



**HAL**  
open science

# Commande non-quadratique des modèles flous T-S via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne

Abdelmadjid Cherifi, Laurent Arcese, Kevin Guelton

► **To cite this version:**

Abdelmadjid Cherifi, Laurent Arcese, Kevin Guelton. Commande non-quadratique des modèles flous T-S via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne. 23èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2014), Oct 2014, Cargèse, France. hal-02291532

**HAL Id: hal-02291532**

**<https://hal.science/hal-02291532v1>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Commande non-quadratique des modèles flous T-S via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne

Abdelmadjid Cherifi

Laurent Arcese

Kevin Guelton

CRéSTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne

Moulin de la housse BP1039, 51687 Reims cedex 2, France

email : Prénom.nom@univ-reims.fr

## Résumé :

Cet article présente la synthèse de lois de commande non-PDC (non-Compensations Parallèles Distribuées) basées sur des fonctions de Lyapunov candidates sous forme d'intégrales curvilignes pour les modèles flous continus de type Takagi-Sugeno (T-S). Des premières conditions sont obtenues sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMI) pour une classe de modèles T-S restreintes aux systèmes de premier et second ordre. Ensuite, de nouvelles conditions LMIs généralisant les résultats à l'ordre  $n$  supérieur à 2 sont proposées en utilisant une propriété de dualité des systèmes. Deux exemples de simulation sont enfin présentés pour illustrer l'efficacité des approches proposées.

## Mots-clés :

Modèles T-S, Commande non-PDC, Fonction de Lyapunov non-quadratique, Intégrale curviligne, Dualité, LMI.

## Abstract:

This paper presents a non-PDC controllers design based on line-integral Lyapunov function for continuous-time Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. The first controller is based on a LMI formulation for first and second order systems only. Using a property on dual system, we show that it is possible to formulate the design of a new controller as an LMI problem for  $n$ -th order T-S system. Two simulations are provided to show the effectiveness of the proposed approaches.

## Keywords:

T-S models, non-PDC controller design, Line-Integral Lyapunov Functions, Duality, LMI.

## 1 Introduction

L'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires représentent un vrai défi pour les automaticiens. L'étude se révélant trop complexe dans le cas général, il est usuel de distinguer différentes classes de systèmes. Parmi celles-ci, l'approche multi-modèle, désignée dans la suite de ce papier par des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [1], possède de nombreux avantages. En effet, cette

approche permet d'étendre certains concepts de l'automatique linéaire au cas non linéaire [2]. Ainsi, un système non linéaire peut être représenté exactement par un modèle flou T-S sur un compact de l'espace d'état par le biais d'une décomposition en secteurs non linéaires [2]. Il en résulte qu'un modèle T-S est un système polytopique convexe, c'est à dire une collection de modèles linéaires pondérés par des fonctions d'appartenance non linéaires convexes.

L'analyse de la stabilité ainsi que la synthèse de lois de commande ont tout d'abord été étudiées à partir de fonctions de Lyapunov quadratiques communes. Cependant ces méthodes exigent de trouver une solution commune pour un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) [2] impliquant un certain degré de conservatisme. Afin de réduire celui-ci, de nombreuses approches ont été proposées comme par exemple l'utilisation de fonctions de Lyapunov par morceaux [3] ou à commutations [4, 5]. Néanmoins ces approches sont peu adéquates aux modèles T-S, surtout lorsqu'ils sont obtenus par décomposition en secteurs non linéaires. Dans ce contexte, le recours à des fonctions de Lyapunov non-quadratiques s'avère plus approprié. En effet, celles-ci sont basées sur la même structure d'interconnexion que les modèles T-S à analyser [6, 7]. Néanmoins, dans le cas continu, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaissent dans les conditions de stabilité. Afin de contourner ce problème, de nombreux travaux sont basés sur l'hypothèse que ces dérivées sont bornées, et que leurs bornes sont connues avant

la synthèse de la boucle fermée [6], ce qui n'est pas évident dans la pratique. De récents travaux ont été proposés pour pallier ce problème au prix d'une restriction des objectifs de synthèse à une approche locale [8]. Toutefois, cette approche conduit à des conditions LMI relativement complexes et difficiles à appliquer par les non spécialistes.

Ces dernières années, une nouvelle approche basée sur des fonctions de Lyapunov non-quadratiques sous forme d'intégrales curvilignes a été proposée par Rhee et Won [9]. Cette fois-ci, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance n'apparaissent plus dans les conditions de stabilité si certaines hypothèses concernant l'indépendance du chemin sont vérifiées (pour plus de détails, voir [9]). Les premiers résultats de stabilisation sont donnés en termes d'Inégalités Biliéaires Matricielles (BMIs) et des études récentes ont conduit à l'obtention de conditions LMIs réduites à des classes de systèmes T-S particuliers [10, 11, 12, 13]. Par exemple, de nouvelles conditions LMIs pour la synthèse de lois de commande non-PDC ont été proposées dans [12], puis relâchées dans [13]. Cependant ces résultats sont limités aux seuls systèmes du premier et second ordre pour une formulation sous forme LMI, du troisième ordre sous forme BMI, et avec une complexité croissante à mesure que l'ordre du système augmente [13].

Dans cet article deux résultats sont présentés. Le premier consiste en l'amélioration des conditions présentées dans [12]. Nous montrerons ensuite que grâce à la propriété de dualité des systèmes, une loi de commande non-PDC peut être synthétisée sans contrainte sur l'ordre du système. Les deux approches présentées dans cet article constituent une synthèse des travaux proposés dans [13, 14].

Ce papier est organisé comme suit : la section II introduit quelques définitions, notations et lemmes utiles. La section III est consacrée à la présentation des conditions LMIs obtenues à partir de fonctions de Lyapunov sous

forme d'intégrales curvilignes pour la stabilisation de modèles flous continus de type T-S. Afin d'illustrer l'efficacité des approches proposées, deux exemples sont ensuite présentés dans la section IV.

## 2 Préliminaires

Considérons le modèle T-S donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $z(t)$  sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de prémisses. Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $h_i(z(t)) \in [0, 1]$  représentent des fonctions d'appartenance avec  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ .  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices réelles constantes.

**Notations :** Dans la suite de cet article, les matrices sont supposées de dimensions appropriées. De plus, afin d'alléger les expressions mathématiques, le temps  $t$  est omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.  $M \succ 0$  et  $I$  définissent respectivement une matrice définie positive et une matrice identité de dimensions appropriées. Dans une matrice ou une expression en ligne, un astérisque (\*) désigne une quantité transposée. Soit un ensemble de matrices réelles  $M_i$  et  $N_{ij}$ , tel que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , on note  $M_h = \sum_{i=1}^r h_i(z)M_i$ ,

$$N_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z)N_{ij}.$$

Considérons la loi de commande non-PDC donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z)F_i \left( \sum_{j=1}^r h_j(z)H_j \right)^{-1} x(t) \quad (2)$$

où  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices constantes à définir.

A partir de (1), (2) et des notations définies ci-dessus, la dynamique du système en boucle fermée s'exprime alors comme :

$$\dot{x}(t) = G(x)x(t) \quad (3)$$

avec  $G(x) = A_h + B_h F_h H_h^{-1}$ .

L'objectif de cet article est de proposer de nouvelles conditions LMIs permettant d'obtenir  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que la dynamique de la boucle fermée (3) soit stable. Considérons à présent la fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne [9] :

$$v(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(0, x(t))} g^T(\varphi) d\varphi \quad (4)$$

où  $\Gamma(0, x(t))$  est le chemin de l'origine 0 à l'état actuel  $x(t)$  et  $\varphi \in \mathbb{R}^n$  un vecteur.

Deux manières différentes de traiter le problème sont à présent exposées : 1<sup>er</sup> cas :

$$g(x(t)) = X^{-1}(x)x(t) \quad (5)$$

où  $X(x)$  doit satisfaire les conditions d'indépendance du chemin [9, 15]. On peut alors écrire :

$$X^{-1}(x) = P(x) = P_0 + \sum_{i=1}^r h_i(x) D_i \quad (6)$$

avec

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ p_{1,n} & \cdots & p_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^{\alpha_{i,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^{\alpha_{i,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n,n}^{\alpha_{i,n}} \end{bmatrix}.$$

$(p_{1,2}, \dots, p_{n-1,n})$  et  $(d_{1,1}^{\alpha_{i,1}}, \dots, d_{n,n}^{\alpha_{i,n}})$  sont définis dans [9].

On notera que [12] :

$$X(x) = P^{-1}(x) = \frac{Z_h}{\det(P(x))} \quad (7)$$

où  $Z_h$  est la matrice adjointe de  $P(x)$  et :

$$\det(P(x)) = 1/\det(X(x)) = \det(Z_h)^{n-1} \quad (8)$$

2<sup>e</sup> cas :

$$g(x) = P_h x(t) \quad (9)$$

$P_h$  doit satisfaire les conditions d'indépendance du chemin [9, 15]. On obtient alors :

$$P_h = P_0 + \sum_{i=1}^r h_i(x) D_i \quad (10)$$

avec  $P_0$  et  $D_i$  définies comme précédemment.

**Lemme 1** [16] : Soient  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $\text{rang}(R) < n$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$x^T Q x < 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0, R x = 0\}, \quad (11)$$

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + X R + R^T X^T < 0, \quad (12)$$

**Lemme 2** [17] : Soient  $\Gamma_{ij}$ , pour  $(i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$ , des matrices de dimensions appropriées.  $\Gamma_{hh} < 0$  est satisfaite si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \Gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ \frac{2}{r-1} \Gamma_{ii} + \Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0 \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \end{cases} \quad (13)$$

**Propriété 1** : Considérons le système dual de (3) donné par :

$$\dot{\xi}(t) = G(\xi)^T \xi(t), \quad (14)$$

Si (14) est stable, alors (3) est stable.

*Preuve*: Si les valeurs propres de  $G^T(\xi)$  (quel que soit  $\xi$ ) sont dans le côté gauche du plan complexe, les valeurs propres de  $G(x)$  (quel que soit  $x$ ) le sont également (voir [18] pour d'autres résultats basés sur la dualité des systèmes LPV). ■

D'après la propriété 1, si on peut trouver des matrices  $F_h$  et  $H_h$  telles que (14) soit stable, alors (2) est une loi de commande non-PDC stabilisant le modèle T-S (1). Les principaux résultats de ce papier sont donnés dans la section suivante.

### 3 Résultats principaux

Dans cette section, nous proposons deux théorèmes relatifs aux cas 1 et 2 décrits ci-dessus. Le théorème suivant considère donc la fonction de Lyapunov (4) avec (5) qui semble naturelle pour la synthèse de lois de commande non-PDC. Néanmoins, nous verrons que cette voie conduit à des conditions LMIs applicables aux seuls modèles d'ordres un et deux. Le théorème 2 sera ensuite proposé pour lever cette restriction.

**Théorème 1 [13] :** *Le modèle T-S (1) est stabilisable par la loi de commande non-PDC (2), c'est à dire que le système en boucle fermée (3) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice  $Z_i \succ 0$  telle que  $Z_i = P_0 + D_i$  définie dans (10),  $F_i$  et  $H_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , telles que les conditions (13) soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_i H_j + B_i F_j + (*) & (*) \\ H_j - Z_i + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j) & -2\varepsilon Z_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

*Preuve:* En considérant le premier cas, i.e. la fonction de Lyapunov (4) avec (5), et le fait que  $\det(P(x))$  est positif dans (7) et (8), les conditions du théorème 1 s'obtiennent facilement par l'application des lemmes 1 et 2 (voir [13] pour plus de détails). ■

**Remarque 1** *Les conditions du théorème 1 sont générales et garantissent l'indépendance du chemin de l'intégrale curviligne (4) si et seulement si on peut trouver les matrices  $Z_i$  qui soient les adjointes de  $P_0 + D_i$  définies en (6). Cependant, tel que cela a été souligné dans [12], il n'est pas toujours trivial d'obtenir ces matrices par une résolution LMI. En effet, cela est aisé pour un système du premier ordre puisque  $Z_i = 1$ . Pour un système du second ordre, le résultat reste LMI puisque nous devons vérifier l'existence de :*

$$Z_i = \begin{bmatrix} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} & -p_{1,2} \\ -p_{1,2} & p_{1,1}^{\alpha_{i1}} \end{bmatrix}$$

où  $p_{1,1}^{\alpha_{i1}}$ ,  $p_{2,2}^{\alpha_{i2}}$  et  $p_{1,2}$  sont des variables de décision scalaires. Pour un système de troisième ordre, le résultat est BMI puisque nous devons vérifier l'existence de :

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_i^{(1,1)} & (*) & (*) \\ Z_i^{(2,1)} & Z_i^{(2,2)} & (*) \\ Z_i^{(3,1)} & Z_i^{(3,2)} & Z_i^{(3,3)} \end{bmatrix}$$

avec  $Z_i^{(1,1)} = p_{2,2}^{\alpha_{i2}} p_{3,3}^{\alpha_{i3}} - p_{2,3}^2$ ,  $Z_i^{(2,1)} = p_{1,3} p_{2,3} - p_{1,2} p_{3,3}^{\alpha_{i3}}$ ,  $Z_i^{(3,1)} = p_{1,1}^{\alpha_{i1}} p_{3,3}^{\alpha_{i3}} - p_{1,3}^2$ ,  $Z_i^{(2,2)} = p_{1,2} p_{2,3} - p_{1,3} p_{2,2}^{\alpha_{i2}}$ ,  $Z_i^{(3,2)} = p_{1,3} p_{1,3} - p_{1,1}^{\alpha_{i1}} p_{2,3}$  et  $Z_i^{(3,3)} = p_{1,1}^{\alpha_{i1}} p_{2,2}^{\alpha_{i2}} - p_{1,2}^2$ , qui fait intervenir des produits entre deux variables de décision. En poursuivant ce raisonnement, on constate que ce problème n'est plus convexe et devient de plus en plus complexe à mesure que l'ordre du système à stabiliser augmente. Le théorème suivant propose une solution à ce problème en considérant la propriété 1 relative aux systèmes duals.

**Théorème 2 :** *Le modèle T-S (1) est globalement asymptotiquement stabilisable s'il existe des matrices  $P_0$  et  $D_i$  définies dans (10),  $F_i$  et  $H_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , telles que  $P_0 + D_i \succ 0$  et les conditions (13) soient vérifiées avec :*

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{ij} & (*) \\ \Phi_{ij} & -\varepsilon(H_j + H_j^T) \end{bmatrix} \quad (16)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= A_i H_j + H_j^T A_i^T + B_i F_j + F_j^T B_i^T \\ \Phi_{ij} &= P_0 + D_i - H_j + \varepsilon(A_i H_j + B_i F_j)^T \end{aligned}$$

*Preuve:* En considérant la fonction de Lyapunov (4) avec (9), i.e. le deuxième cas décrit dans la section précédente, le système en boucle fermée (3) est stable si son dual (14) l'est (c.f. propriété 1), i.e. si :

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{\xi}^T P_h \xi + \xi^T P_h \dot{\xi} \\ &= \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P_h \\ P_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de (14), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} G(\xi)^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Considérons  $U_h$  et  $V_h$  deux matrices libres et inversibles de dimensions appropriées. En appliquant le lemme 1, (17) est vérifiée si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} 0 & P_h \\ P_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_h \\ V_h \end{bmatrix} \left[ G(\xi)^T \quad -I \right] + (*) \prec 0 \quad (19)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} U_h H_h^{-T} F_h^T B_h^T + U_h A_h^T + (*) & (*) \\ V_h H_h^{-T} F_h^T B_h^T + V_h A_h^T - U^T & -V - V^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (20)$$

Posons  $U_h = H_h^T$  et  $V_h = \varepsilon H_h^T$ , où  $\varepsilon$  est un scalaire positif, (20) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{hh} & (*) \\ \Phi_{hh} & -\varepsilon(H_h + H_h^T) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (21)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{hh} &= A_h H_h + B_h F_h + (*) \\ \Phi_{hh} &= P_h - H_h + \varepsilon(H_h^T A_h^T + F_h^T B_h^T) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2 on obtient les conditions du théorème 2. ■

**Remarque 2 :** *Les conditions présentées dans le théorème 1 ne sont pas strictement LMI car elles nécessitent la connaissance d'un paramètre  $\varepsilon$ , qui doit être fixé à l'avance. Notons que dans la preuve du théorème 2, l'introduction de ce paramètre n'est plus obligatoire. Nous avons néanmoins choisi de le laisser afin de donner plus de liberté au choix de  $U_h$  et  $V_h$ . Ce paramètre  $\varepsilon$  est usuellement choisi dans une famille logarithmique telle que  $\varepsilon \in \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^6\}$ .*

## 4 Exemples de simulation

Dans cette section, deux exemples numériques sont proposés. Le premier, basé sur un modèle T-S académique d'ordre deux, permet de comparer le domaine de faisabilité de chacun des deux théorèmes présentés dans cet article avec les résultats, valables pour le

premier et second ordre, présentés dans [12]. Ensuite, un exemple d'un système d'ordre 4 (bras de robot flexible [19]), n'admettant de solutions qu'avec le théorème 2, est proposé.

### 4.1 Exemple 1

Soit le modèle flou T-S avec deux règles [9] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (22)$$

où  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]$ ,  
 $h_1(x_1) = (1 - \sin(x_1))/2$ ,  
 $h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$  et les matrices :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Une loi de commande non-PDC de la forme (2) peut être synthétisée à partir d'une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (4) avec  $P_1$  et  $P_2$  sous la forme suivante :

$$P_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & p_{12} \\ p_{12} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & p_{12} \\ p_{12} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

La figure 1 montre le domaine de faisabilité calculé à partir des théorèmes 1 et 2 ( $\varepsilon = 0.1$ ) définis dans cet article et du théorème 2 donné dans [12] en utilisant la LMI Toolbox de MATLAB [20]. Comme nous pouvons le remarquer, les théorèmes 1 et 2 présentés dans ce papier conduisent sensiblement au même résultat pour un système d'ordre 2 et sont moins conservatifs que les résultats obtenus à partir du théorème 2 de [12].

### 4.2 Exemple 2

Soit le bras de robot flexible représenté comme dans la figure 2 et décrit par le mo-

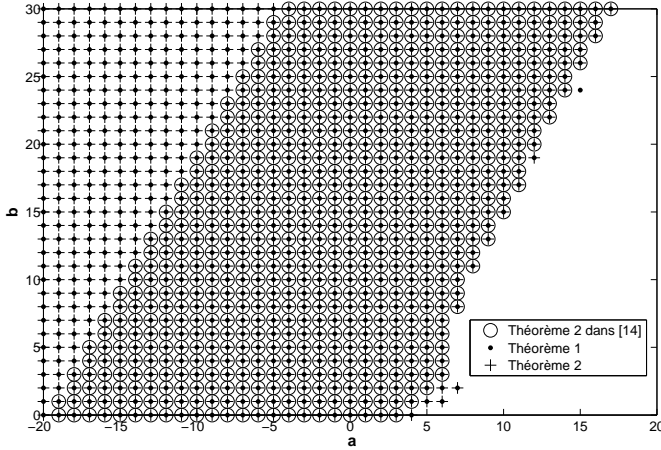


Figure 1 – Comparaison entre les domaines de faisabilité obtenus grâce aux théorème 1, théorème 2 et théorème 2 dans [12].

dèle non linéaire d'ordre 4 [21] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{k}{J_1}(x_2(t) - x_1(t)) \\ \quad - \frac{J_1}{mgLf}mgLf(x_1(t))x_1(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{J_2}[u - k(x_2(t) - x_1(t))] \end{cases} \quad (23)$$

où  $J_1$ ,  $J_2$  sont respectivement l'inertie de l'actionneur et du bras,  $m$  la masse du bras,  $L$  la longueur du bras,  $k$  la raideur du ressort et  $f(x_1(t)) = \sin(x_1(t))/x_1(t) \in [\rho, 1]$ .  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement la position angulaire du bras et celle de l'actionneur.

Une décomposition en secteurs non linéaires [2] permet d'obtenir un modèle T-S exact de (23) donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))A_i x(t) + Bu(t) \quad (24)$$

avec  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$ ,  $h_1(x_1(t)) = (f(x_1(t)) + \rho)/(1 + \rho)$ ,  $h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$ ,  $\rho = \min(\sin x_1(t)/x_1(t))$  et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k-mgL}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k-mgL\rho}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur (2) ont été obtenus

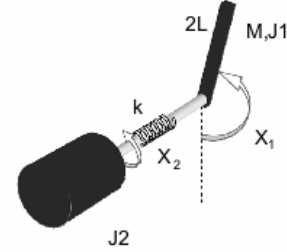


Figure 2 – Bras de robot flexible [19].

grâce au théorème 2 en utilisant la LMI toolbox de MATLAB. Les paramètres du modèle sont :  $k = 100N.m.rd^{-1}$ ,  $m = 1kg$ ,  $g = 9,81m.s^{-2}$  et  $L = 1m$ . La solution du théorème 2 avec  $\varepsilon = 0,1$  est donnée par :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 98,9 & 100,3 & -147,2 & -173,5 \\ 100,5 & 109,5 & -164,1 & -224,0 \\ -41,0 & -61,4 & 864,8 & 986,3 \\ -14,9 & -60,3 & 463,5 & 920,4 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 109,1 & 113,8 & -180,0 & -177,4 \\ 98,2 & 108,3 & -177,9 & -218,8 \\ -47,6 & -109,0 & 852,6 & 1103,5 \\ 52,7 & -25,4 & 305,9 & 935,1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 100,8 & 100,9 & -89,2 & -67,7 \\ 100,9 & 106,3 & -134,9 & -131,5 \\ -89,2 & -134,9 & 834,5 & 679,6 \\ -67,7 & -131,5 & 679,6 & 996,7 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 101,3 & 100,9 & -89,2 & -67,7 \\ 100,9 & 106,3 & -134,9 & -131,5 \\ -89,2 & -134,9 & 834,5 & 679,6 \\ -67,7 & -131,5 & 679,6 & 996,7 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -849 & -325 & 1754 & -5159 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -2184 & -1460 & 4762 & -4238 \end{bmatrix}$$

La figure 3 montre les trajectoires de l'état du modèle en boucle fermée du robot flexible et de son dual. Comme nous pouvons le

constater, la loi de commande non-PDC obtenue au travers du système dual stabilise le système non linéaire initial. Afin d'illustrer la propriété 1, l'évolution des valeurs propres du système non linéaire et de son dual le long de leurs trajectoires respectives est présentée figure 4. Bien entendu, celles-ci évoluent toutes dans la partie gauche du plan complexe.

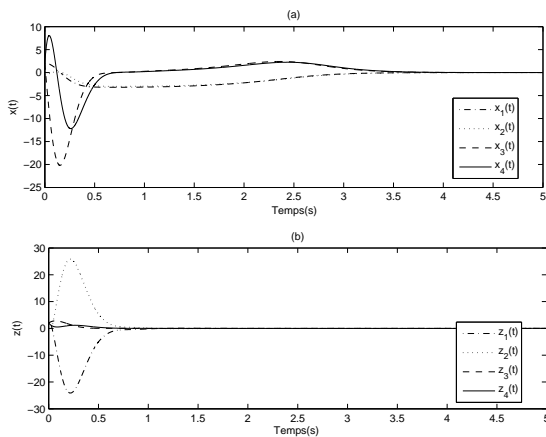


Figure 3 – Trajectoires en boucle fermée : (a) Système non linéaire (23) - (b) Système dual.

## 5 Conclusion

Dans cet article, le problème de la stabilisation non-quadratique des systèmes flous T-S via une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne a été traité. Tout d'abord, des conditions obtenues au travers d'une approche usuelle ont été proposées. Ses limites ont toutefois été soulignées puisqu'elles ne permettent d'aboutir à des conditions LMI que pour les systèmes d'ordre inférieur ou égale à deux. Ce verrou majeur, depuis les travaux de Rhee et Won en 2006, a été levé grâce à la propriété de dualité des systèmes. Fort de ce nouveau résultat, la voie est maintenant ouverte pour d'autres problèmes d'automatique avancée des systèmes flous T-S via des fonctions de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes.

### Remerciements :

Les auteurs souhaitent remercier M. Kurt Viligne pour ses conseils avisés au cours de cette étude.

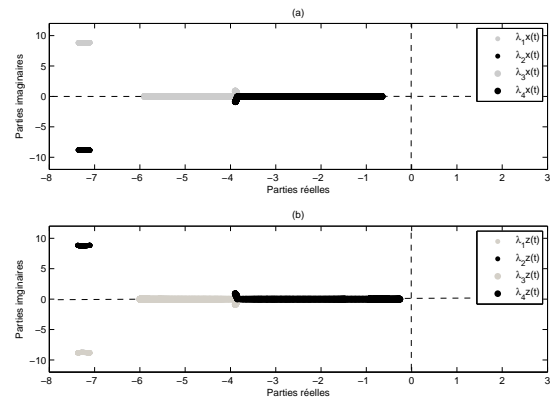


Figure 4 – Valeurs propres le long de la trajectoire : (a) Système non linéaire (23) - (b) Système dual.

## Références

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.
- [3] M. Johansson, A. Rantzer, and K. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 6, pp. 713–722, 1999.
- [4] H. Ohtake, K. Tanaka, and H. Wang, "Switching fuzzy model-based control for dynamical systems with input nonlinearity," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vancouver, BC, July 2006, pp. 285–290.
- [5] K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni, A. Jaadari, and C. D. Chinh, "Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law," *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 14, no. 2, pp. 40–49, 2012.



- [6] K. Tanaka, T. Hori, and H. Wang, "A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 582–589, 2003.
- [7] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, F. Souza, and E. M. Mendes, "Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems," *Automatica*, vol. 45, no. 6, pp. 1580–1583, 2009.
- [8] T. M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton, and S. Labiod, "Non-quadratic local stabilization for continuous-time takagi-sugeno models," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 201, pp. 40 – 54, 2012.
- [9] B.-J. Rhee and S. Won, "A new fuzzy lyapunov function approach for a takagi-sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211 – 1228, 2006.
- [10] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, and G. S. Avellar, "A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems," *Information Sciences*, vol. 179, no. 8, pp. 1149 – 1162, 2009.
- [11] E. Tognetti, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, "Improved stabilization conditions for takagi-sugeno fuzzy systems via fuzzy integral lyapunov functions," in *American Control Conference (ACC), 2011*, June 2011, pp. 4970–4975.
- [12] R. Marquez, T. M. Guerra, A. Kruszewski, and M. Bernal, "Improvements on non-quadratic stabilization of takagi-sugeno models via line-integral lyapunov functions," in *Intelligent Control and Automation Science*, vol. 3, no. 1, 2013, pp. 468–473.
- [13] K. Guelton, A. Cherifi, and L. Arcese, "Some refinements on stability analysis and stabilization of second order t-s models using line-integral lyapunov functions," in *19th IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, August 2014.
- [14] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese, "Non-pdc controller design for takagi-sugeno models via line-integral lyapunov functions," in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (IEEE-FUZZ 2014)*, Beijing, China, July 2014.
- [15] K. Guelton, T.-M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar, and N. Manamanni, "Comments on fuzzy control systems design via fuzzy lyapunov functions," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, vol. 40, no. 3, pp. 970–972, 2010.
- [16] R. E. Skelton, T. Iwasaki, and D. E. Grigoriadis, "A unified algebraic approach to control design," 1997.
- [17] H. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 324–332, 2001.
- [18] K. Dong and F. Wu, "Robust and gain-scheduling control of lft systems through duality and conjugate lyapunov functions," *International Journal of Control*, vol. 80, no. 4, pp. 555–568, 2007.
- [19] M. Seidi, M. Hajiaghdamemar, and B. Segee, "Fuzzy control systems : Lmi-based design," in *Fuzzy Controllers-Recent Advances in Theory and Applications*, S. Iqbal, N. Boumella, and J. F. Garcia, Eds. Croácia : InTech, 2012, ch. 18, pp. 441–464.
- [20] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, "Lmi control toolbox-for use with matlab, natick, ma : The math works," 1995.
- [21] M. Spong, K. Khorasani, and P. Kokotovic, "An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 4, pp. 291–300, August 1987.