



HAL
open science

Alternative SOS aux conditions LMI pour la synthèse de lois de commande non-PDC pour les modèles flous T-S

Chinh-Cuong Duong, Kevin Guelton, Noureddine Manamanni

► To cite this version:

Chinh-Cuong Duong, Kevin Guelton, Noureddine Manamanni. Alternative SOS aux conditions LMI pour la synthèse de lois de commande non-PDC pour les modèles flous T-S. 22èmes rencontres franco-phones sur la Logique Floue et ses Application (LFA 2013), Oct 2013, Reims, France. hal-02291531

HAL Id: hal-02291531

<https://hal.science/hal-02291531v1>

Submitted on 18 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Alternative SOS aux conditions LMI pour la synthèse de lois de commande non-PDC pour les modèles flous T-S

C.-C. Duong

K. Guelton

N. Manamanni

CRESTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne
Moulin de la Housse BP1034, 51687 Reims, France, kevin.guelton@univ-reims.fr

Résumé :

De nos jours, pour l'analyse non-quadratique des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S), les résultats successivement proposés sous forme LMIs tendent à des conditions de plus en plus complexes avec une réduction de conservatisme parfois discutable. Cet article présente une exploration de techniques alternatives aux approches LMIs dans le contexte non-quadratique. Dans la majeure partie des travaux existant, les conditions non-quadratiques LMIs souffrent de la présence de paramètres de synthèse difficiles à obtenir dans la pratique ou conduisent à l'obtention de conditions locales. L'objectif de ce travail consiste donc à montrer qu'une approche tirée de l'optimisation polynomiale (formalisme "Sum-Of-Squares") peut être employée afin de synthétiser un contrôleur non-quadratique valide sur l'ensemble de l'espace de définition du modèle T-S considéré. Cependant, il est également souligné que ces approches souffrent de restrictions de modélisation mais ouvrent la porte vers de possibles perspectives.

Mots-clés :

Modèles flous Takagi-Sugeno; Stabilisation non-quadratique; commande Non-PDC; Sum-Of-Squares.

Abstract:

Nowadays, when dealing with non-quadratic controllers design for continuous-time Takagi-Sugeno (T-S) models, LMIs-based successive conditions become more and more complex for a conservatism reduction that is sometime questionable. In this paper it is assumed that it is interesting to explore what can be done, else than LMIs, in the non-quadratic framework. In most of the cases, non-quadratic LMIs suffer from the requirement of unknown parameters or lead to local stability analysis. The aim of this paper is to show, at a first attempt, that the Sum-Of-Squares formalism is suitable to design non-PDC controllers which stabilizing T-S models on their whole definition set. However, it is pointed-out that the SOS formalism requires a restrictive modelling assumption but opening some possible further prospects.

Keywords:

Takagi-Sugeno fuzzy models; Non-quadratic stabilization; Non-PDC controller design; Sum-Of-Squares.

1 Instructions

Les modèles Takagi-Sugeno (T-S) ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières décennies. En effet, initialement introduits en 1985 [1], les modèles T-S sont décrits par une collection de règles floues de type SI-ALORS et dont les conclusions permettent d'approximer fidèlement la dynamique de systèmes non linéaires. Depuis, par le biais des techniques de décomposition en secteurs non linéaires [2], l'intérêt de la communauté pour ce type de systèmes s'est accru en raison de leur capacité à représenter fidèlement un modèle non linéaire sur tout ou partie de son espace d'état. Ainsi, de manière similaire aux systèmes Quasi-LPV (Linéaires à Paramètres Variants), les modèles T-S constituent des représentations polytopiques convexes des systèmes non linéaires, c'est-à-dire des collections de modèles linéaires interconnectés par des fonctions convexes non linéaires. Basés sur ces propriétés de convexité, de nombreux travaux ont été réalisés pour l'analyse de leurs stabilités ou de leurs stabilisations au travers de l'optimisation d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) obtenues par l'application de la méthode direct de Lyapunov, [3-6].

La plupart des résultats sur l'analyse, la synthèse de lois de commande ou d'observateurs pour les systèmes T-S, ont été obtenus à l'aide d'une fonction candidate quadratique de Lyapunov. Néanmoins, ces résultats souffrent de conservatisme dans la mesure où elles requièrent la recherche de variables de décisions communes à un ensemble de contraintes LMIs [7]. Afin de réduire le conservatisme, des schémas de relaxation ont été proposés [8-9] et de récents travaux se sont concentrés sur l'emploi de

fonctions candidates non-quadratiques de Lyapunov (NQLF), e.g. [10-11]. Malgré tout, ces approches restent difficiles à mettre en œuvre dans le cas des systèmes décrits en temps continu. En effet, dans ce cas, un terme dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaît au sein des conditions de stabilité, rendant difficile l'obtention de conditions LMIs. Afin de contourner ce problème, l'emploi de fonctions candidates de Lyapunov sous forme d'intégrales curvilignes a été proposé au prix de restrictions liées aux contraintes d'indépendances du chemin parcouru [12-14]. D'autres travaux récents ont également été proposés en reconsidérant les objectifs de synthèse à un cadre local, e.g. [15]. Néanmoins, la formulation de ces conditions s'avère quelque peu complexe et l'obtention de conditions globales demeure un problème ouvert. Parallèlement aux résultats sur l'analyse des modèles T-S à base de LMIs, des travaux préliminaires ont récemment vu le jour sur l'analyse et la stabilisation des modèles T-S polynomiaux par le biais de techniques d'optimisation « Sum-Of-Squares » (SOS) [16-17]. Ainsi, similairement aux approches LMI dans le cadre non-quadratique, ces premiers résultats SOS pour l'analyse de la stabilité ont été étendus, afin de réduire le conservatisme, par l'emploi de fonction candidate de Lyapunov polynomiale multiples [18-20].

À ce jour, concernant les approches LMI, un constat s'impose : les résultats successifs sont de plus en plus complexes pour une réduction de conservatisme qui est parfois minime. Il semble donc opportun de reconsidérer les approches proposées et d'explorer les alternatives possibles dans ce contexte. L'objectif de cet article consiste donc à explorer une alternative possible aux conditions de synthèse de contrôleurs non-quadratiques à base de LMI pour les modèles T-S sans pour autant prétendre, à ce stade, réduire le conservatisme. Ainsi, des conditions SOS, dédiée à la synthèse globale de contrôleurs non-quadratique, sont proposées pour les modèles T-S conventionnels [22]. En effet, ces derniers peuvent être vus comme des cas particuliers des modèles T-S polynomiaux. L'avantage de cette approche repose sur le fait

qu'elle ne nécessite pas la connaissance à priori de paramètres difficiles à obtenir dans la pratique (comme c'est le cas pour les approches LMI), même si, à ce jour, une hypothèse de modélisation restrictive reste requise (cf. hyp. 1 ci-dessous) [16-17, 22].

La suite de cet article est organisée comme suit: Tout d'abord, les approches usuelles de synthèse non-quadratique de contrôleurs pour les modèles T-S sont présentées et discutées. Ensuite, de nouvelles conditions SOS sont proposées comme alternative aux approches LMI. Finalement, un exemple numérique illustre la validité de l'approche proposée.

2 Formulation du problème de synthèse non-quadratique et discussion sur les approches LMI

Soit la classe des modèles non linéaires représentée par:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $A(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B(x(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ représentent des matrices dont les arguments peuvent contenir des fonctions non linéaires bornées sur un espace compact $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ de l'espace d'état.

Par l'application de la méthode de décomposition en secteurs non linéaires [2], les modèles représentés par (1) peuvent être réécrit exactement sur Ω sous la forme de modèles T-S donnés par:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

où $z(t) \in \mathfrak{R}^p$ est le vecteur de prémisses, $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ sont des matrices constantes et $h_i(z(t)) > 0$ sont les fonctions d'appartenance positives et vérifiant la propriété de somme convexe $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Considérons maintenant la loi de commande non-PDC donnée par [10]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i \right)^{-1} x(t) \quad (3)$$

où $F_i \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et $X_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ sont les matrices de gain à synthétiser.

Remarque 1: A partir de la décomposition en secteurs non linéaires [2], le modèle T-S (2) est réputé valide localement (sur Ω) si des non linéarités contenues dans (1) ne sont pas bornées sur l'ensemble de l'espace d'état. Néanmoins, si toutes les non linéarités sont bornées sur Ω , (2) représente (1) dans sa globalité. De ce fait, dans la suite (tout comme d'ailleurs pour l'ensemble des travaux sur la commande des systèmes T-S), un contrôleur non-PDC (3) est dit globalement asymptotiquement stabilisant (GAS) pour un modèles T-S donné (2) s'il le stabilise sur l'ensemble de son espace de définition Ω , plutôt que sur l'ensemble de l'espace d'état du modèle non linéaire initial (1).

Notations: Dans ce qui suit, afin d'alléger les expressions mathématiques, le temps t est omit lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. De plus, pour une matrice M donnée, on note

$$He(M) = M + M^T, \quad M_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) M_i, \quad \text{ou encore}$$

$$M_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) M_{ij} \dots$$

En substituant (3) dans (2), la dynamique en boucle fermée peut être exprimée par:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left(A_i + B_i F_j \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) X_i \right)^{-1} \right) x \quad (4)$$

Il convient donc maintenant de proposer des conditions de synthèse du contrôleur (3) de telle sorte que la dynamique en boucle fermée (4) soit stable. Dans cette optique, la méthode directe de Lyapunov a très largement été utilisée pour aboutir à des conditions sous forme de LMI, e.g.[10]. Parmi les fonctions candidates de Lyapunov, les fonctions floues de Lyapunov (fonctions non-quadratiques, NQLF) ont fait l'objet d'une attention

particulière puisqu'elles partagent la même structure d'interconnexion floue que le système à stabiliser et conduisent à une réduction substantielle du conservatisme [3]. Ainsi, afin de stabiliser (4), on considère la NQLF donnée par [10]:

$$v(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) X_i \right)^{-1} x \quad (5)$$

qui est strictement positive pour $x(t) \neq 0$ avec $X_i = X_i^T > 0$.

Le schéma de relaxation donné par le lemme suivant sera utilisé dans les preuves des théorèmes pour réduire le conservatisme des conditions de synthèse de contrôleurs.

Lemme 1 [9]: Soient Υ_{ij} des matrices de dimensions appropriées, l'inégalité:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \Upsilon_{ij} < 0 \quad (6)$$

est vérifiée si, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / j \neq i$, les inégalités (7) et (8) sont vérifiées.

$$\Upsilon_{ii} < 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0 \quad (8)$$

Le théorème suivant, inspiré de [11], exprime des conditions non-quadratiques LMI pour la synthèse de contrôleurs non-PDC (3).

Théorème 1: Soient $\forall i \in \{1, \dots, r\}, |\dot{h}_i(z)| < \theta_i$. Le modèle T-S (2) est localement asymptotiquement stabilisé par le contrôleur non-PDC (3) s'il existe les matrices F_j , $X_i = X_i^T > 0$ et R_{ij} telles que, $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3 / j \neq i$, les LMIs (7), (8) et $X_k + R_{ij} > 0$ soient satisfaites, avec:

$$\Upsilon_{ij} = He(A_i X_j + B_i F_j) - \sum_{k=1}^r \theta_k (X_k + R_{ij}) \quad (9)$$

La preuve du théorème 1 est ommise dans cet article dans la mesure où elle suit les même étapes que celles proposées dans [11].

Remarque 2: Le lemme borné réel donné au théorème 1 constitue une légère amélioration des conditions LMI proposées dans [11]. En effet, les conditions de cette dernière étude peuvent être obtenues en simplifiant le théorème 1, i.e. en posant les variables de décision libres $R_{ij} = R$ communes. De plus, en posant $R_{ij} = 0$, on obtient les conditions non-quadratiques proposées dans [10]. Enfin, en posant $X_k = X$ et $R_{ij} = -X$ communes, on retrouve les conditions quadratiques classiques [3][9]. Par conséquent, le théorème 1 inclue à titre de cas particuliers ces résultats antérieurs et conduit donc à une réduction du conservatisme.

Remarque 3: Le théorème 1 requiert, pour l'implémentation des LMIs, la connaissance a priori des bornes θ_i des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance $\dot{h}_i(z(t))$. Ce point fait l'objet de nombreuses critiques dans la mesure où les fonctions d'appartenance dépendent souvent de l'état dont la dynamique ne peut être, par définition, connue à l'avance. De ce fait, dans la pratique, il est souvent impossible d'estimer ces bornes avant même d'avoir synthétisé la boucle fermée. De plus, en l'absence de connaissances sur la dynamique en boucle fermée, il est incorrect de parler de conditions asymptotiques globales sur Ω dans la mesure où il est hypothétique de dire que $|\dot{h}_i(z)| < \theta_i$ pour toutes conditions initiales $x(0) \in \Omega$.

Remarque 4: D'autres approches permettant de s'affranchir du problème des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance ont été proposées. Tout d'abord, l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (LIFLF) a été proposé dans [12-14]. Néanmoins, même si de récents travaux conduisent à des conditions LMIs en stabilisation [14], cette approche nécessite de conditionner les variables de décision X_i (matrices de Lyapunov) à un cas particulier où les termes anti-diagonaux sont communs et

donc source de conservatisme. Plus récemment, un résultat local a été proposé pour contourner le problème du choix des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance [15]. En effet, l'idée est de maximiser un

$$\text{domaine d'attraction } D = \left\{ x : x \in \Omega, \left\| \sum_{j=1}^r \dot{h}_j P_j \right\| < \lambda \right\}$$

garanti. Bien que ce résultat soit LMI (avec une formulation LMI quelque peu complexe), il reste néanmoins local dans la mesure où le domaine d'attraction D ne recouvre pas l'ensemble Ω dans sa globalité.

À ce stade, les critiques soulignées aux remarques 3 et 4 peuvent être interprétées comme des inconvénients des approches LMI non quadratiques pour les modèles T-S. De plus, les améliorations successives des travaux sur les approches LMI non quadratiques conduisent à des conditions de plus en plus complexe pour un gain de conservatisme qui est parfois discutable. Il semble donc intéressant d'explorer les alternatives possibles pour formuler le problème de synthèse non quadratique pour les modèles T-S. Ce point fait l'objet de la section suivante qui constitue la contribution principale de cet article où des conditions SOS (Sum-Of-Square) sont proposées comme alternative possible aux conditions LMI.

3 Conditions non-quadratiques SOS pour la synthèse de lois de commande pour les modèles T-S

Dans cette section, l'objectif est de présenter de nouvelles conditions de synthèse non quadratique de contrôleurs non-PDC (3) pour les modèles T-S (2) conduisant à la stabilisation globale (sur Ω) de la dynamique en boucle fermée (4). Ces conditions sont basées sur le formalisme SOS [23] et une fonction candidate de Lyapunov non quadratique (5) [22].

Pour faciliter la compréhension du résultat et clarifier les preuves mathématiques, quelques préliminaires (Définitions, Hypothèses et lemmes) sont présentés ci-dessous.

Hypothèse 1: Dans la lignée des travaux existants sur la stabilisation des modèles flous polynomiaux [16-17] et afin d'éviter l'obtention de conditions non convexes, on suppose que le vecteur de prémisses z ne dépend uniquement que des variables d'état qui ne sont pas directement affectées par la commande. C'est-à-dire, les variables d'état dont les lignes correspondantes dans les matrices d'entrée B_i sont nulles. Ainsi, on note A_i^k la $k^{\text{ème}}$ ligne de A_i . $K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$ est l'ensemble des indices des lignes de B_i dont les arguments sont nuls. On peut donc écrire:

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^r h_i(z) A_i^k x, \forall k \in K \quad (10)$$

et $\forall s \in \{1, \dots, r\}$,

$$\frac{\partial h_i(z)}{\partial x_s} = 0, \forall s \in \{1, \dots, n\} / K \quad (11)$$

Hypothèse 2: $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $h_i(z)$ sont continûment dérivables selon chaque variable d'état x_s (avec $s \in K$) sur Ω . De ce fait, $g_i^s(z) = \frac{\partial h_i(z)}{\partial x_s}$ est une fonction bornée sur Ω telle que $\forall t, g_k^s(z) \in [\alpha_{k1}^s, \alpha_{k2}^s]$ et, ces bornes sont toujours connues sur Ω alors que $|\dot{h}_i(z)| < \theta_i$ ne peuvent être déterminées à l'avance. Aussi, il est possible d'appliquer à nouveau une décomposition en secteur non linéaire sur $g_k^s(z)$ permettant de définir deux fonctions convexes, $\omega_{k1}^s(z) \geq 0$ et $\omega_{k2}^s(z) \geq 0$ avec $\omega_{k1}^s + \omega_{k2}^s = 1$, telles que:

$$g_k^s(z) = \frac{\partial h_k(z)}{\partial x_s} = \sum_{\tau=1}^2 \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s \quad (12)$$

Exemple: Afin d'illustrer l'hypothèse 2, considérons la fonction d'appartenance $h_1(x_1) = \sin^2 x_1$. Sa dérivée temporelle $\dot{h}_1(x_1) = 2\dot{x}_1 \cos x_1 \sin x_1$ dépend de \dot{x}_1 et donc ses bornes ($|\dot{h}_1(z)| < \theta_1$) sont inconnues avant la synthèse d'un contrôleur puisque la dynamique

en boucle fermée \dot{x}_1 n'est pas encore synthétisée. Cependant, $g_1^1(x_1) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1}$

$= 2 \cos x_1 \sin x_1 \in [\alpha_{11}^1, \alpha_{12}^1]$ est bornée quelque soit x_1 et, $\alpha_{11}^1 = -1$ et $\alpha_{12}^1 = 1$ sont des paramètres connus!

Ainsi, avec $\omega_{11}^1(x_1) = \frac{1}{2} - \cos x_1 \sin x_1 \geq 0$

et $\omega_{12}^1(x_1) = \frac{1}{2} + \cos x_1 \sin x_1 \geq 0$, $\omega_{11}^1 + \omega_{12}^1 = 1$, on

peut écrire $g_1^1(x_1) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} = \sum_{\tau=1}^2 \omega_{1\tau}^1(z) \alpha_{1\tau}^1$.

Le théorème suivant exprime les conditions non-quadratiques SOS pour la synthèse de contrôleurs non-PDC (3) globalement stabilisants pour la classe de modèles (2) sur Ω sous l'hypothèse 1.

Théorème 2: Le modèle T-S (2) est globalement asymptotiquement stabilisé (sur Ω) par la loi de commande non-PDC (3) s'il existe les matrices F_j , $X_i = X_i^T > 0$ et R_j , ainsi que les polynômes $\varepsilon_{1i}(x) > 0$, $\varepsilon_{2i}(x) \geq 0$, $\varepsilon_{3ij}(x) \geq 0$ et $\varepsilon_{4ij}(x) \geq 0$ tels que, $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, r\}^3$, $j \neq i$, $\forall s \in K$ et $\forall \tau \in \{1, 2\}$, les conditions (13), (14), (15) et (16) soient satisfaites.

$$x^T (X_i - \varepsilon_{1i}) x \text{ est SOS} \quad (13)$$

$$x^T (X_k + R_j - \varepsilon_{2kj}) x \text{ est SOS} \quad (14)$$

$$-x^T [P_{i\tau}^q + \varepsilon_{2i} I] x \text{ est SOS} \quad (15)$$

$$-x^T \left(\frac{1}{r-1} P_{i\tau}^q + \frac{1}{2} (P_{i\tau}^q + P_{j\tau}^q) + \varepsilon_{3ij} I \right) x \text{ est SOS} \quad (16)$$

avec $P_{ijk\tau}^s = He(A_i X_j + B_i F_j) - \alpha_{kt}^s A_i^s x (X_k + R_j)$.

Preuve: Soit la fonction candidate non quadratique de Lyapunov (3). Le modèle T-S (2) est stable si, $\forall x$:

$$x^T (He(A_h X_h + B_h F_h) - \dot{X}_h) x < 0 \quad (17)$$

Concentrons nous maintenant sur le terme \dot{X}_h , on peut écrire:

$$\begin{aligned}\dot{X}_h &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_j(z) \dot{h}_k(z) (X_k + R_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} h_j(z) \frac{\partial h_k(z)}{\partial x_s} \dot{x}_s (X_k + R_j)\end{aligned}\quad (18)$$

De plus, sous l'hypothèse 2, $\forall t, g_k^s(z) \in [\alpha_{k1}^s, \alpha_{k2}^s]$ possèdent des bornes connues sur Ω . De ce fait, il existe toujours $\omega_{k1}^s(z) > 0$ et $\omega_{k2}^s(z) > 0$ avec $\omega_{k1}^s + \omega_{k2}^s = 1$, tels que (12) soit définie. Ainsi, l'équation (18) peut être réécrite sous la forme:

$$\dot{X}_h = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s \dot{x}_s (X_k + R_j) \quad (19)$$

En substituant (10) dans (19) et sous l'hypothèse 1, on obtient:

$$\dot{X}_h = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_i(z) h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) \alpha_{k\tau}^s A_i^s x (X_k + R_j) \quad (20)$$

Ainsi, sous l'hypothèse 1 et 2, en considérant (20), l'inégalité (17) est strictement équivalente sur Ω à:

$$x^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{s \in K} \sum_{\tau=1}^2 h_i(z) h_j(z) \omega_{k\tau}^s(z) P_{ijk\tau}^s x < 0 \quad (21)$$

avec $P_{ijk\tau}^s = He(A_i X_j + B_i F_j) - \alpha_{k\tau}^s A_i^s x (X_k + R_j)$

Notons que $x^T P_{ijk\tau}^s x$ sont des polynômes scalaires en x . Par conséquent, la négativité de (21), et donc de (17), peut être vérifiée par les outils d'optimisation SOS tools. Ainsi, en appliquant le lemme 1 sur (21), on obtient les conditions SOS exprimées au théorème 2.

Remarque 4: Les principaux avantages de l'approche SOS proposée (théorème 2) vis-à-vis des approches LMI (e.g. théorème 1) sont:

- Les conditions du théorème 2 sont libres de tout paramètres inconnus tels que les bornes des dérivées temporelles des fonctions d'appartenances. En effet, les bornes de

$g_k^s(z)$, α_{k1}^s et α_{k2}^s ne dépendent pas directement de \dot{x} et sont toujours connues et définies sous l'hypothèse 2 (cf exemple ci-dessus).

- L'ensemble des paramètres du théorème 2 étant connus, l'approche SOS proposé permet de garantir, lorsqu'une solution existe, la stabilisation globale sur le domaine de validité du modèle T-S Ω . Notons que ce point ne peut être garanti par les résultats LMI tels que [10-11] et [15], hormis les conditions LMI obtenues au travers d'une fonction candidate de Lypapunov sous forme d'intégrales curvilignes [14]. Cependant, dans ces dernières, un cas particulier avec des matrices de décisions dont les termes anti-diagonaux sont communs est requis.

Enfin, il apparaît clairement que le principal inconvénient des approches SOS pour la stabilisation des système repose sur l'hypothèse 1. En effet, le vecteur de prémisses z ne doit dépendre uniquement des états qui ne sont pas affectés directement par la commande. Cette hypothèse est bien entendue restrictive et, comme cela est précisé dans [16], il est souhaitable d'employer un changement de base permettant, autant que faire se peut, d'introduire le maximum de lignes nulles possibles au sein des matrices d'entrées B_i . Ce point peut être considéré comme le verrou principal des approches SOS et devrait faire l'objet de futurs travaux.

4 Exemple de simulation

Soit le modèle T-S donné par:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (22)$$

□ où $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
 $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $h_1(x_2) = \frac{1}{2}(1 - \sin x_2)$
et $h_2(x_2) = 1 - h_1(x_2)$.

Rappelons que, en appliquant le théorème 1, un contrôleur non-PDC garantissant la stabilisation non-quadratique globale ne peut être synthétisé, hormis les travaux employant une fonction candidate de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne [14]. De plus, comme l'illustre le portrait de phases tracé sur la figure 1, le modèle T-S en boucle ouverte (22) est instable.

D'après les définitions de h_1 et h_2 , on a :

$$\frac{\partial h_1(x_2)}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \cos x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial h_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \cos x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (24)$$

Ainsi, le théorème 2 peut être implémenté avec les paramètres connus $\alpha_{11}^1 = \alpha_{21}^1 = -\frac{1}{2}$ et $\alpha_{12}^1 = \alpha_{22}^1 = \frac{1}{2}$. Notons que les variables de décision ε_{1i} , ε_{2i} , ε_{3ij} et ε_{4ij} ont été fixées comme des polynômes d'ordre zéro (variables scalaires). Le résultat, obtenu via la boîte à outils SOSTOOLS pour Matlab [23], est donné par les matrices:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -20.608 & -2.9356 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -20.8868 & -1.0598 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 7.9772 & -2.068 \\ -2.068 & 0.61071 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 7.9773 & -2.0683 \\ -2.0683 & 0.60992 \end{bmatrix},$$

et permettent alors de synthétiser la loi de commande non-PDC donnée par:

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i \left(\sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) X_i \right)^{-1} x(t) \quad (25)$$

qui stabilise globalement (22) comme cela est illustré par le portrait de phases de la figure 2.

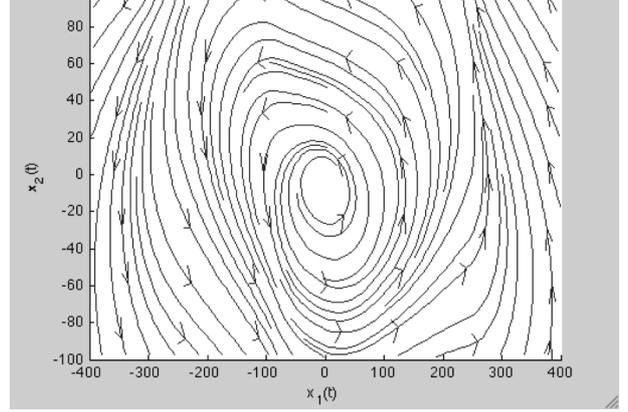


Fig. 1. Portrait de phase en boucle ouverte.

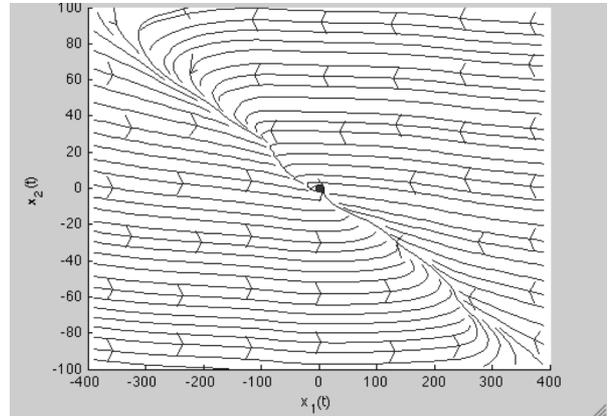


Fig. 2. Portrait de phase en boucle fermée.

5 Conclusion

Dans cet article, une alternative aux approches LMI pour la stabilisation non-quadratique globale des modèles Takagi-Sugeno a été proposée. En effet, l'efficacité des approches LMI a maintes fois été démontrée pour l'analyse des modèles Takagi-Sugeno. Cependant, dans le cadre non-quadratique, ces dernières souffrent de conservatisme. De plus les récentes et successives améliorations dans le cadre non-quadratique conduisent à des conditions de plus en plus complexe avec un gain de conservatisme qui est parfois discutable. L'objectif était donc ici d'explorer ce qui peut être fait, de manière alternative, pour synthétiser une loi de commande non-quadratique globale. Ainsi des conditions issues de l'optimisation polynomiale et plus

précisément des techniques SOS ont été proposées. Il convient toutefois de souligner qu'il s'agit ici d'une première tentative et qu'en aucun cas l'approche proposée prétend fournir de meilleurs résultats en termes de performances et de conservatisme que les dernière approches LMI proposées. Ceci-dit, l'approche SOS proposée présente l'avantage de fournir une méthodologie de synthèse globale lorsque la plupart des approches LMI non-quadratiques existantes ne peuvent prétendre à cet objectif. Néanmoins, cet avantage est obtenu au prix d'une hypothèse de modélisation restrictive, pouvant être entendue comme l'inconvénient majeur des approches SOS, qu'il conviendra de lever dans de futures études.

Remerciements

Les auteurs remercient Mr Paul Hinaume pour ses conseils concernant l'implémentation des conditions SOS à l'aide de la boîte à outils SOSTOOLS.

References

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modelong and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H.O. Wang, "Fuzzy control systems design and analysis: A linear Matrix Inequality Approach," Wiley, New York, USA, 2001.
- [3] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [4] G. Feng, "A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 14, no. 5, pp. 676-697, 2006.
- [5] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, "LMI stability conditions for Takagi-Sugeno uncertain descriptors," *IEEE International Fuzzy Sytems conference, FUZZ IEEE 2007*, London, UK, July 23-26, 2007.
- [6] Q. Gao, X.J. Zeng, G. Feng, Y. Wang, J. Qiu, "T-S-Fuzzy-Model-Based approximation and controller design for general nonlinear systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 42, no. 4, pp. 1143-1154, 2012.
- [7] A. Sala, "On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems," *Annual Reviews in Control*, vol. 33, no. 1, pp. 48-58, 2009.
- [8] X. Liu, and Q. Zhang, "New approaches to H_∞ controller design based on fuzzy observers for fuzzy T-S systems via LMI," *Automatica*, vol. 39, no. 9, pp. 1571-1582, 2003.
- [9] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 324-332, 2001.
- [10] K. Tanaka, T. Hori and H.O. Wang, "A multiple Lyapunov approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [11] L.A. Mozelli, R.M. Palhares, F.O. Souza and E.M.A.M. Mendes, "Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems," *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1580-1583, 2009.
- [12] B.J. Rhee and S. Won, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets & Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211-1228, 2006.
- [13] K. Guelton, T.M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar and N. Manamanni, "Comments on fuzzy control systems design via fuzzy Lyapunov functions," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 40, no. 3, pp. 970-972, 2010.
- [14] L.A. Mozelli, R.M. Palhares, G.S.C. Avellar, "A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems," *Information Sciences*, vol. 179, no. 8, pp. 1149-1162, 2009.
- [15] T.M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton and S. Labiod, "Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 201, pp. 40-54, 2012.
- [16] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Othake and H.O. Wang, "A sum-of-squares approach to modeling ans control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 4, pp. 991-922, 2009.
- [17] M. Narimani and H.K. Lam, "SOS-based stability analysis of polynomial fuzzy model-based control systems via polynomial membership functions," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 5, pp. 862-871, 2010.
- [18] K. Guelton, N. Manamanni, D.L. Koumba-Emianiwe and C.D. Chinh, "SOS stability conditions for nonlinear systems based on a polynomial fuzzy Lyapunov function," *18th IFAC World Congress*, vol. 18, no. 1, pp. 12777-12782, Milano, Italy, 2011.
- [19] M. Bernal, A. Sala, A. Jaadari and T.M. Guerra, "Stability analysis of polynomial fuzzy models via polynomial fuzzy Lyapunov functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 185, no. 1, pp. 5-14, 2011.
- [20] K. Guelton, N. Manamanni, C.D. Chinh, D.L. Koumba-Emianiwe, "Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial Lyapunov functions," *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 1-8, 2013.
- [21] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, "Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors," *ISA Transactions*, vol. 49, no. 4, pp. 447-461, 2010.
- [22] C.C. Duong, K. Guelton, N. Manamanni, "A SOS based alternative to LMI approaches for non-quadratic stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2013*, Hyderabad, India, July 7-10.
- [23] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler and P.A. Parrilo, "SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB," Version 2.00. California Inst. Technol., Pasadena, 2004.