



**HAL**  
open science

# LE LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Christophe Hache

► **To cite this version:**

Christophe Hache. LE LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES. 18e école d'été de didactique des mathématiques (ARDM), Aug 2015, Brest, France. hal-02292633

**HAL Id: hal-02292633**

**<https://hal.science/hal-02292633>**

Submitted on 20 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LE LANGAGE DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Christophe Hache  
Laboratoire de didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot  
IREM de Paris, groupe « Léo (langage, écrit, oral) »  
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

Ce séminaire a pour objectif de présenter des travaux en cours. Mes questions de recherche portent sur les pratiques langagières des mathématiciens, et sur le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En m'appuyant sur des référents logiques je mets en évidence certaines spécificités des pratiques langagières courantes en mathématiques. Je décris la façon dont je relie ces pratiques à certaines difficultés des élèves ou des étudiants. Ces analyses permettent aussi de caractériser certaines pratiques professionnelles des enseignants (notamment lors de séances « de cours »). Les corpus utilisés sont de nature diverses (manuels du secondaire ou du supérieur, rédactions de preuves par des mathématiciens, copies d'étudiants, vidéo de cours magistraux à l'Université).

## COLLECTIFS DE RECHERCHE

Je présente ici le contexte de la recherche en lien avec les collectifs de recherche dans lesquels elle se déroule. Je cite quatre collectifs de recherche :

Le projet Lemme. Suite aux travaux de la 16<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques dont un des deux thèmes était « Le langage dans les théories et recherches en didactique des mathématiques » (voir Bronner 2013), nous<sup>1</sup> avons poursuivi la réflexion, notamment pour préciser les fondements théoriques possibles d'une prise en compte du langage dans des travaux de recherche en didactique des mathématiques. On trouvera des traces de ces recherches dans les écrits des différents membres du groupe, et par exemple dans le numéro spécial sur le langage dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques parut en 2014 (voir Barrier et Mathé 2014).

Travaux à l'interface entre didactique et logique, entre didactique, logique et langage. En lien avec les travaux de Daniel Lacombe, René Cori et Zoé Mesnil (voir Mesnil 2014), mais aussi de Viviane Durand Guerrier et Thomas Barrier (voir par exemple les actes de la 16<sup>e</sup> école d'été déjà cités), j'effectue des analyses des pratiques langagières des mathématiciens à l'aide de référents logiques, que ce soit à propos de formulations de proposition<sup>2</sup> mathématiques (voir Hache 2015) ou de preuves (voir Hache à paraître, et Hache et Mesnil à paraître).

Enseignement supérieur. Le « groupe sup' »<sup>3</sup> rassemble des chercheurs travaillant sur l'enseignement et l'apprentissage dans l'enseignement supérieur. Une des thématiques travaillée concernait les méthodologies d'analyse des cours d'amphithéâtre et est à l'origine d'un travail plus systématique entrepris avec Nicolas Grenier Boley et Stéphanie Bridoux sur

---

<sup>1</sup>Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Anne-Cécile Mathé, Joris Mithalal et moi. Voir <http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/lemme>

<sup>2</sup>J'appelle « proposition » des affirmations de faits concernant des objets mathématiques. Une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse (« susceptible » au sens où je pourrai décider de la véracité de la proposition en affectant une valeur aux variables libres par exemple).

<sup>3</sup><http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/theme-recherche/enseignement-superieur>

l'introduction de définitions en cours et l'appropriation du formalisme sous-jacent par les étudiants. C'est une des études effectuées qui est présentée ici.

Moments d'exposition des connaissances. Un certain nombre de recherches sont menées autour d'Aline Robert sur les moments d'exposition de connaissance, notamment au travers de la notion de proximité (voir Robert et Vandebrouck 2014, et la thèse de Cécile Allard, Allard 2015). Le travail présenté dans ce séminaire a déjà été décrit, en interaction avec les travaux d'Aline Robert et Monique Pariès, dans un Cahier du laboratoire de didactique André Revuz (voir Bridoux et al. 2015).

### POSITIONNEMENT

#### *Approche du langage*

Le langage est la faculté qu'ont les hommes et les femmes de s'exprimer et de communiquer à l'aide de signes (vocaux ou graphiques) constituant une langue. La langue est vue ici comme un système partagé relativement stable de mots, muni de règles de syntaxes et de grammaire. Parler (ou écrire) est une activité qui est de façon indissociable individuelle (ne serait-ce que physiquement) et sociale (y compris dans un monologue). Dans ces deux dimensions on ne peut séparer agir, parler et penser. On considère agir, parler et penser comme trois entrées d'un même tout : l'activité d'un individu. Pour un sujet donné, le langage n'est pas un média d'une pensée déjà constituée, c'est un outil de construction, de négociation et de transformation des représentations (celles du sujet considéré, et en rejoignant la dimension sociale : celles des personnes avec qui il interagit, celles du groupe social). Par ailleurs, de façon générale, chaque groupe social (par exemple les mathématiciens, par exemple une classe et son enseignant de mathématique travaillant au fil d'une année) développe des pratiques qui lui sont propres, y compris des pratiques langagières.

Le langage comme outil de construction, de négociation, de transformation des représentations individuelles et sociales est au coeur des processus d'enseignement et d'apprentissage.

#### *Pratiques langagières des mathématiciens*

Les pratiques langagières des mathématiciens mélangent des usages courant de la langue, des usages formels<sup>4</sup> de la langue, et du formalisme d'un autre registre (symbolique notamment).

D'une part on ne peut pas exprimer sans ambiguïté les mathématiques avec les pratiques langagières courantes. Frege ou de Hilbert (fin 19<sup>e</sup> début 20<sup>e</sup>) détaillent ce constat et annoncent vouloir le dépasser en initiant leurs travaux fondateurs. Les mathématiciens (notamment les logiciens) ont développé par la suite des outils formels de formulation (et d'analyse) des mathématiques. D'autre part on ne peut pas communiquer ou penser complètement formellement (les mathématiciens ne sont pas des ordinateurs). Les pratiques langagières des mathématiciens s'appuient sur un mélange variable d'expressions formalisées (éventuellement sous forme symbolique à l'écrit) et de langue naturelle. Reconstituer et reconnaître les éléments de ce mélange est malaisé car les frontières sont floues, non explicites, non stables (elles dépendent du locuteur, mais aussi de l'auditoire, du contexte, etc.), ce d'autant plus que l'expression formalisée peut se faire en langue naturelle (notamment à l'oral), il y a co-existence. Cette co-existence est une dialectique fructueuse (à maintenir, à

---

<sup>4</sup>Voir Hache (2013) : je définis formalisme par « mise en forme codifiée permettant de décrire les objets mathématiques, leurs propriétés et les preuves de leurs propriétés, et de contrôler la validité de ce qui est exprimé. La codification permet par ailleurs une manipulation relativement indépendante du sens (règles de transformation, de combinaisons etc.) »

entretenir) entre pensée, échanges, intuition, conjecture, exploration, élaboration de preuves d'une part, et rigueur, formalisme et preuve d'autre part.

On voit donc bien qu'une analyse des pratiques langagières des mathématiciens doit contribuer à l'étude plus générale des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

### PRÉSENTATION D'ÉLÉMENTS D'UNE ÉTUDE

Le formalisme est particulièrement explicitement présent dans les formulations de définitions et de théorèmes, et ce très tôt dans la scolarité. C'est ce que j'ai illustré par le travail sur les manuels de collège et l'usage du mot « avec » dans certaines formulations liées à la quantification (voir Hache 2015). Les enseignants ont cependant, en classe, une palette d'outils plus large et plus souple que les rédacteurs de manuels. On peut se demander de quelle façon les enseignants gèrent (consciemment ou non) cette nécessaire complexité des pratiques langagières.

**Définition 4**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour **limite**  $\ell \in \mathbb{R}$  si : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier naturel  $N$  tel que si  $n \geq N$  alors  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Figure 1 : formulations de la définition de la limite d'une suite (première année de licence de mathématiques)

Comment verbalisent-ils et enrichissent-ils les formules abruptes et formelles des manuels et du cours ? Comment, au-delà de ce qui sera écrit dans le cours un enseignant fait-il entendre aux élèves les définitions formelles ?

Une recherche en cours<sup>5</sup> étudie cette question particulière en se penchant sur les formulations des définitions de limite pour les suites ou les fonctions au début de l'université. Ces notions ont été choisies ici car elles sont souvent formulées, entre autres, de façon symbolique (formulations souvent accompagnées de reformulations comme ci-dessus figure 1).

Le corpus analysé est composé essentiellement d'éléments provenant de trois types de sources :

- manuel de première année (exemple : *L1, tout en un*, Dunod 2007, figure 2a) ;
- poly, et cours d'amphithéâtre ou TD filmés en première année de licence (Universités Paris 6, Paris 7 ou Versailles, figure 2b) ;
- et cours universitaire en ligne<sup>6</sup>, cours oral (vidéo en ligne, figure 2c) et écrit (texte disponible en ligne, figure 1), exercice corrigé à l'oral (vidéo en ligne) et à l'écrit (document rédigé disponible en ligne).

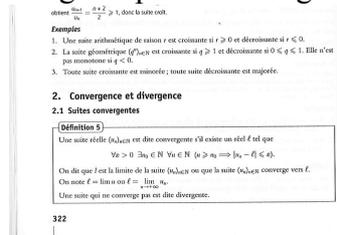


Figure 2a : manuel (*L1, tout en un*, Dunod 2007)

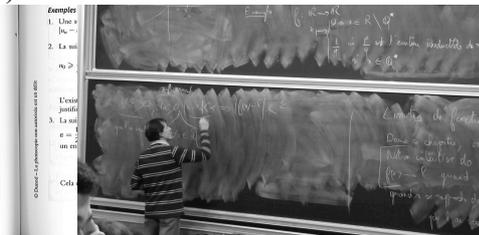


Figure 2b : amphithéâtre (*L1, Université Paris 7*)



Figure 2c : cours en ligne (*L1, exo7*)

<sup>5</sup>Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier Boley et moi.

<sup>6</sup><http://exo7.emath.fr>

Les analyses proposées sont des « analyses logiques » de divers ordres. Il s'agit essentiellement d'analyser la structure logique formulations (écrites ou orales), la syntaxe employée, de comparer ce qui est prononcé ou écrit à un référent formel logique.

D'un point de vue macroscopique on perçoit rapidement des variations dans les formulations et dans les variétés de formulations très importantes d'un support à l'autre. On voit par exemple en amphithéâtre un enseignant écrire petit à petit, et de façon non linéaire (un morceau à gauche, puis un morceau à droite, puis un morceau au milieu), la formulation symbolique de la définition tout en la reformulant à l'oral, et reformulant chaque élément de la phrase, en le « décryptant » littéralement, ceci n'arrive pas dans les vidéos en ligne de cours et pour les manuels. Même en comparant deux éléments proches du corpus (le cours vidéo en ligne a par exemple pour support un diaporama qui reprend à quelques détails près le texte proposé au téléchargement) les variations sont fortes, nous le verrons plus loin.

### EXEMPLE D'ANALYSE

Pendant le séminaire les exemples donnés concernaient seulement un cours filmé d'exo7 (sur la définition des limites de suites). Ces analyses et d'autres analyses de ce corpus sont présentées plus largement dans le Cahier du LDAR n°14 (voir Bridoux 2015), elles sont alors menées dans la perspective de mettre en évidence les proximités (voir Robert et Vandebrouck 2014) présentes ou potentiellement présentes dans les moments d'exposition des connaissances. L'ambition de ce séminaire était plus modeste, j'ai choisi de présenter trois entrées dans ce cours filmé d'exo7 : les reformulations immédiates que fait l'enseignant lors de la présentation de la définition de limite, la façon dont le mot « rang » et ses usages sont introduits au fil du cours, et la façon dont est prononcé l'expression symbolique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Pour chacun de ces points je présenterai les analyses des pratiques langagières de l'enseignant, leurs liens multiples avec les contenus exprimés et les problématiques d'enseignement.

#### *Reformulations*

Le cours filmé<sup>7</sup> commence par énoncer la définition de la limite d'une suite. La formulation symbolique est très rapidement donnée. Il est frappant de constater que l'enseignant formule et reformule, par écrit ou oralement, onze fois de façon différentes cette définition en un peu plus d'une minute<sup>8</sup> :

- (1) *Diapo* 0:00 La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $\ell \in \mathbb{R}$
- (2) *Oral* 0:08 La suite  $u_n$  a pour limite  $\ell$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .
- (3) *Diapo* 0:00 Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que si  $n \geq N$  alors  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (4) *Oral* 0:12 Pour tout epsilon positif il existe un entier grand  $N$  tel que dès que l'entier petit  $n$  est plus grand que grand  $N$  alors valeur absolue de  $u_n$  moins  $\ell$  est plus petit que epsilon.
- (5) *Diapo* 0:24  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$
- (6) *Oral* 0:27 Pour tout epsilon [main sur  $\forall$ ] il existe un entier [un pas, main sur  $\exists$ ] naturel grand  $N$ , tel que [deux pas, main sur «  $n \geq N$  »] si petit  $n$  est plus grand que  $N$  alors [un pas, main sur «  $\Rightarrow$  »] valeur absolue de [recule]  $u_n$  moins  $\ell$  est plus petit que epsilon.
- (7) *Oral* 0:44 Autrement dit  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  à partir d'un certain rang.
- (8) *Diapo* 0:51  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

<sup>7</sup><http://youtu.be/253AEiNBvGw>

<sup>8</sup>« Diapo » signale des éléments projetés sur le diaporama (voir figure 2c), « Oral » signale des phrases prononcées par l'enseignant, mis à part pour la formulation n°7 les formulations orales sont des reformulations de formulations écrites, les temps indiqués correspondent au début de la formulation ou à l'apparition de la diapo (la vidéo commence 43 secondes avant le temps 0:00 ci-dessus, pendant ce temps, l'enseignant présente le plan du cours). La phase retranscrite est suivie d'un commentaire d'une représentation graphique d'une suite convergente, l'enseignant poursuit avec les limites infinies, puis énonce des propriétés des limites et prouve deux d'entre elles.

- (9) *Oral* 0:58 Limite de  $u_n$  égale à  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini.  
 (10) *Diapo* 0:51  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$   
 (11) *Oral* 1:01  $u_n$  tend vers  $\ell$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini

La définition est également reformulée plusieurs fois dans la suite du cours, notamment au cours des preuves, mais ce ne sera pas développé ici. Quelques observations soulignées lors du séminaire :

- On voit bien dans les formulations (1) et (2) un exemple de la complexité de la coexistence d'un usage formel de la langue et d'un usage plus courant<sup>9</sup>. Dans la première formulation, écrite, on lit de façon condensée que la suite a pour limite  $\ell$  et que  $\ell$  est un nombre réel. La formulation orale de la phrase par l'enseignant (cf. (2)) souligne bien ce point en lisant le symbole «  $\in$  » avec un participe présent.

La condition d'appartenance à  $\mathbb{R}$  a, par ailleurs, un statut hybride : la définition est celle du fait que la suite a pour limite  $\ell$ , la condition d'appartenance est plutôt une condition pour que ce qui est défini ait un sens, une information sur le contexte de ce cours, ou une information sur le statut de la variable  $\ell$ , mais cette condition n'intervient pas directement dans la l'énoncé de la définition. Le fait que le nombre  $\ell$  représente un réel n'est d'ailleurs repris dans aucune des formulations suivantes.

- L'oral (d'autant plus qu'il est ici presque systématiquement accompagné d'un écrit) permet de ne pas donner toutes les précisions qui pourraient être données, de faire des choix de ce qui est dit ou non, certaines formulations laissent ainsi une interprétation possible : « positif » pour « > », « plus grand » pour «  $\geq$  » et « plus petit » pour «  $\leq$  », sans précision du caractère strict ou large des inégalités ; simplification de «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  » en «  $u_n$  » (quitte à engendrer des ambiguïtés, on le verra).

- Le cas de la quantification de  $n$  est ainsi un cas intéressant de balance entre l'oral et l'écrit, l'un complétant l'autre. Dans la formulation (3) la quantification universelle de  $n$  est classiquement omise (implicite lié à l'implication), dans la formulation (4) on peut voir une trace de la quantification de  $n$  dans le « dès que » (« dès que  $n$  plus grand que  $N$  » pouvant être entendu comme contenant un indice de «  $\forall n \geq N$  », même si ce n'est pas le texte qui est effectivement lu), dans la formulation (5) elle apparaît très explicitement, dans la formulation (6) elle disparaît à nouveau complètement. Il est intéressant de constater que pendant la formulation (6) l'enseignant se sert de sa main, d'une certaine façon, comme d'un prompteur : il indique ainsi la partie de la proposition qu'il est en train de prononcer. Sa main montre donc, d'une certaine façon, l'omission (elle passe devant le «  $\forall n \in \mathbb{N}$  » pour aller directement à l'implication, sans que rien ne soit dit ni montré).

- L'oral peut aussi apporter des précisions sur l'écrit : ici c'est à l'oral que l'enseignant précise que  $n$  est un entier par exemple (formulations (2) et (3)). Ou apporter des nuances de sens, c'est ainsi que l'on peut comprendre la nuance entre le « si » de la formulation (3) et le « dès que » de la formulation (4) : l'enseignant introduit une dimension pragmatique, on voit apparaître une chronologie, une trace d'intention, l'enseignant formule ici la définition du point de vue d'un « démonstrateur » (voir l'atelier de Barrier et Durand Guerrier dans Bronner 2013), de quelqu'un qui souhaiterait prouver qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $\ell$ . Dans la formulation (7) l'enseignant introduit aussi une intention (« aussi proche que l'on veut »).

- Notons que dans les formulations (8) et (10) on énonce la définition en commençant par parler des termes de la suite et de sa limite, on parle ensuite de  $n$  (ordre d'énonciation inverse de l'ordre logique<sup>10</sup>). «  $n$  tend vers plus l'infini » acquiert une autonomie grammaticale dont on

<sup>9</sup>L'usage de la langue est à la fois courant (phrase sujet – verbe – complément, les verbes sont conjugués selon les règles etc.) et formel (« La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  » par exemple est un syntagme ayant une définition mathématique, de même «  $\ell \in \mathbb{R}$  », le syntagme « a pour limite » a un statut particulier puisqu'il s'agit ici de le définir formellement). On voit ici aussi un usage de la langue en interaction avec l'usage de symboles, ces interactions sont étudiés dans la thèse de Colette Laborde (Laborde 1982).

sait qu'elle pose ensuite des difficultés quant à la compréhension de la notion de limite (voir par exemple Job 2013).

L'enseignant ne peut, ici, ajuster son discours aux réactions qu'il constaterait chez les étudiants. On voit aussi qu'il ne propose pas de commentaire mathématique sur les éléments pointés ci-dessus (ils sont évoqués ici dans le cadre d'une analyse technique, mais pourraient être abordés par l'enseignant) : on peut parler de limite sur d'autres objets que les réels, le caractère strict ou non des inégalités n'a pas d'importance dans la définition sauf pour «  $\varepsilon > 0$  », une implication sous-entend toujours une quantification universelle, comment prouve-t-on ou utilise-t-on cette définition, non sens de l'expression «  $n$  tend vers l'infini » hors contexte, pourquoi utilise-t-on le mot « limite », « tendre vers », « proche », « à partir d'un certain rang » etc. Il y a matière dans cette très rapide succession à travailler ces points, ces questions, à les faire apparaître plus explicitement.

### *Usages du mot « rang », de l'expression « à partir d'un certain rang »*

Le second exemple développé concerne l'introduction du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang ».

Le mot « rang » dans le contexte des suites mathématiques est synonyme d'« indice », il peut parfois aussi être remplacé par « nombre entier » (mais on perd alors le rappel du contexte des suites).

L'expression « à partir d'un certain rang » renvoie à la double quantification «  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$  », et la cache. On peut par exemple dire « La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive à partir d'un certain rang » pour «  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad u_n > 0$  ». Soulignons que dans cette situation il existe effectivement un entier  $N$  tel que, quel que soit l'entier  $n$ , si  $n$  plus grand que  $N$  alors  $u_n$  est positif. Les expressions « constante à partir d'un certain rang » ou « croissantes à partir d'un certain rang » sont un peu plus compliquées, mais relèvent de la même analyse. Notons que ces différentes formulations ne font pas apparaître les variables muettes présentes dans les formulations quantifiées ( $N$  et  $n$ ). Il existe d'autres formulations usuelles proches utilisant la variable  $n$  (mais pas  $N$ ) comme « pour  $n$  assez grand », ou utilisant la variable  $N$  (mais pas  $n$ ) comme « il existe un rang  $N$  à partir duquel ».

La formulation (7) ci-dessus «  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  à partir d'un certain rang » est classique. L'usage de « à partir d'un certain » est plus complexe que dans les phrases précédentes. Il faut ainsi lire dans la formulation une quantification universelle de  $\varepsilon$  (en ajoutant une intention concernant le fait que l'on veut que  $\varepsilon$  soit petit, on retrouve une dimension pragmatique) et le fait que le rang évoqué par « à partir d'un certain rang » n'est pas déterminé : pour chaque  $\varepsilon$  il existe un tel rang.

L'usage d'expressions issues des usages courants de la langue permet des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (conjugaisons, nuances qualitatives, insertion d'adverbes etc.). Elles cachent par contre la référence formelle, et elles ne permettent pas un usage directement « opérationnel » : comment montrer par exemple qu'une suite n'a pas pour limite zéro avec la définition « Une suite tend vers zéro si et seulement si elle est aussi proche que l'on veut de zéro à partir d'un certain rang » ? Elles ne permettent pas facilement non plus de saisir certaines subtilités (différences d'usage de « à partir d'un certain rang » entre

<sup>10</sup>Voir par exemple Hache (à paraître) : "Un des questionnements récurrents sur l'expression des [quantifications] concerne l'ordre de ces [quantifications] : [Rakotovoavi] distingue l'ordre logique et l'ordre d'écriture. (...) retenons qu'en présence de deux [quantifications] on dit en général que la première que la première des deux, selon l'ordre logique, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la [quantifications] s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique. Donnons ici un exemple (...) : « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné ». La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné »"

«  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive à partir d'un certain rang » et «  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  à partir d'un certain rang »).

Il est intéressant d'analyser la façon dont l'enseignant introduit ces formulations dans son discours. Dans le cours précédent celui qui est analysé ici, le premier cours sur les suites (définitions, exemples de suites, premières propriétés) on trouve uniquement trois occurrences du mot « rang » :

- « Notez que cette suite n'est définie que pour les rangs  $n$  supérieurs ou égaux à un » (début du cours, exemples de suites, à propos de la suite  $(1/n^2)_{n \geq 1}$ )
- « Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique, écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases. (...) (c) la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement négative à partir d'un certain rang » (la dernière diapo du cours affiche une liste d'exercices, non commentés)
- À la fin du cours, le 5<sup>e</sup> exercice affiché demande de prouver qu'une suite est décroissante à partir d'un certain rang.

Dans le cours sur les limites (celui analysé ici) le mot apparaît sept fois :

- « Autrement dit  $u_n$  est aussi proche que l'on veut de  $\ell$  à partir d'un certain rang » (conclusion de la présentation de la définition de la limite infinie, voir ci-dessus (7))
- « Nous devons alors trouver un rang grand  $N$  tel que pour tous les indices petits  $n$  supérieurs à ce grand  $N$  alors  $u_n$  indice petit  $n$  est dans la bande » (pendant un commentaire sur le graphique présentant une suite convergente)
- « Autrement dit,  $u_n$  est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang » (conclusion de la présentation de la définition de la limite infinie, la définition est toujours sur la diapo)
- « On doit trouver un rang grand  $N$  tel que pour des indices plus grand que grand  $N$  alors les termes sont supérieurs à  $A$  » (commentaire du graphique présentant une suite dont la limite est  $+\infty$ )
- « Soit maintenant une suite  $u_n$  qui a une limite non nulle alors, premièrement, à partir d'un certain rang la suite  $u_n$  ne s'annule pas, et deuxièmement la suite des termes un sur  $u_n$  tend vers un sur  $\ell$  » (le texte correspondant sur la diapo est «  $u_n \neq 0$  pour  $n$  assez grand »)
- « Donc à partir d'un certain rang grand  $N$  la suite  $u_n$  est à distance au plus un de la limite » (texte sur la diapo : « il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$  on a  $|u_n - \ell| \leq 1$  »)
- « On vient de prouver que la suite est bornée à partir d'un certain rang » (texte diapo ci-dessous)
  - Soit  $(u_n)$  une suite convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$
  - Définition de limite avec  $\varepsilon = 1$  : il existe  $N$  t.q. pour  $n \geq N$  on a  $|u_n - \ell| \leq 1$
  - Pour  $n \geq N$  on a

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + |u_n - \ell| \leq |\ell| + 1$$

Le mot « rang » est donc utilisé pour « indice » (phrases (a), (e) et (g)), dans une expression « à partir d'un certain rang » pour laquelle il existe effectivement un rang (phrases (b), (c), (h), (i) et (j)) ou dans le contexte plus complexe de l'usage de « à partir d'un certain rang » lié à la définition de limite (phrases (d) et (f)). Aucun commentaire n'est fait à propos de ces usages, l'étudiant peut faire (ou non) des liens entre les formulations employées et ce qui est écrit (quand quelque chose est écrit et quand ce qui est écrit est différent de ce qui est prononcé, par exemple pour (h) et (i)), mais c'est à lui de prendre l'initiative (sauf pour l'extrait (b)).

*Prononciation de «  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  »*

La formulation écrite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être lue simplement<sup>11</sup> : la lecture explicite des parenthèses serait lourde, la variable  $n$  est muette («  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  » ne parle pas de  $n$ ), la suite dont on parle n'a pas nécessairement de nom (faut-il l'appeler «  $u$  » ?)... On lit souvent cette formulation en commençant par « La suite... » : « La suite  $u$  », « La suite  $u$  indice  $n$  » (en ajoutant éventuellement « pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  », ce qui présente la variable  $n$  et introduit plus explicitement sa mutification), « La suite  $u_n$  » (idem), « La suite de terme général  $u$  indice  $n$  » (là aussi on peut ajouter « pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  » ce qui précise le domaine dans lequel la variable  $n$  prend ses valeurs, la variable  $n$  est déjà mutifiée par « de terme général ») etc. Il arrive qu'on

<sup>11</sup>La thèse de Jean Philippe Drouhard (Drouhard 1992) étudie entre autre ces notations mathématiques utilisant deux dimensions (notations des racines n-ièmes par exemple).

utilise des formulations plus concises : «  $u_n$  » pour « La suite  $u_n$  », ou «  $u$  », celles-ci permettent de simplifier les formulations de propositions ou de preuves complexes, tout en nécessitant une certaine proximité de l'auditeur ou du lecteur, et un travail complémentaire d'interprétation plus grand.

Pour un entier  $n$  donné, le  $n$ -ième terme de la suite est noté «  $u_n$  », ce qui est souvent lu «  $u$  indice  $n$  » ou plus simplement «  $u_n$  », on peut parfois préciser en disant « le terme  $u_n$  » (ou « le nombre  $u_n$  » par exemple).

On voit donc ici que deux objets très différents mais liés (une suite de nombres et un nombre par exemple, ce dernier étant un des termes de la suite) peuvent être désigné par des formulations orales très proches, voire par la même formulation («  $u_n$  »). Les relations entre ces deux objets sont au centre de la définition de limite : la convergence est une propriété de la suite, définie par une propriété quantifiée de façon complexe de ses termes (et de la limite en question). La compréhension de la notion de limite est très liée à la compréhension de cet emboîtement (propriété de la suite, propriétés de ses termes), de ces deux niveaux de lecture.

L'enseignant désigne ici presque systématiquement les suites par les expressions « suite  $u_n$  » ou «  $u_n$  », il est intéressant d'analyser ce que permet cette proximité, la façon dont cela fait parler le formalisme, lui donne sens, mais aussi les difficultés que cela peut engendrer (plus une formulation est concise, plus elle est porteuse d'implicites), et la façon dont l'enseignant gère ces difficultés potentielles.

L'enseignant prononce classiquement «  $u_n$  » en disant «  $u_n$  ».

- Il ne désigne qu'une fois une suite par « la suite des termes » : « la suite des termes<sup>12</sup> un sur  $u_n$  » pour dire «  $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  », avec, ici, l'expression «  $u_n$  » qui désigne donc un nombre (élément de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).
- Il désigne aussi les suites par les expressions plus courtes « la suite », « une suite » ou « la suite  $u_n$  », « une suite  $u_n$  ». Par exemple dans : « Si une suite est convergente, sa limite est unique », « la suite  $u_n$  a pour limite  $\ell$  appartenant à  $\mathbb{R}$  », « une suite  $u_n$  est dite convergente si elle admet une limite finie », « à partir d'un certain rang grand  $N$  la suite  $u_n$  est à distance au plus un de la limite ».
- On dénombre aussi quelques formulations dans lesquelles la suite est désignée par « la suite » suivie d'une expression plus complexe que la donnée d'un terme de la forme  $u_n$  : « la suite  $u_n$  moins  $\ell$  fois  $v_n$  » en parlant de  $((u_n - \ell) v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou « la suite  $u_n$  facteur de un moins trois  $u_n$  moins un sur  $u_n$  carré moins un » pour désigner la suite  $(u_n(1 - 3u_n) - 1 / (u_n^2 - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Quelques formulations où une suite est désignée par un terme ayant une forme plus complexe que  $u_n$  mais sans préciser « la suite » : par exemple dans « si une suite  $u_n$  tend vers un réel  $\ell$  alors lambda fois  $u_n$  où chaque terme est multiplié par le réel lambda a pour limite lambda fois  $\ell$  » l'expression « lambda fois  $u_n$  » désigne  $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (comme en témoigne la suite de la phrase : « où chaque terme »).
- Certaines formulations jouent sur les deux niveaux (suite ou termes de la suite).

Un premier exemple avec « si  $u_n$  tend vers plus l'infini [la suite tend vers  $+\infty$ ] alors la suite des un sur  $u_n$  tend vers zéro [la suite tend vers 0]. Réciproquement, si  $u_n$  tend vers zéro [la suite tend vers zéro] et si les  $u_n$  sont strictement positifs [les termes de la suite sont strictement positifs<sup>13</sup>], alors un sur  $u_n$  tend vers plus l'infini [à nouveau la suite] ».

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ et } u_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$$

La formulation écrite (extrait du diaporama ci-contre) ne laisse ici aucune ambiguïté sur le statut des objets. Elle permettrait donc à un

<sup>12</sup>Je souligne ici les parties de phrases dont il est question désignant une suite.

<sup>13</sup>L'enseignant marque, dans son expression orale, le fait qu'il parle des termes en utilisant le pluriel (« les  $u_n$  sont ») et non simplement «  $u_n$  ».

auditeur attentif de décoder l'oral.

Un second exemple : « la suite  $u_n$  est égal(e) à  $\cos n$  et  $v_n$  est égal(e) à un sur racine de  $n$ , alors la suite  $\cos n$  divisé par racine de  $n$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers plus l'infini ». Dans la première partie de la phrase, il est difficile de décider si l'enseignant parle de la suite  $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou, de façon mixte, de la suite et d'une égalité de termes  $u_n = \cos n$ . De même dans il parle de  $v_n$  (l'absence de « la suite » fait pencher ici pour une égalité de termes... et pousse à relire la première partie dans ce sens aussi). On retrouve en fin de phrase une lecture de  $(\cos n / \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  du type de celles décrites précédemment.

Sur cet exemple, le texte du diaporama correspondant à ce que dit l'enseignant est «  $u_n = \cos n$ ,  $v_n = 1/\sqrt{n}$ , alors  $u_n v_n \rightarrow 0$  », la formulation écrite donne donc des égalités de termes (cette phrase est précédée de « Exemple : », on peut penser que  $n$  est quantifié implicitement universellement), la formulation orale ajoute deux fois sur trois « la suite » devant les termes dont il est questions. On voit donc que l'écrit comporte des implicites forts qui sont au coeur des objets manipulés (statut de la variable  $n$ ), l'oral ne clarifie pas la situation.

Autres exemples : une phrase de bilan oral (pas de texte correspondant sur le diaporama) « pour tout epsilon tel que dès que petit  $n$  est plus grand que grand  $N$  alors valeur absolue de  $u_n$  fois  $v_n$  est plus petit que epsilon [on parle clairement de nombres : le produit  $u_n \times v_n$ ], on a bien montré que la limite de  $u_n$  fois  $v_n$  est nulle [« limite de » concerne une suite... la suite  $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?] » ; une autre phrase de bilan «  $u_n$  est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang », on a vu que les propriétés vraies « à partir d'un certain rang » concernaient les suites, le masculin de « grand » semble cependant montrer que la propriété est ici celle des termes.

Ces exemples montrent bien la souplesse que permettent les expressions orales. Et les difficultés de compréhension ou d'apprentissages que cela pourrait engendrer. On glisse en tout cas petit à petit vers des formulations où l'on énonce les propriétés d'une suite en les formulant à propos des termes de la suite (ou de formules précisant ce que sont ces termes, par exemple « 1 sur racine de  $n$  tend vers 0 »). Comme pour l'utilisation du mot « rang », les formulations orales sont souvent complétées ici par une formulation écrite. Celles-ci lèvent parfois l'ambiguïté, et donnent donc implicitement des éléments des pratiques langagières concernant les suites. Parfois les formulations écrites intègrent elles aussi des raccourcis (que les formulations orales précisent ou non). Dans tous les cas, rien n'est explicité sur ces points.

## CONCLUSION

Ces analyses se placent dans une étude plus large de la complexité des pratiques langagières des mathématiciens. On voit ici à quel point les pratiques langagières peuvent permettre certains raccourcis en masquant ou en brouillant certaines complexité des faits mathématiques décrits. Comme annoncé au début de ce texte, ces simplifications sont nécessaires au travail mathématiques (et totalement naturalisées par les mathématiciens).

Plonger ces analyses dans un contexte d'enseignement (manuels de secondaire ou universitaires, études de cours oraux etc.) permet de constater que cette complexité est peu étudiée ou questionnée (ou fait peu questions, les choses étant plus nuancées pour l'étude d'un cours oral en amphithéâtre, Bridoux 2015) : c'est à la charge des élèves / étudiants de prendre du recul (de avoir qu'il y a un recul à prendre), de débusquer les implicites, de les comprendre. On a vu en plusieurs endroits (par exemple à propos de la prise d'autonomie de la phrase «  $n$  tend vers plus l'infini », ou des jeux de formulations autour de  $u_n$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) que ce travail était pourtant très fortement lié au sens des objets et propriétés étudiés.

J'ai présenté ici des analyses de formulations de propositions ou de définitions. D'autres analyses sont en cours sur des formulations de preuves (par exemple Hache et Mesnil à paraître), les résultats sont concordants avec ceux présentés ici.

Bien sûr ces analyses sont encore à compléter du point de vue du corpus (autres contextes d'expressions et d'enseignements, autres médias, autres notions etc.). Pour ce qui concerne l'enseignement, l'étude est à prolonger au delà de l'analyse du discours de l'enseignant : les liens entre complexité des pratiques langagières et difficultés des élèves (ou étudiants) sont à mettre en évidence de façon plus nette, il est aussi important de proposer et d'étudier des modalités de travail sur ces questions langagières, en classe (qu'est-il possible de faire avec les élèves ou étudiants ? Au fil de l'enseignement ou explicitement ? Comment mesurer l'efficacité ?) et en formation. Le travail est en cours.

## BIBLIOGRAPHIE

- ALLARD C. (2015) *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*, thèse de l'Université Paris Diderot
- BARRIER T. et MATHE AC. (2014) Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, *Spirale revue de recherches en éducation*, n°54, Université Lille 3, Lille
- BRIDOUX S. et al. (2015) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université), *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, n°14, édité par l'IREM de Paris, Paris
- BRONNER A. et al. (ed.) (2013) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble
- DROUHARD JP. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de l'Université Paris 7, éditée par l'IREM de Paris, Paris
- HACHE C. (2013) Langage mathématique à la transition primaire – collège, in *Actes du 39ème colloque de la Copirelem, juin 2012*, 452-463, Copirelem, Quimper
- HACHE C. (2015), Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x* n°97, IREM de Grenoble, Grenoble
- HACHE C. (à paraître) Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques, in *Actes du 20e colloque de la CORFEM, juin 2014*, Grenoble
- HACHE C. et MESNIL Z. (à paraître) Pratiques langagières et preuves, in *Actes du 21e colloque de la CORFEM, juin 2015*, Nîmes
- JOB P. (2013) Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations, in COPPE S. et HASPEKIAN M. (2013) *Actes du séminaire national de didactique des Mathématiques, année 2013*, édité par l'IREM de Paris, Paris
- fondamentales/adidactiques
- LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Université de Grenoble
- MESNIL Z. (2014). *La logique: d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement* Thèse de l'Université Paris Diderot, éditée par l'IREM de Paris, Paris
- ROBERT A. et VANDEBROUCK F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 239-285, La Pensée Sauvage, Grenoble