



**HAL**  
open science

## Poursuite de trajectoire par approche $H_\infty$ -LFT des modèles flous de type Takagi-Sugeno

Madjid Zerar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni

### ► To cite this version:

Madjid Zerar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni. Poursuite de trajectoire par approche  $H_\infty$ -LFT des modèles flous de type Takagi-Sugeno. 16èmes Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'07), Nov 2007, Nîmes, France. hal-02291519

**HAL Id: hal-02291519**

**<https://hal.science/hal-02291519v1>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Poursuite de trajectoire par approche $H_\infty$ -LFT des modèles flous de type Takagi-Sugeno

## $H_\infty$ -LFT based approach for fuzzy T-S tracking control

M. Zerar

K. Guelton

N. Manamanni

*CRéSTIC-URCA UFR Sciences Exactes et Naturelles*

*Moulin de la Housse B.P.1039-51687 Reims Cedex 2*

{madjid.zerar ; kevin.guelton ; noureddine.manamanni}@univ-reims.fr

### Résumé :

Cet article présente une méthodologie de synthèse de commande pour le suivi de trajectoires des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S). L'approche présentée permet de déterminer, en utilisant les outils de la synthèse  $H_\infty$  et de la représentation LFT (*Linear Fractional Transformation*), une loi de commande dynamique non linéaire par retour de sortie basée sur la même structure que le modèle non linéaire considéré. Cette loi de commande permet de garantir le suivi de trajectoires en assurant un niveau de performance acceptable en présence de perturbations et d'erreurs de modélisation. Le problème de synthèse considéré est formulé et résolu en utilisant les outils des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Enfin, un exemple numérique est traité pour illustrer la pertinence de la méthodologie de synthèse proposée.

### Mots-clés :

Modèles flous, commande robuste, LMIs, LFT.

### Abstract:

This paper presents a methodology for the Fuzzy T-S (Takagi-Sugeno) model tracking control. The overall scheme, based on LFT (Linear Fractional Transformation) and  $H_\infty$  techniques, allows designing an output feedback nonlinear control law with the same structure as the considered nonlinear model. This one is able to track a reference pattern and to ensure robust performances subject to disturbances and modelling errors. The design problem is formulated and solved using a finite set of LMIs (Linear Matrix Inequalities). Finally, an numerical example illustrates the performances of the proposed approach.

### Keywords:

Fuzzy models, robust tracking control, LFT, LMIs.

## 1 Introduction

Durant ces dernières décennies, la commande des modèles flous de type Takagi-Sugeno a

fait l'objet de nombreux travaux [8, 9, 10]. La loi de commande fréquemment utilisée, appelée PDC (*Parallel Distributed Compensation*), a été initialement proposée par Wang *et al* [11]. Elle permet d'élaborer, pour chaque modèle local LTI (Linéaire et Invariant dans le Temps) correspondant à chaque règle floue, une loi commande linéaire basée sur un retour d'état. Une interconnexion de ces lois de commande, par des fonctions non linéaires, est effectuée afin d'assurer la stabilisation du système non linéaire. Plus récemment, le concept de loi de commande PDC a été adapté au suivi de trajectoire des modèles T-S sur la base d'un critère sous-optimal [6] ou encore en utilisant un critère  $H_\infty$  [5] pour la synthèse de loi de commande statique.

Afin d'accroître les performances des lois de commande en suivi de trajectoire obtenues pour des modèles T-S, on considère dans ce papier, le cas des modèles à entrées exogènes pour lesquels une loi de commande dynamique T-S de type  $H_\infty$  sera synthétisée. Pour ce faire, on propose d'adapter la méthodologie de synthèse de régulateur  $H_\infty$ , initialement développée dans le cadre des modèles linéaires donnés sous forme polytopique [1], au cas des modèles non linéaires affines en la commande réécrits sous forme de modèles flous de type T-S à entrées exogènes. Cette méthodologie de synthèse est basée sur la représentation LFT (*Linear Fractional Transformation*) [7] qui permet de boucler deux systèmes dynamiques entre eux.

Ainsi, l'approche proposée permet de déterminer un régulateur non-linéaire robuste par retour de sortie pour un modèle non-linéaire représenté par un modèle flou de type T-S après réécriture du modèle de synthèse sous forme d'une représentation LFT basse [2, 7]. Le régulateur ainsi synthétisé vérifie les objectifs de performances et de robustesse en suivi de trajectoire fixés par un cahier des charges et introduit sous forme de fonctions de pondération. Enfin, en optimisant un critère de type  $H_\infty$  [13], le problème de synthèse peut être résolu en utilisant les outils de résolution des LMIs (*Linear Matrix Inequalities*)

Cet article, composé de quatre parties, est organisé de la façon suivante : dans la seconde partie, après un bref rappel de la représentation LFT basse, nous présentons la classe des systèmes non linéaires considérée ainsi que leurs représentation sous forme T-S. La troisième partie est consacrée à la méthodologie de synthèse d'une loi de commande non linéaire de type T-S. Enfin, la validation de la méthodologie présentée sera illustrée au travers d'un exemple.

## 2 Représentation LFT basse et classe des modèles non linéaires considérée

### 2.1 Représentation LFT basse

La représentation LFT est un formalisme qui permet de boucler deux systèmes linéaires entre eux. Il résulte directement du produit étoile introduit par Redheffer en 1960 [7].

Soient les transferts matriciels  $M$  et  $K$  dont les réalisations d'état sont données par :

$$M = \left( \begin{array}{c|cc} A_1 & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right) \text{ et } K = \left( \begin{array}{c|c} A^c & B^c \\ \hline C^c & D^c \end{array} \right) \quad (1)$$

La représentation LFT basse correspondante au système décrit par  $M$  bouclé par  $K$  est représentée sur la figure 1, où  $u$  est le vecteur de commande,  $y$  est le vecteur de sortie mesurée,  $w$  est le vecteur d'entrées exogènes

permettant de spécifier la trajectoire désirée et  $v$  est le vecteur des sorties à régler.

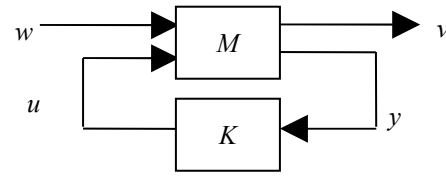


Figure. 1- Schéma bloc d'une LFT basse.

La réalisation d'état du système bouclé équivalent notée  $f_l(M, K)$  est donnée par (1) :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} A_1 + B_2 F D^c C_2 & B_2 F C^c & B_1 + B_2 F D^c D_{21} \\ B^c E C_2 & A^c + B^c E D_{22} C^c & B^c E D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} F D^c C_2 & D_{12} F C^c & D_{11} + D_{12} F D^c D_{21} \end{array} \right] \quad (2)$$

où  $E = (I - D_{22} D^c)^{-1}$  et  $F = (I - D^c D_{22})^{-1}$ .

### 2.2 Classe des modèles non linéaires considérée

La classe des systèmes non linéaires affines en la commande, considérée dans ce travail, est représentée par :

$$(G) : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t) \\ y(t) = C(x(t)) x(t) \end{cases} \quad (3)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y \in \mathfrak{R}^q$  est le vecteur de sortie mesurée,  $A(x) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B(x) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée et  $C(x) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  est la matrice de sortie.

A partir de (3), un modèle non linéaire à entrées exogènes peut-être obtenu en utilisant la structure de commande représentée par la figure 2.

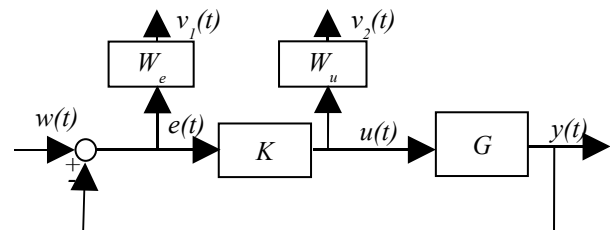


Figure. 2 - Schéma de synthèse du régulateur.

$w \in \mathfrak{R}^q$  représente le vecteur d'entrées exogènes permettant de spécifier la trajectoire désirée,  $e \in \mathfrak{R}^q$  est le vecteur d'erreurs de poursuites,  $v = [v_1 \ v_2]^T \in \mathfrak{R}^{q+m}$  est le vecteur des sorties à régler (erreurs de suivi de consigne, commandes...) pour assurer les performances en suivi de trajectoires désirées. Celles-ci sont introduites dans la structure de synthèse par l'intermédiaire des fonctions de pondération linéaire  $W_e$  et  $W_u$ . La dynamique de poursuite désirée est spécifiée par  $W_e$  et la commande est contrainte par  $W_u$ . Les réalisations d'état de  $W_e$  et  $W_u$  sont données respectivement par :

$$(W_e) : \begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e e(t) \\ v_1(t) = C_e x_e(t) + D_e e(t) \end{cases} \quad (4)$$

et

$$(W_u) : \begin{cases} \dot{x}_u(t) = A_u x_u(t) + B_u u(t) \\ v_2(t) = C_u x_u(t) + D_u u(t) \end{cases} \quad (5)$$

où  $x_e \in \mathfrak{R}^q$  et  $x_u \in \mathfrak{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état associés à  $W_e$  et  $W_u$ . Notons que  $A_e, B_e, C_e, D_e, A_u, B_u, C_u$ , et  $D_u$  sont des matrices de dimensions appropriées.

En utilisant la structure de commande représentée sur la figure 2, un modèle non linéaire augmenté  $M$  peut être donné par l'expression suivante :

$$(M) : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2(\tilde{x}(t)) u(t) \\ v(t) = \tilde{C}_1(\tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{11} w(t) + \tilde{D}_{12} u(t) \\ y(t) = \tilde{C}_2(\tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (6)$$

où  $\tilde{x}(t) = [x_e^T(t) \ x_u^T(t) \ x^T(t)]^T$  est le vecteur d'état augmenté,

$$\tilde{A}(\tilde{x}(t)) = \begin{bmatrix} A_e & 0 & -B_e C(x(t)) \\ 0 & A_u & 0 \\ 0 & 0 & A(x(t)) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_2(\tilde{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & B_u^T & B(x(t))^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{C}_1(\tilde{x}(t)) = \begin{bmatrix} C_e & 0 & -D_e C(x(t)) \\ 0 & C_u & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_2(\tilde{x}(t)) = [0 \ 0 \ C(x(t))], \quad \tilde{D}_{11} = [D_e^T \ 0]^T,$$

$$\text{et } \tilde{D}_{12} = [0 \ D_u^T]^T.$$

A partir du modèle non linéaire donné par l'équation (6), un modèle flou de type T-S peut être obtenu soit par une méthode d'identification, soit par une méthode de linéarisation autour d'un ensemble de points de fonctionnement ou encore par une méthode de découpage par secteurs non linéaires [10]. Cette dernière méthode définissant des modèles locaux en fonction du nombre des non linéarités, permet d'obtenir un modèle flou T-S représentant de manière exacte le modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état. Ainsi, l'inférence d'un système flou à entrées exogènes représentant (6) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\tilde{A}_i \tilde{x}(t) + \tilde{B}_{2i} u(t)) + \tilde{B}_1 w(t) \\ v(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (\tilde{C}_{1i} \tilde{x}(t) + \tilde{D}_{11} w(t) + \tilde{D}_{12} u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \tilde{C}_{2i} \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (7)$$

où  $z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)]$  est le vecteur des  $p$  variables de prémisses,  $r$  est le nombre de règles du modèle flou T-S,  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_1, \tilde{B}_{2i}, \tilde{C}_{1i}, \tilde{C}_{2i}, \tilde{D}_{11}$  et  $\tilde{D}_{12}$  sont les matrices associées à chaque modèle local invariant dans le temps et où les fonctions d'interconnexion non linéaires  $h_i(z(t)) \geq 0$  possèdent la propriété de somme

$$\text{convexe } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1.$$

### 3 Synthèse de loi de commande $H_\infty$ pour modèles T-S à entrées exogènes

Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous noterons  $h_i \equiv h_i(z(t))$ ,  $\tilde{A} \equiv \tilde{A}(\tilde{x}(t))$ , etc. De même, le temps  $t$  sera omis lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés.

L'apport principal de cet article consiste à proposer des conditions LMI permettant de

réaliser, en utilisant les outils  $H_\infty$  et le formalisme LFT, la synthèse d'un régulateur dynamique non-linéaire, noté  $K$ , donné par la représentation d'état sous forme T-S suivante :

$$(K) : \begin{cases} \dot{x}^c(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k A_{ijk}^c x^c(t) \\ \quad + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_j h_k B_{jk}^c y(t) \\ u(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_j h_k C_{jk}^c x^c(t) + \sum_{k=1}^r h_k D_k^c y(t) \end{cases} \quad (8)$$

où  $x^c$  est le vecteur d'état du régulateur,  $A_{ijk}^c$ ,  $B_{jk}^c$ ,  $C_{jk}^c$  et  $D_k^c$  sont des matrices à coefficients constants, de dimensions appropriées, qu'il convient de déterminer.

Afin de pouvoir effectuer la synthèse  $H_\infty$ , du régulateur non linéaire  $K$ , une représentation sous forme de LFT basse (figure 1) est utilisée. Ainsi, la matrice système associée au régulateur (8) est :

$$K(z(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k K_{ijk}$$

$$\text{avec } K_{ijk} = \left( \begin{array}{c|c} A_{ijk}^c & B_{jk}^c \\ \hline C_{jk}^c & D_j^c \end{array} \right)$$

De même, la matrice système associée à (7) est donnée par :

$$M(z(t)) = \sum_{i=1}^r h_i M_i \quad (10)$$

$$\text{avec } M_i = \left( \begin{array}{c|cc} \tilde{A}_i & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_{2i} \\ \hline \tilde{C}_{1i} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_{2i} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

A partir de (9) et (10), le transfert entrées/sorties du système bouclé représenté par une LFT basse peut être exprimé par :

$$v(t) = f_l \left( \sum_{i=1}^r h_i M_i, \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k K_{ijk} \right) w(t) \quad (11)$$

que l'on peut réécrire :

$$v(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k f_l(M_i, K_{ijk}) w(t) \quad (12)$$

où  $f_l(M_i, K_{ijk})$  correspond à la LFT basse du modèle  $M_i$  bouclé avec le régulateur  $K_{ijk}$ .

L'expression de la matrice système du modèle en boucle fermée ( $bf$ ) est donnée par :

$$f_l(M, K) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k f_l(M_i, K_{ijk}) \quad (13)$$

avec

$$f_l(M_i, K_{ijk}) = \left( \begin{array}{c|c} A_{ijk}^{bf} & B^{bf} \\ \hline C_{ik}^{bf} & D^{bf} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} \tilde{A}_i + \tilde{B}_{2j} D_k^c \tilde{C}_{2i} & \tilde{B}_{2j} C_{ik}^c & \tilde{B}_1 \\ \hline B_{jk}^c \tilde{C}_{2i} & A_{ijk}^c & 0 \\ \hline \tilde{C}_{1i} + \tilde{D}_{12} D_k^c \tilde{C}_{2i} & \tilde{D}_{12} C_{ik}^c & \tilde{D}_{11} \end{array} \right) \quad (14)$$

**Remarque 1 :** Tout comme pour la loi de commande PDC définie dans [11], la structure d'interconnexion de la loi de commande (8) permet de compenser totalement la boucle fermée avec le modèle T-S à entrée exogène (7) (cf. preuve du théorème 1). Ceci permettra une obtention plus aisée des conditions de stabilité LMI.

Le théorème suivant résume les conditions LMI permettant d'assurer le suivi de trajectoire du modèle T-S (7) via un régulateur (8) sous la contrainte  $H_\infty$  donnée par :

$$\left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k f_l(M_i, K_{ijk}) \right\|_\infty < \gamma \quad (15)$$

où  $\gamma$  est l'indice de performance.

**Théorème 1 :** La convergence quadratique de l'erreur de suivi de trajectoire du modèle flou T-S à entrées exogènes (7), via la loi de commande (8) vérifiant le critère  $H_\infty$  (15), est assurée s'il existe les matrices  $P_1 = P_1^T > 0$ ,  $Q_1 = Q_1^T > 0$ ,  $D_k^c$ ,  $G_{1ik}$ ,  $G_{2jk}$  et  $G_{3ijk}$  de dimensions appropriées et un scalaire  $\eta > 0$

telles que les LMIs suivantes soient vérifiées pour  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, r$  :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i Q_1 + Q_1 A_i^T \\ + B_{2j} G_{1ik} \\ + G_{1ik}^T B_{2j}^T \end{pmatrix} & (*) & (*) & (*) \\ \begin{pmatrix} A_i^T + G_{3ijk} \\ + C_{2i}^T D_k^c B_{2j}^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_1 A_i + A_i^T P_1 \\ + G_{2jk} C_{2i} \\ + C_{2i}^T G_{2jk}^T \end{pmatrix} & (*) & (*) \\ B_{1i}^T & B_{1i}^T P_1 & -\gamma^2 & (*) \\ (C_{1i} Q_1 + D_{12i} G_{1ik}) & (C_{1i} + D_{12i} D_k^c C_{2i}) & D_{11} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (16)$$

où (\*) dénote, de manière usuelle, une quantité transposée.

**Remarque 2 :** A partir des solutions des LMIs données par les conditions du théorème 1, les matrices  $D_k^c$ ,  $P_1$  et  $Q_1$  sont obtenues de manière directes.  $Q_2$  et  $P_2$  sont alors obtenues en effectuant une décomposition en valeurs singulières (SVD) puisque  $Q_2 P_2^T = I - Q_1 P_1$  (cf preuve ci dessous). Enfin, les matrices  $A_{ijk}^c$ ,  $B_{jk}^c$  et  $C_{ik}^c$  s'obtiennent en effectuant les changements de variables bijectifs :

$$\begin{aligned} B_{jk}^c &= P_2^{-1} (G_{2jk} - P_1^T \tilde{B}_{2j} D_k^c), \\ C_{ik}^c &= (G_{1ik} - D_k^c \tilde{C}_{2i} Q_1) Q_2^{-1}, \text{ puis} \\ A_{ijk}^c &= P_2^{-1} \begin{pmatrix} G_{3ijk} - P_1^T (\tilde{A}_i + \tilde{B}_{2j} D_k^c \tilde{C}_{2i}) Q_1 \\ - P_2 B_{jk}^c \tilde{C}_{2i} Q_1 - P_1^T \tilde{B}_{2j} C_{ik}^c Q_2^T \end{pmatrix} Q_2^{-T} \end{aligned}$$

### Preuve du théorème 1 :

Soit la fonction de Lyapunov quadratique candidate suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \geq 0 \quad (17)$$

où  $P$  est une matrice symétrique et définie positive.

La contrainte  $H_\infty(15)$  peut être réécrite :

$$\int_0^\infty (v(t)^T v(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)) dt < 0 \quad (18)$$

Afin d'alléger les écritures, le temps  $t$  sera omis dans la suite de la démonstration. La décroissance de la dérivée de (17) contrainte par (18) est exprimée par :

$$\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + v^T v - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (19)$$

que l'on peut réécrire telle que :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} x^T (A_{ijk}^{bfT} P + P A_{ijk}^{bf}) x \\ + w^T B^{bfT} P x + x^T P B^{bf} w \\ + v^T v - \gamma^2 w^T w + v^T v - v^T v \end{pmatrix} < 0 \quad (20)$$

D'après (14) on a  $v = C_{ik}^{bf} x + D^{bf} w$ , d'où l'inégalité (20) devient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} x^T (A_{ijk}^{bfT} P + P A_{ijk}^{bf}) x \\ + w^T B^{bfT} P x + x^T P B^{bf} w \\ + x^T C_{ik}^{bfT} v + w^T D^{bfT} v - \gamma^2 w^T w \\ + v^T C_{ik}^{bf} x + v^T D^{bf} w - v^T v \end{pmatrix} < 0 \quad (21)$$

En considérant la forme quadratique de (21), celle-ci est vérifiée si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} A_{ijk}^{bfT} P + P A_{ijk}^{bf} & (*) & (*) \\ B^{bfT} P & -\gamma^2 I & (*) \\ C_{ik}^{bf} & D^{bf} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (22)$$

La congruence de l'inégalité (22) par  $\text{diag}(P^{-1} \ I \ I)$  conduit à :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} P^{-1} A_{ijk}^{bfT} + A_{ijk}^{bf} P^{-1} & (*) & (*) \\ B^{bfT} & -\gamma^2 I & (*) \\ C_{ik}^{bf} P^{-1} & D^{bf} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (23)$$

On pose  $Z = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} > 0$

et  $Z^{-1} = P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix} > 0$  telles que :

$$Z = Z_1 Z_2^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ Q_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_1 \\ 0 & P_2^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (24)$$

Sachant que  $ZZ^{-1} = I$  on a  $Q_2 P_2^T = I - Q_1 P_1$ . L'inégalité (23) peut être réécrite sous la forme :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2^{-T} Z_1^T A_{ijk}^{bfT} \\ + A_{ijk}^{bf} Z_1 Z_2^{-1} \\ B^{bfT} \\ C_{ik}^{bf} Z_1 Z_2^{-1} \end{pmatrix} & (*) & (*) \\ & -\gamma^2 I & (*) \\ & D^{bf} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (25)$$

La congruence par  $\text{diag}(Z_2 \ I \ I)$  de l'inégalité (25) conduit à :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^T A_{ijk}^{bfT} Z_2 \\ + Z_2^T A_{ijk}^{bf} Z_1 \\ B^{bfT} Z_2 \\ C_{ik}^{bf} Z_1 \end{pmatrix} & (*) & (*) \\ & -\gamma^2 I & (*) \\ & D^{bf} & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\text{d'où } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k [\Psi_{ijk}] < 0 \quad (27)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i Q_1 \\ + \tilde{B}_{2j} (D_k^c \tilde{C}_{2i} Q_1 + C_{ik}^c Q_2^T) \\ + (Q_1^T \tilde{C}_{2i}^T D_k^{cT} + Q_2 C_{ik}^{cT}) \tilde{B}_{2j}^T \end{pmatrix} & (*) & (*) & (*) \\ \begin{pmatrix} \tilde{A}_i^T + \tilde{C}_{2i}^T D_k^{cT} \tilde{B}_{2j}^T + P_1^T \tilde{A}_i Q_1 \\ + P_1^T \tilde{B}_{2j} D_k^c \tilde{C}_{2i} Q_1 + P_2 B_{jk}^c \tilde{C}_{2i} Q_1 \\ + P_1^T \tilde{B}_{2j} C_{ik}^c Q_2^T + P_2 A_{ijk}^c Q_2^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{A}_i^T P_1 + P_1^T \tilde{A}_i \\ + (P_1^T \tilde{B}_{2j} D_k^c + P_2 B_{jk}^c) \tilde{C}_{2i} \\ + \tilde{C}_{2i}^T (B_{jk}^c P_2^T + D_k^{cT} \tilde{B}_{2j}^T P_1) \end{pmatrix} & (*) & (*) \\ \tilde{B}_{li}^T & B_{li}^T P_1 & -\gamma^2 I & (*) \\ \tilde{C}_{li} Q_1 + \tilde{D}_{12} (D_k^c \tilde{C}_{2i} Q_1 + C_{ik}^c Q_2^T) & \tilde{C}_{li} + \tilde{D}_{12} D_k^c \tilde{C}_{2i} & \tilde{D}_{11} & -I \end{pmatrix}$$

Afin d'écrire cette inégalité sous forme LMI, les changements de variables bijectif suivants sont effectués :

$$G_{3ijk} = \begin{pmatrix} P_1^T (\tilde{A}_i + \tilde{B}_{2j} D_k^c \tilde{C}_{2i}) Q_1 \\ + P_2 B_{jk}^c \tilde{C}_{2i} Q_1 + P_1^T \tilde{B}_{2j} C_{ik}^c Q_2^T + P_2 A_{ijk}^c Q_2^T \end{pmatrix}$$

$$G_{1ik} = D_k^c C_{2i} Q_1 + C_{ik}^c Q_2, \quad G_{2jk} = P_1^T \tilde{B}_{2j} D_k^c + P_2 B_{jk}^c$$

et  $\gamma^2 = \eta$ .

Ce qui conduit aux conditions présentées par le théorème 1. ■

## 4 Exemple d'illustration

Dans cette section, nous appliquons la méthodologie présentée dans la section 3 sur le modèle non linéaire donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (28)$$

où  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  représente le vecteur d'état,  $u(t)$  est l'entrée de commande,  $y(t) = x_1(t)$  est le vecteur des sorties à commander et  $A(x(t))$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices données par :

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin^2(x_1(t)) & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$





La figure 3 représente l'évolution de la sortie du modèle et la trajectoire de consigne correspondant à la sortie désirée ainsi que l'évolution du signal de commande. Notons que le suivi de trajectoires se fait correctement avec toutefois un léger délais de l'ordre de  $0,06s$ , ce qui, compte tenu de la dynamique spécifiée est relativement faible.

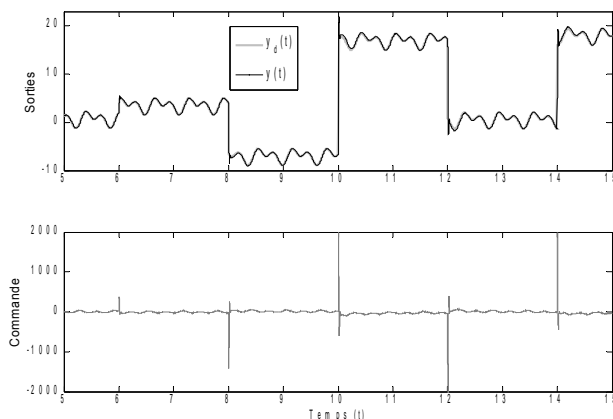


Figure. 3 – Simulation en suivi de trajectoire.

## 5 Conclusion

A travers ce papier, nous nous sommes intéressés au problème du suivi de trajectoires par retour de sortie dynamique des modèles flous de type Takagi-Sugeno basé sur une approche  $H_\infty$ -LFT. Une méthodologie de synthèse de loi de commande dynamique a été proposée. Celle-ci est basée, dans un premier temps, sur la réécriture sous forme de modèle de type T-S augmenté à entrée exogène d'un modèle non linéaire. Dans un deuxième temps, un régulateur dynamique associé au modèle T-S obtenu est déterminé en utilisant les outils de synthèse  $H_\infty$  basés sur l'approche LFT.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier la région Champagne-Ardenne pour son soutien financier dans le cadre du projet SYS-REEDUC ainsi que M. Saïfi Nybian pour ses remarques avisées.

## Références

- [1] P. Apkarian, J. M. Biannic, and P. Gahinet. Self-Scheduled  $H_\infty$  Control of a Missile via Linear Matrix Inequalities. *Journ. of Guidance Control and Dyn.*, vol. 18, no. 3, pp. 532-538. Dec 1993.
- [2] J. C. Doyle, J. E. Wall, and K. Zhou. Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ . In *proceedings of the 30<sup>th</sup> Conf. On Dec. And Control*, pages 1227-1232, Brighton, En, December 1991.
- [3] S. Font. Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis: Optimisation  $H_\infty$  et approche symbolique de la forme standard. Thèse de Doctorat, Université Paris XI et Supélec, 1995
- [4] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, M. Chilali. *The LMIControl Toolbox for Use with Matlab*, The Mathworks Inc., 1995.
- [5] N. Manamanni, B. Mansouri, A. Hamzaoui, J. Zaytoon. *Relaxed conditions in tracking control design for a TS fuzzy model*. *J. Intelligenet & Fuzzy Systems*, vol 18 (2) : 185-210, 2007.
- [6] B. Mansouri, A. Kruszewski, K. Guelton, N. Manamanni, T.-M. Guerra. *Commande sous optimale pour le suivi de trajectoires des modèles flous TS incertains*. Rencontre Francophone sur la Logique floue et ses Application, Cépaduès ed., pp. 231-238, 2006.
- [7] R. M. Redheffer. On a certain linear fractional transformation. *J. Math. And Phys.*,(39) :269-286,1960.
- [8] A. Sala, T. M. Guerra, R. Babuska: Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems* 156 (3): 432-444 (2005).
- [9] T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control. *IEEE Trans. Syst., Man and Cyber.*, vol. 1115, pp. 116-132,1985.
- [10] K. Tanaka, H.O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Interscience ISBN 0-471-32324-190000. 2001.
- [11] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin. An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, volume n°4, pp 14-23, 1996.
- [12] K. Y. Lian, J. J. Liou and C. Y. Huang. LMI-based Integral fuzzy control of DC-DC converters, *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 14, N°. 1, february 2006.
- [13] K. Zhou, J Doyle and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, 596 pp, 1996.