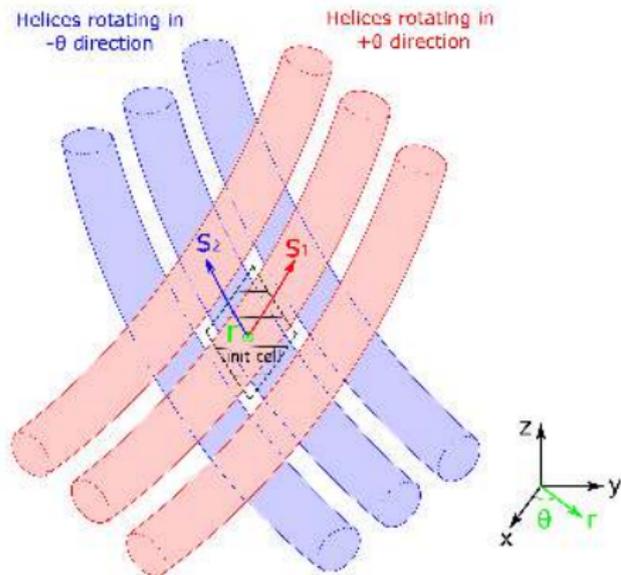


Objectif

- END pour les deux couches d'armure des câbles ombilicaux.
- Développer la théorie pour étudier de la propagation d'onde dans des milieux périodiques multi-hélicoïdaux.



Câbles ombilicaux de transport d'électricité



La géométrie multi-hélicoïdale

Table des matières

1 Introduction

- Contexte
- Objectif

2 Développement théorique

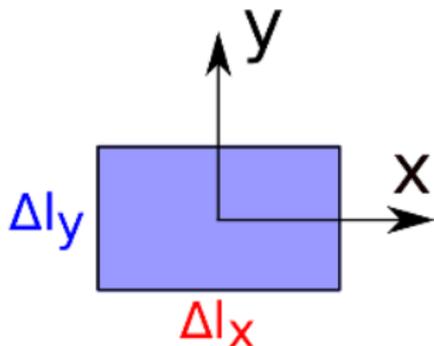
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
- Système de coordonnées multi-hélicoïdales
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal

3 Validation numérique

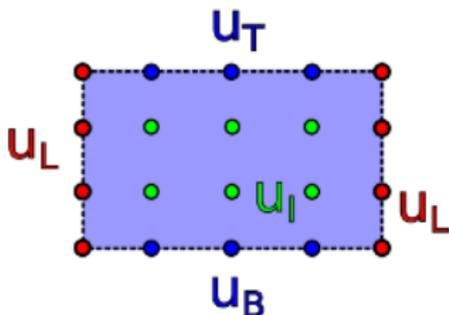
- Application mono-dimensionnelle sur un brin
- Application bi-dimensionnelle sur une coque

4 Conclusions et perspectives

WFE dans un milieu périodique plan



Cellule unitaire



Cellule unitaire discrétisée

Équation d'équilibre d'une cellule :
(En coordonnées cartésiennes)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} = \mathbf{f}$$

Classification des degré de liberté :
[**L**eft, **R**ight, **B**ottom, **T**op, **I**nterne]

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_B \\ \mathbf{f}_T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_I = \mathbf{0}$ en absence de force externe

La condition limite de périodicité (théorème de Floquet-Bloch)

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_R &= \lambda_x \mathbf{U}_L, & \mathbf{U}_T &= \lambda_y \mathbf{U}_B \\ \mathbf{f}_R &= -\lambda_x \mathbf{f}_L, & \mathbf{f}_T &= -\lambda_y \mathbf{f}_B\end{aligned}$$

où $\lambda_x = \exp(ik_x \Delta l_x)$ et $\lambda_y = \exp(ik_y \Delta l_y)$

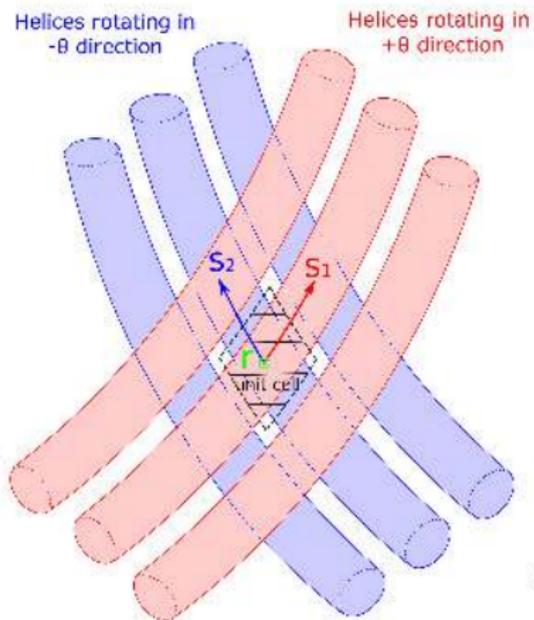
$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_R \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix}$$

L'équation aux valeurs propres ω à résoudre :

$$(-\omega^2 \mathbf{\Lambda}_R^* \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_R + \mathbf{\Lambda}_R^* \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}_R) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

—> Les ondes de Bloch $(\omega, k_x, k_y, \mathbf{U})$

Mais qu'est ce qu'on fait avec ça ?



Quelques notations d'hélice

Équation d'une hélice (tournant dans $+\theta$) :

$$\mathbf{OM}(s) = R \cos\left(2\pi \frac{s}{l}\right) \mathbf{e}_x + R \sin\left(2\pi \frac{s}{l}\right) \mathbf{e}_y + L \frac{s}{l} \mathbf{e}_z$$

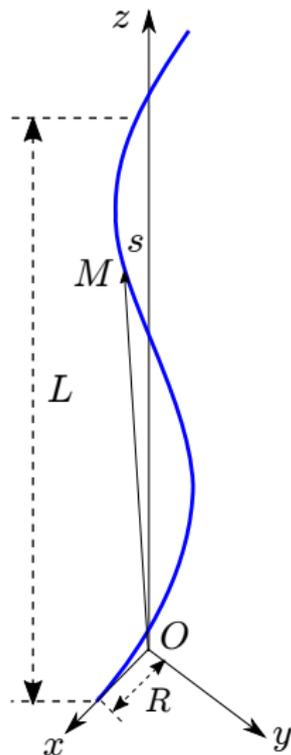
s : coordonnée le long d'hélice

R : rayon du centre d'hélice

θ : angle de l'hélice par rapport à l'axe z

$L = 2\pi R / \tan \theta$: longueur d'une période suivant z

$l = \pi R / \sin \theta$: longueur curviligne d'une période



Le système de coordonnées proposé (s_1, s_2, r)

Relation avec les coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} r = r \\ z = L_1 \frac{s_1}{l_1} + L_2 \frac{s_2}{l_2} \\ \theta = 2\pi \left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2} \right) \end{cases}$$

Position d'un point de l'espace :

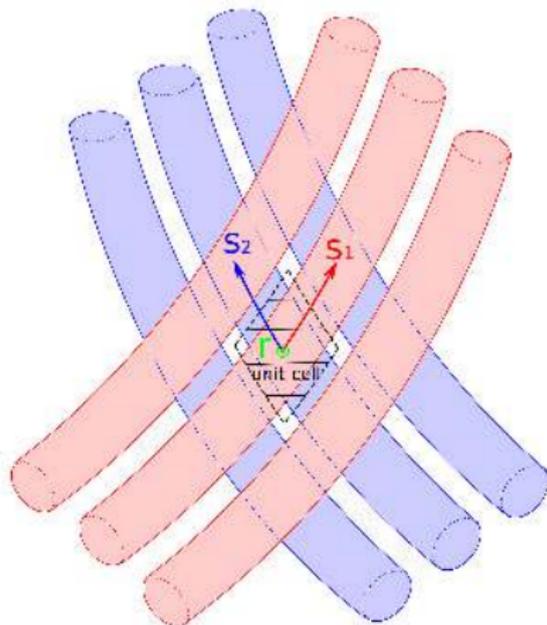
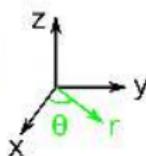
$$\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z$$

$$= r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

$$= r \cos\left(2\pi\left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}\right)\right) \mathbf{e}_x +$$

$$r \sin\left(2\pi\left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}\right)\right) \mathbf{e}_y +$$

$$\left(L_1 \frac{s_1}{l_1} + L_2 \frac{s_2}{l_2}\right) \mathbf{e}_z$$



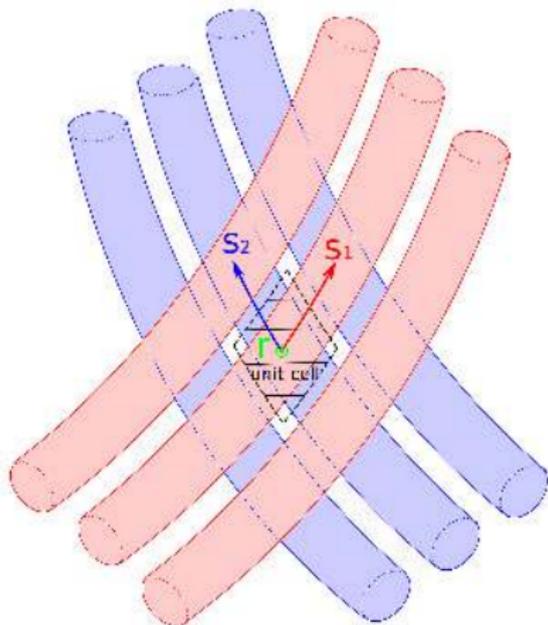
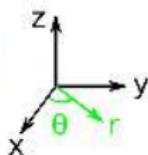
Le système de coordonnées proposé (s_1, s_2, r)

Relation avec les coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} r = r \\ z = L_1 \frac{s_1}{l_1} + L_2 \frac{s_2}{l_2} \\ \theta = 2\pi \left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2} \right) \end{cases}$$

Position d'un point de l'espace :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z \\ &= r \cos \theta \mathbf{e}_x + r \sin \theta \mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= r \cos\left(2\pi\left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}\right)\right)\mathbf{e}_x + \\ &\quad r \sin\left(2\pi\left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}\right)\right)\mathbf{e}_y + \\ &\quad \left(L_1 \frac{s_1}{l_1} + L_2 \frac{s_2}{l_2}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$



Questions : Peut-on appliquer le théorème de Floquet-Bloch dans ce système ? Si oui, comment ?

Propriété du système multi-hélicoïdal

Variation du vecteur position :

$$\begin{aligned}d\mathbf{OM} &= \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_z dz \\ &= \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\theta \left(\frac{2\pi}{l_1} ds_1 - \frac{2\pi}{l_2} ds_2 \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{L_1}{l_1} ds_1 + \frac{L_2}{l_2} ds_2 \right) \\ &= \mathbf{e}_r dr + \left(\frac{2\pi r}{l_1} \mathbf{e}_\theta + \frac{L_1}{l_1} \mathbf{e}_z \right) ds_1 + \left(-\frac{2\pi r}{l_2} \mathbf{e}_\theta + \frac{L_2}{l_2} \mathbf{e}_z \right) ds_2\end{aligned}$$

Les vecteurs de la base covariante sont donc :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_1} = \frac{2\pi r}{l_1} \mathbf{e}_\theta + \frac{L_1}{l_1} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_2} = -\frac{2\pi r}{l_2} \mathbf{e}_\theta + \frac{L_2}{l_2} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \end{cases}$$

Propriété du système multi-hélicoïdal

Expression du tenseur métrique : $(\mathbf{g})_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$

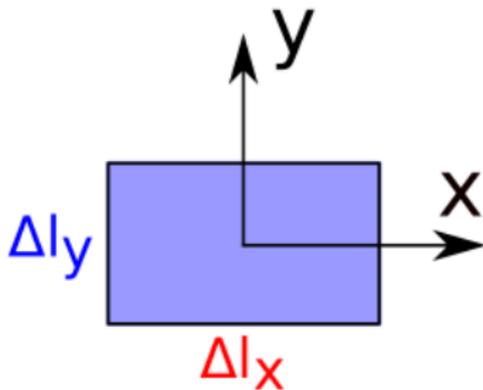
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{4\pi^2 r^2 + L_1^2}{l_1^2} & \frac{-4\pi^2 r^2 + L_1 L_2}{l_1 l_2} & 0 \\ \frac{-4\pi^2 r^2 + L_1 L_2}{l_1 l_2} & \frac{4\pi^2 r^2 + L_2^2}{l_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indépendant de s_1, s_2

→ La périodicité des coefficients des équations à résoudre est préservée.

→ Ils existent des ondes de Bloch suivant s_1 et s_2 .

Définition de la cellule unitaire



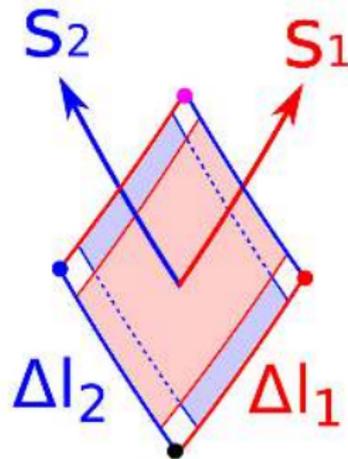
Cellule unitaire pour un milieu plan

Frontière gauche et droite :

$$x = \pm \Delta l_x / 2$$

Frontière arrière et avant :

$$y = \pm \Delta l_y / 2$$



Cellule unitaire multi-hélicoïdale

Frontière gauche et droite :

$$s_1 = \pm \Delta l_1 / 2$$

Frontière arrière et avant :

$$s_2 = \pm \Delta l_2 / 2$$

-> Non planes ! ("rampes" hélicoïdales)

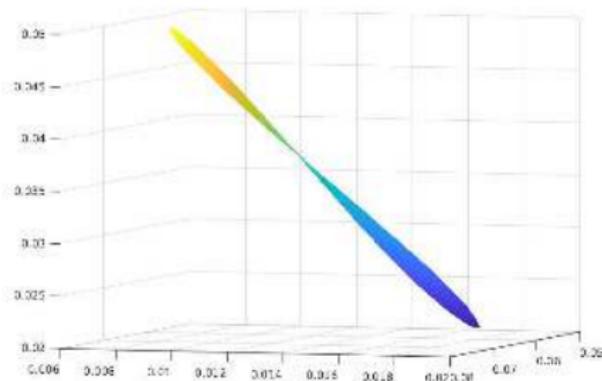
Frontière droite de l'hélice S1

Pour obtenir la surface de la coupe, on doit résoudre s_1 tel que :

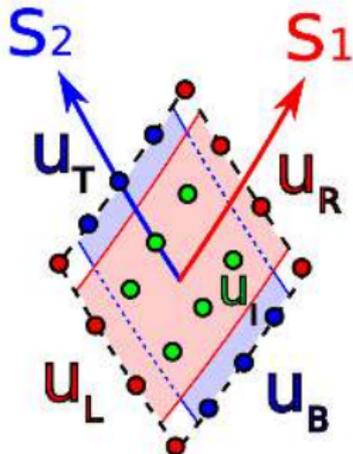
$$\begin{aligned} (R_1 + \rho_1 \cos \varphi_1) \cos\left(2\pi \frac{s_1}{l_1}\right) - \rho_1 \sin \varphi_1 \frac{L_1}{l_1} \sin\left(2\pi \frac{s_1}{l_1}\right) = \\ \sqrt{(R_1 + \rho_1 \cos \varphi_1)^2 + \left(\rho_1 \sin \varphi_1 \frac{L_1}{l_1}\right)^2} \\ \cos\left(\pi \frac{\Delta l_1}{l_1}\right) + \pi \frac{L_1}{L_2} \frac{\Delta l_1}{l_1} - 2\pi \frac{L_1}{L_2} \frac{s_1}{l_1} + \frac{4\pi^2 R_1 \rho_1}{L_2 l_1} \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

avec $\rho_1 \in [0, a_1]$ and $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.

→ La surface de la coupe n'est pas plane !



WFE dans un milieu périodique multi-hélicoïdal



Équation d'équilibre d'une cellule :
(En coordonnées cartésiennes)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} = \mathbf{f}$$

Classification des degré de liberté :
[Left, Right, Bottom, Top, Interne]

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \\ \mathbf{f}_B \\ \mathbf{f}_T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_I = \mathbf{0}$ en absence de force externe

Projection des composantes des vecteurs

Attention : Les conditions de Floquet-Bloch ne peuvent pas être écrites sur les composantes cartésiennes. Il faut les projeter sur la base covariante/contravariante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi r}{l_1} \sin \theta & \frac{2\pi r}{l_1} \cos \theta & \frac{L_1}{l_1} \\ \frac{2\pi r}{l_2} \sin \theta & -\frac{2\pi r}{l_2} \cos \theta & \frac{L_2}{l_2} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}$$

Les matrices \mathbf{J} forment une matrice diagonale par bloc \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_R^{-1} \mathbf{U}_R &= \lambda_1 \mathbf{J}_L^{-1} \mathbf{U}_L, & \mathbf{J}_T^{-1} \mathbf{U}_T &= \lambda_2 \mathbf{J}_B^{-1} \mathbf{U}_B \\ \mathbf{J}_R^T \mathbf{f}_R &= -\lambda_1 \mathbf{J}_L^T \mathbf{f}_L, & \mathbf{J}_T^T \mathbf{f}_T &= -\lambda_2 \mathbf{J}_B^T \mathbf{f}_B \end{aligned}$$

L'équation aux valeurs propres ω à résoudre :

$$\left(-\omega^2 \mathbf{\Lambda}_R^* \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_R + \mathbf{\Lambda}_R^* \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}_R \right) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(ik_1 \Delta l_1) = \exp\left(ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_1}{l_1} + ik_z \frac{L_1 \Delta l_1}{l_1}\right) \\ \lambda_2 = \exp(ik_2 \Delta l_2) = \exp\left(-ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_2}{l_2} + ik_z \frac{L_2 \Delta l_2}{l_2}\right) \end{cases}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(ik_1 \Delta l_1) = \exp\left(ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_1}{l_1} + ik_z \frac{L_1 \Delta l_1}{l_1}\right) \\ \lambda_2 = \exp(ik_2 \Delta l_2) = \exp\left(-ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_2}{l_2} + ik_z \frac{L_2 \Delta l_2}{l_2}\right) \end{cases}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(ik_1 \Delta l_1) = \exp\left(ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_1}{l_1} + ik_z \frac{L_1 \Delta l_1}{l_1}\right) \\ \lambda_2 = \exp(ik_2 \Delta l_2) = \exp\left(-ik_\theta \frac{2\pi \Delta l_2}{l_2} + ik_z \frac{L_2 \Delta l_2}{l_2}\right) \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2\pi}{l_1} k_\theta + \frac{L_1}{l_1} k_z \\ k_2 = -\frac{2\pi}{l_2} k_\theta + \frac{L_2}{l_2} k_z \end{cases}$$

Par analogie avec le cas cylindrique, $k_\theta = n$. n correspond à différent ordre circonférentiel.

Donc on peut fixer $k_\theta = n$ et faire varier k_z (qui détermine λ_1 et λ_2), pour résoudre ω .

Table des matières

1 Introduction

- Contexte
- Objectif

2 Développement théorique

- Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
- Système de coordonnées multi-hélicoïdales
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal

3 Validation numérique

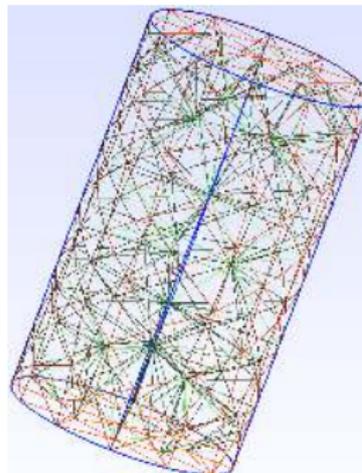
- Application mono-dimensionnelle sur un brin
- Application bi-dimensionnelle sur une coque

4 Conclusions et perspectives

Validation sur un brin



Un brin hélicoïdal selon S1



Référence^[1] : système
'mono'-hélicoïdal (Serret-Frenet)
avec cellule coupée \perp à S1



Système multi-hélicoïdal : cellule
coupée par $s_1 = \pm \Delta l_1 / 2$

[1]. Treyssède, F. (2007). Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides. The Journal of the Acoustical Society of America, 121(6), 3398–408.

Courbes de dispersion (ω, k) ou (c_e, k)

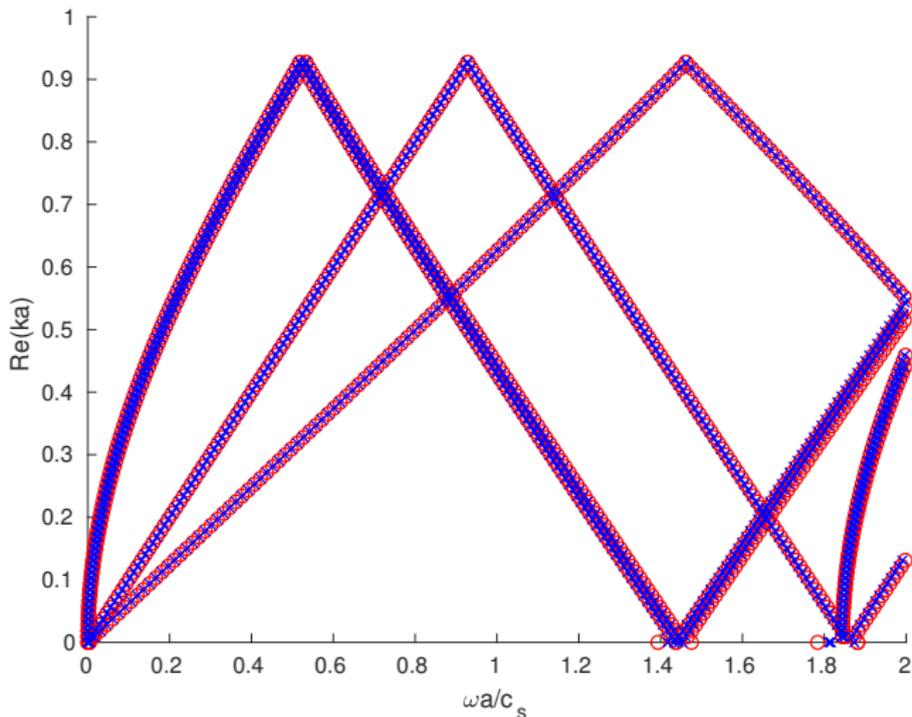


Figure – Référence (○), Système multi-hélicoïdal (×)

Courbes de dispersion (ω, k) ou (c_e, k)

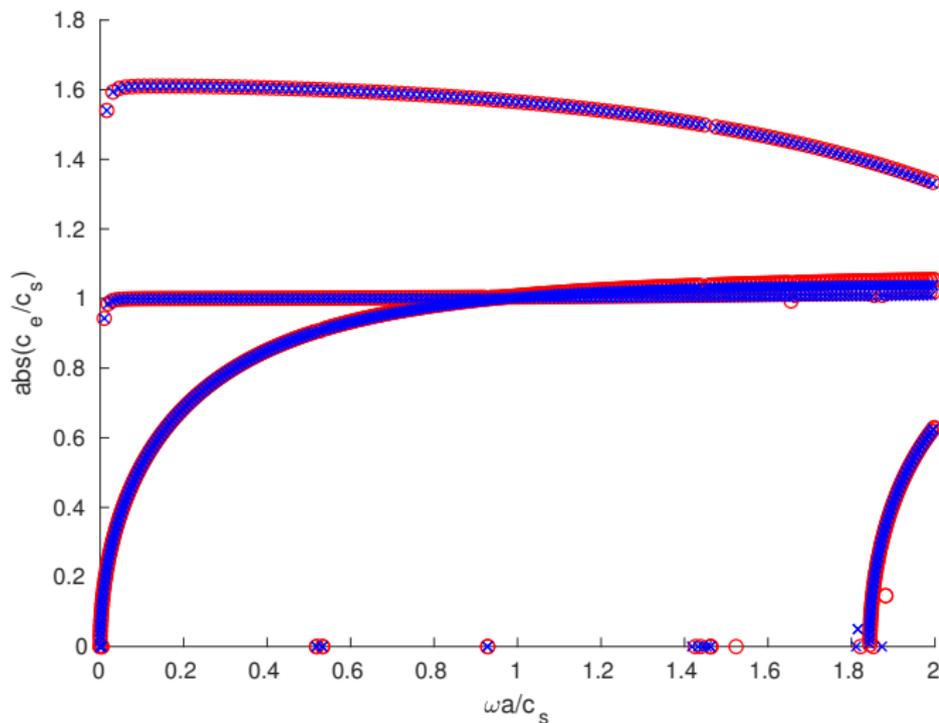
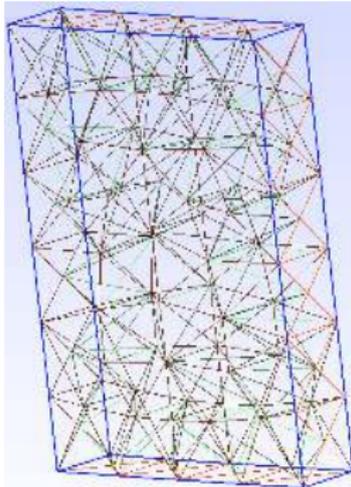


Figure – Référence (○), Système multi-hélicoïdal (×)

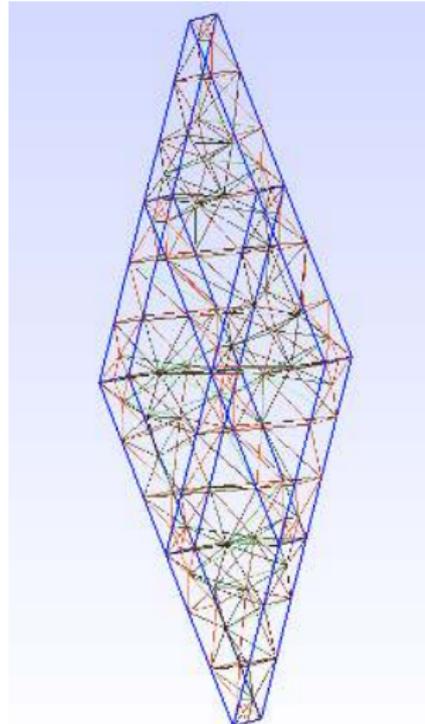
Validation sur une coque



Une coque



Référence : coupe droite
(i.e. selon θ et z)



Système multi-hélicoïdal : cellule coupée
par $s_1 = \pm\Delta l_1/2$ et $s_2 = \pm\Delta l_2/2$

Courbes de dispersion

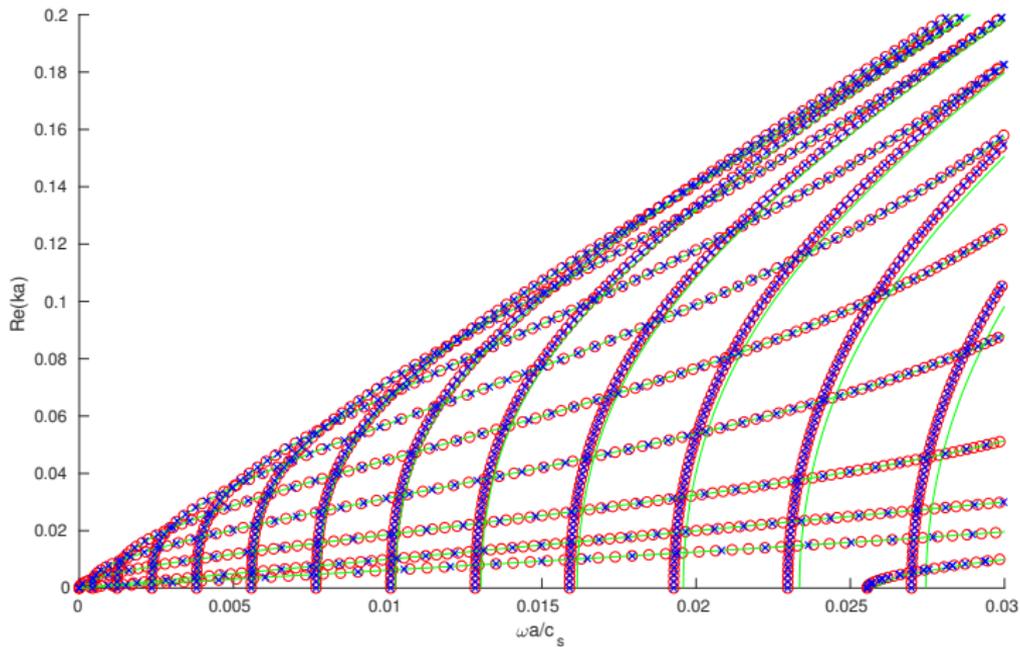


Figure – Référence (○), système multi-hélicoïdal (×), Analytique Flugge (—)

Courbes de dispersion

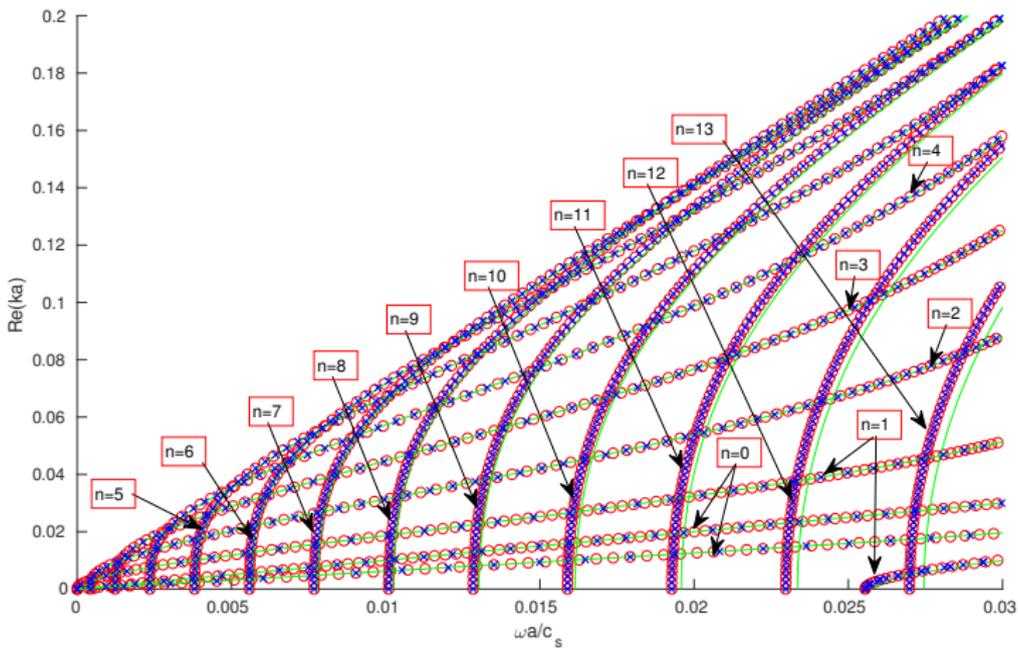


Figure – Référence (○), système multi-hélicoïdal (×), Analytique Flugge (—)

Table des matières

1 Introduction

- Contexte
- Objectif

2 Développement théorique

- Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
- Système de coordonnées multi-hélicoïdales
- Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal

3 Validation numérique

- Application mono-dimensionnelle sur un brin
- Application bi-dimensionnelle sur une coque

4 Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Développement théorique
- Implémentation numérique
- Validations préliminaires sur un brin (1D) et une coque (2D)

Travaux futurs

- Étude numérique sur les deux couches d'hélices (en simplifiant le contact)
- Validation expérimentale