



**HAL**  
open science

## Conditions de stabilité LMI pour la classe des systèmes descripteurs flous incertains de type T-S

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Badr Mansouri, Nouredine Manamanni

### ► To cite this version:

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Badr Mansouri, Nouredine Manamanni. Conditions de stabilité LMI pour la classe des systèmes descripteurs flous incertains de type T-S. 2ème Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Jul 2007, Reims, France. hal-02291517

**HAL Id: hal-02291517**

**<https://hal.science/hal-02291517v1>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Conditions de stabilité LMI pour la classe des systèmes descripteurs flous incertains de type T-S

TAHAR BOUARAR, KEVIN GUELTON, BADR MANSOURI, NOUREDDINE MANAMANNI

Centre de Recherche en Sciences et Technologie de l'Information et de la Communication  
Université de Reims Champagne-Ardenne, Moulin de la Housse BP 1039, 51687 Reims Cedex 2, France

tahar.bouarar@univ-reims.fr

**Résumé** — Dans cette étude, des conditions de stabilité pour la classe des descripteurs flous incertains de type Takagi-Sugeno (T-S) sont proposées. Celles-ci sont basées sur une fonction candidate de Lyapunov quadratique. Afin de permettre leur résolution par les outils classiques de l'optimisation convexe, les conditions proposées sont données sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Enfin, un exemple académique illustre l'efficacité de l'approche proposée.

**Mots clés** — Stabilité, systèmes non linéaires, descripteur, Takagi-Sugeno, LMI.

## I. INTRODUCTION

Les systèmes flous Takagi-Sugeno (T-S) [1] sont largement utilisés dans le contexte de la commande des systèmes non linéaires. Ceux-ci sont obtenus par l'interconnexion des modèles locaux linéaires invariants dans le temps (LTI) à l'aide des fonctions non linéaires normalisées appelées fonctions d'appartenance. Beaucoup de travaux existants dans la littérature proposent des conditions de stabilité des systèmes flous T-S classiques [2][3]. Dans celles-ci, seule les classes de systèmes mis sous la forme d'une représentation d'état « classique » non linéaire affine en la commande ont été abordés. Cette forme « classique », décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaire, est l'une des plus utilisée en automatique mais ne correspond pas à la forme plus générale des représentations d'état que l'on peut rencontrer. Cette forme plus générale, basée sur une représentation algèbro-différentielle, est appelée forme « descripteur » d'état. Elle permet de représenter, d'une part certains systèmes singuliers [4], mais constitue aussi l'écriture naturelle des systèmes mécaniques. En effet, les systèmes descripteurs flous ont été appliqués pour la modélisation des systèmes mécaniques à inertie variable. Notamment pour l'estimation des couples articulaires du mouvement humain en station debout [5] ainsi que pour la modélisation des non linéarités d'un actionneur pneumatique d'un robot à deux degrés de liberté [6]. Depuis l'introduction des systèmes sous forme descripteur flous T-S par [7], peu de travaux traitant leur stabilité ont été menés. Ainsi, des conditions de stabilité pour les systèmes descripteurs flous T-S ont été obtenues via l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique et d'une loi de commande de type PDC modifiée (Parallèle Distributed Compensation) [7]. D'autre part, des conditions de convergence des observateurs flous T-S sous forme descripteur ont été proposée [5][8]. Enfin, des conditions prenant en compte des incertitudes paramétriques ont été proposées par [9][10]. Ces dernières ont été obtenues pour des classes restrictives de systèmes descripteurs réduisant l'applicabilité des conditions proposées.

Dans cet article, des conditions de stabilité pour une classe générale des descripteurs flous T-S incertains sont proposées via une loi de commande PDC modifiée [7]. Afin de faciliter la résolution de ces conditions à l'aide des outils classiques de l'optimisation convexe [11], une écriture sous forme de LMI (linear matrix inequality) [12] est nécessaire et est présentée en section 4. Afin de réduire la conservativité des résultats proposés, un schéma de relaxation établi dans [13] est utilisé. Enfin, un exemple numérique est simulé pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

## II. NOTATIONS, LEMME ET COROLLAIRE UTILES

### A. Notations

Soient les fonctions scalaires  $v_k(z)$  et  $h_i(z)$ , ainsi que les matrices de dimensions appropriées  $E_k$  pour  $k \in \{1, \dots, l\}$ ,  $Y_i$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $T_{ik}$  pour  $k \in \{1, \dots, l\}$  et  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous noterons :

$$E_v = \sum_{k=1}^l v_k(z) E_k, \quad Y_h = \sum_{i=1}^r h_i(z) Y_i,$$

$$\text{et } T_{hv} = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^r v_k(z) h_i(z) T_{ik}.$$

De manière usuelle, une étoile (\*) désigne une quantité transposée dans une matrice symétrique.

### B. Lemme et corollaire

Les lemmes, issus de la littérature [13][14], et le corollaire suivants seront exploités pour écrire et/ou relâcher les conditions de stabilité sous forme LMI.

**Lemme 1**[14]: Soient les matrices  $X$ ,  $Y$  et  $S = S^T > 0$  de tailles appropriées et un scalaire  $\tau > 0$ , on a:

$$X^T Y + Y^T X \leq \tau X^T X + \tau^{-1} Y^T Y \quad (1)$$

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y \quad (2)$$

**Corollaire 1**: Soient les matrices de dimensions appropriées  $A$ ,  $B$ ,  $W$ ,  $Y$ ,  $Z$  et  $Q > 0$  régulière, on a:

$$\begin{bmatrix} Y & W^T + B^T A^T \\ W + AB & Z \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} Y + B^T Q^{-1} B & W^T \\ W & Z + A Q A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

*Preuve du corollaire* : Soient les matrices de dimensions appropriées  $A, B, W, Y, Z$  et  $Q > 0$  régulière, la matrice

$\begin{bmatrix} Y & W^T + B^T A^T \\ W + AB & Z \end{bmatrix}$  peut être réécrite telle que

$$\begin{bmatrix} Y & W^T \\ W & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} [B \ 0] + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix}.$$

A partir de l'inégalité (2) on a :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} [B \ 0] + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} Q^{-1} [B \ 0] \end{aligned} \quad (4)$$

**Lemme 2** [13] : Soit la proposition :

{Pour toutes les combinaisons de  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ , on a  $\gamma_{ijk} < 0$ }

Cette proposition est équivalente à :

{pour  $i = 1, 2, \dots, r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ ,  $\gamma_{iik} < 0$  et pour  $1 \leq i \neq j \leq r$ , on a  $\frac{1}{r-1} \gamma_{iik} + \frac{1}{2} (\gamma_{ijk} + \gamma_{jik}) < 0$ }

### III. CLASSE DES SYSTEMES CONSIDERES

On considère la classe des systèmes non linéaires descripteurs incertains de type T-S décrits par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) (E_k + \Delta E_k(t)) \dot{x}(t) \\ & = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u(t) \} \end{aligned} \quad (5)$$

$l$  et  $r$  représentent respectivement le nombre de règles floues à gauche et à droite de la représentation d'état.  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  et  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande.  $v_k(z(t))$  et  $h_i(z(t))$  sont les fonctions d'appartenance associées aux règles floues vérifiant les propriétés de somme convexe  $\sum_{k=1}^l v_k(z(t)) = 1$  et

$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ .  $E_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  et  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  sont des matrices à coefficients constants définissant la partie nominale des différents modèles locaux associés à chacune des règles floues.  $\Delta E_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  et  $\Delta C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  représentent la partie incertaine de ces modèles locaux et peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \Delta A_i(t) = H_{ai} \Delta_{ai}(t) N_{ai}, \quad \Delta B_i(t) = H_{bi} \Delta_{bi}(t) N_{bi}, \\ & \text{et } \Delta E_k(t) = H_{ek} \Delta_{ek}(t) N_{ek} \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $H_{ek}, H_{ai}, H_{bi}, H_{ci}, N_{ek}, N_{ai}, N_{bi}$ , et  $N_{ci}$  des matrices constantes de dimensions appropriées;  $\Delta_{ek}(x(t)), \Delta_{ai}(x(t)),$

$\Delta_{bi}(x(t))$  et  $\Delta_{ci}(x(t))$  des matrices de dimensions appropriées contenant les termes incertains. Celles-ci doivent être bornées de telle sorte que :

$$\forall t \text{ et les indices } \xi = e, a \text{ ou } b \text{ et } \vartheta = i \text{ ou } k, \quad \Delta_{\xi\vartheta}^T(x(t)) \Delta_{\xi\vartheta}(x(t)) \leq I, \quad (7)$$

## IV. CONDITIONS DE STABILITE

### A. Conditions suffisantes de stabilité

Soit la loi de commande PDC modifiée [7] :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} x(t) \quad (8)$$

Où les matrices  $K_{ik} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  correspondent aux gains de commande par retour d'état pour chacun des modèles locaux.

**Théorème 1** : Le descripteur T-S incertain (5) est quadratiquement stable en boucle fermée via la loi de commande PDC modifiée (8), s'il existe les matrices  $z_1 = z_1^T > 0$ ,  $z_3, z_4$  et  $K_{jk}$  régulières telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

Pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ ,

$$\begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) \\ \begin{pmatrix} z_4^T + A_i z_1 + E_k z_3 \\ -B_i K_{jk} z_1 + \Delta A_i(t) z_1 \\ + \Delta E_k(t) z_3 + \Delta B_i(t) K_{jk} z_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -z_4^T E_k^T - E_k z_4 \\ -z_4^T \Delta E_k^T(t) \\ -\Delta E_k(t) z_4 \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

*Preuve* : On pose  $x^*(t) = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T$ . La représentation d'état (5) peut être réécrite avec le vecteur d'état augmenté  $x^*(t)$  et les notations définies en section 2 telle que :

$$E_v^* \dot{x}^*(t) = A_{hv}^* x^*(t) + B_h^* u(t) \quad (10)$$

$$\text{avec } E^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{hv}^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h + \Delta A_h & -E_v - \Delta E_v \end{bmatrix}, \quad \text{et} \\ B_h^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h + \Delta B_h \end{bmatrix}.$$

En utilisant les mêmes notations, (8) peut être réécrite telle que :

$$u(t) = -K_{hv}^* x^*(t) \quad (11)$$

où  $K_{hv}^* = [K_{hv} \ 0]$ .

D'où l'expression du système en boucle fermée donnée par :

$$E_v^* \dot{x}^*(t) = [A_{hv}^* - B_h^* K_{hv}^*] x^*(t) \quad (12)$$

Afin d'étudier la stabilité de (12), on étudie les variations de la fonction candidate de Lyapunov donnée par :

$$V(x^*(t)) = x^{*T}(t)E^{*T}Px^*(t) \quad (13)$$

On pose  $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$  avec  $P_1, P_2, P_3, P_4$  des matrices constantes à valeurs dans  $\mathfrak{R}^{m \times m}$ . (13) est une fonction candidate de Lyapunov quadratique si la condition  $E^{*T}P = P^T E^* \geq 0$  est vérifiée:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & P_3^T \\ P_2^T & P_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (14)$$

(14) impose donc  $P_1 = P_1^T \geq 0$ ,  $P_2 = 0$  et  $P_3, P_4$  libres.

Le système en boucle fermée (12) (par extension le système (5) bouclé via la loi de commande (8)) est stable si (13) est décroissante le long des trajectoires du modèle. C'est-à-dire si:

$$\dot{V}(x^*(t)) = x^{*T}(t)E^{*T}Px^*(t) + x^{*T}(t)E^{*T}Px^*(t) < 0 \quad (15)$$

En substituant (12) dans (15), on obtient :

$$\dot{V}(x^*(t)) = x^{*T}(t)\Psi_{hv}x^*(t) < 0 \quad (16)$$

$$\text{Avec } \Psi_{hv} = (A_{hv}^* - B_h^*K_{hv}^*)^T P + P^T (A_{hv}^* - B_h^*K_{hv}^*)$$

On effectue le changement de variable :

$$X = P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ -P_4^{-1}P_3P_1^{-1} & P_4^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ -z_3 & z_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Après la multiplication de  $\Psi_{hv} < 0$  à gauche par  $X^T = P^{-T}$  et à droite  $X = P^{-1}$ , on obtient:

$$X^T A_{hv}^{*T} - X^T K_{hv}^{*T} B_h^{*T} + A_{hv}^* X - B_h^* K_{hv}^* X < 0 \quad (18)$$

que l'on peut développer sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) \\ \left( \begin{array}{l} \Delta A_h(t)z_1 + \Delta E_v(t)z_3 \\ + \Delta B_h K_{hv} z_1 + z_4^T + A_h z_1 \\ + E_v z_3 - B_h K_{hv} z_1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -z_4^T \Delta E_v^T(t) - \Delta E_v(t)z_4 \\ -z_4^T E_v^T - E_v z_4 \end{array} \right) \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

L'inégalité matricielle (19) conduit de manière évidente aux conditions suffisantes exprimées au théorème 1. ■

### B. Réécriture sous forme LMI

Les conditions de stabilité données par le théorème 1 ne peuvent être résolues à l'aide des algorithmes d'optimisations convexes classiquement utilisés [11]. En effet, ces algorithmes ne permettent pas de résoudre des inégalités matricielle comportant des paramètres variables dans le temps, ce qui est le cas des matrices  $\Delta A_i(t)$ ,  $\Delta E_k(t)$  et  $\Delta B_i(t)$ . De plus, les conditions données au théorème 1 ne sont pas LMI vis-à-vis des matrices  $z_1$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  et  $K_{jk}$  recherchées. Ces verrous peuvent être levés par les conditions du théorème suivant.

**Théorème 2:** Le descripteur T-S incertain (5) est quadratiquement stable via la loi de commande PDC modifiée (8) s'il existe les matrices  $z_1 = z_1^T > 0$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  et  $M_{jk}$ , les scalaires  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  et  $\tau_4^{-1}$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

Pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ ,

$$\begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_{ai} z_1 & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{bi} M_{jk} & 0 & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_{ek} z_3 & 0 & 0 & -\tau_3 I & 0 & 0 \\ \Omega_{ijk} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{ik} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ek} z_4 & -\tau_4^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$\text{avec } \Omega_{ijk} = \begin{bmatrix} z_4^T + A_i z_1 \\ + E_k z_3 \\ - B_i M_{jk} \end{bmatrix} \text{ et } \Pi_{ik} = \begin{bmatrix} -z_4^T E_k^T - E_k z_4 \\ + \tau_2 H_{bi} H_{bi}^T + \tau_1 H_{ai} H_{ai}^T \\ + \tau_3 H_{ek} H_{ek}^T + \tau_4^{-1} H_{ek} H_{ek}^T \end{bmatrix}$$

*Preuve :* A partir des conditions données au théorème 1, on effectue le changement de variables bijectif  $M_{hv} = K_{hv} z_1$ , on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \left( \begin{array}{l} \Delta A_h(t)z_1 + \Delta E_v(t)z_3 \\ + \Delta B_h(t)M_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -z_4^T \Delta_{ev}(t)^T \\ -\Delta_{ev}(t)z_4 \end{array} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) \\ \left( \begin{array}{l} z_4^T + A_h z_1 + \\ E_v z_3 - B_h M_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -z_4^T E_v^T \\ -E_v z_4 \end{array} \right) \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

On réécrit alors les termes incertains en substituant (6) dans (21), on obtient:

$$\begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \left( \begin{array}{l} H_{ah} \Delta_{ah}(t) N_{ah} z_1 \\ + H_{ev} \Delta_{ev}(t) N_{ev} z_3 \\ + H_{bh} \Delta_{bh}(t) N_{bh} M_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -z_4^T (H_{ev} \Delta_{ev}(t) N_{ev})^T \\ -H_{ev} \Delta_{ev}(t) N_{ev} z_4 \end{array} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) \\ \left( \begin{array}{l} z_4^T + A_h z_1 + \\ E_v z_3 - B_h M_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -z_4^T E_v^T \\ -E_v z_4 \end{array} \right) \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

On utilise le lemme 1 et son corollaire afin de majorer les termes incertains, la borne supérieure de (22) est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \delta_{hhv} & (*) \\ \left( \begin{array}{l} z_4^T + A_h z_1 + \\ E_v z_3 - B_h M_{hv} \end{array} \right) \mu_{hv} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\text{avec : } \mu_{hv} = \begin{pmatrix} -z_4^T E_v^T - E_v z_4 + \tau_4 z_4^T N_{ev}^T N_{ev} z_4 \\ + \tau_1 H_{ah} H_{ah}^T + \tau_2 H_{bh} H_{bh}^T \\ + \tau_3 H_{ev} H_{ev}^T + \tau_4^{-1} H_{ev} H_{ev}^T \end{pmatrix}$$

et

$$\delta_{hhv} = \begin{pmatrix} -z_3^T - z_3 + \tau_1^{-1} z_1^T N_{ah}^T N_{ah} z_1 \\ + \tau_2^{-1} M_{hv}^T N_{bh}^T N_{bh} M_{hv} + \tau_3^{-1} z_3^T N_{ev}^T N_{ev} z_3 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le complément de Schur [12] sur les termes  $\tau_1^{-1} z_1^T N_{ah}^T N_{ah} z_1$ ,  $\tau_2^{-1} M_{hv}^T N_{bh}^T N_{bh} M_{hv}$ ,  $\tau_3^{-1} z_3^T N_{ev}^T N_{ev} z_3$  et  $\tau_4 z_4^T N_{ev}^T N_{ev} z_4$ , et d'après les notations représentées dans la section 2, l'expression (23) peut être réécrite et l'on obtient les conditions du théorème 2. ■

### C. Conditions LMI relâchées

Les conditions de stabilité données par les théorèmes 1 et 2 sont obtenues à partir de (19), c'est-à-dire de la condition donnée par :

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r v_k(z) h_i(z) h_j(z)_i \Psi_{ijk} < 0$$

On considère alors, pour établir les théorèmes 1 et 2, que (19) est vraie si pour tout  $i, j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$ ,  $\Psi_{ijk} < 0$ . Par conséquent, ces conditions de stabilité sont conservatives. En effet, il est possible de trouver une combinaison de  $\Psi_{ijk}$  dont certains peuvent être positifs et qui conduit à la vérification de (19). Afin de rendre moins conservatives ce type de conditions, différents schémas de relaxation ont été proposés [13][15][16]. Dans cette étude, le schéma de relaxation proposé par Tuan et al. [13], synthétisé par le lemme 2, est utilisé. En appliquant ce lemme sur les conditions données au théorème 2, on obtient les conditions relâchées données au théorème suivant.

**Théorème 3:** Le descripteur flou T-S incertain (5) est quadratiquement stable via la loi de commande PDC modifiée (8) s'il existe les matrices  $z_1 = z_1^T > 0$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  et  $M_{jk}$  et les scalaires  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  et  $\tau_4^{-1}$  telles que les conditions suivantes sont vérifiées:

- Pour  $i = 1, 2, \dots, r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ ,  $\gamma_{iik} < 0$ ,
- Pour  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $1 \leq i \neq j \leq r$  et  $k = 1, 2, \dots, l$ ,

$$\frac{1}{r-1} \gamma_{iik} + \frac{1}{2} (\gamma_{ijk} + \gamma_{jik}) < 0$$

$$\text{avec } \gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} -z_3^T - z_3 & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_{ai} z_1 & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{bi} M_{jk} & 0 & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_{ek} z_3 & 0 & 0 & -\tau_3 I & 0 & 0 \\ \Omega_{ijk} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{ik} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ek} z_4 & -\tau_4^{-1} I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\Omega_{ijk} = \begin{pmatrix} z_4^T + A_i z_1 + \\ E_k z_3 - B_i M_{jk} \end{pmatrix} \text{ et } \Pi_{ik} = \begin{pmatrix} -z_4^T E_k^T - E_k z_4 \\ + \tau_2 H_{bi} H_{bi}^T \\ + \tau_1 H_{ai} H_{ai}^T \\ + \tau_3 H_{ek} H_{ek}^T \\ + \tau_4^{-1} H_{ek} H_{ek}^T \end{pmatrix}.$$

## V. EXEMPLE NUMERIQUE

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée, on considère l'exemple donné par le descripteur non linéaire suivant :

$$E(x(t)) \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t) \quad (24)$$

$$\text{avec } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad E(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \cos^2(x_2(t)) \end{bmatrix},$$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2(x_2(t)) - \frac{1}{1+x_1^2(t)} \\ -1.5 & -3 + 0.5 \left( 1 + \frac{1}{1+x_1^2(t)} \right) \frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} \end{bmatrix},$$

$$\text{et } B(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{1+x_1^2(t)} \\ a \cos^2(x_2(t)) - 2 \end{bmatrix}.$$

### A. Ecriture sous forme de descripteur flou T-S incertain

Pour obtenir un représentant T-S d'un système descripteur non linéaire, le nombre de règles issues du découpage flou est fonction du nombre de non linéarité du système. C'est-à-dire  $n = l \times r = 2^{ng} \times 2^{nd}$  tel que  $ng$  et  $nd$  sont respectivement les nombres de non linéarités à découper dans la partie gauche et la partie droite du système descripteur.  $E(x(t))$  contient le terme non linéaire  $\cos^2(x_2(t))$  qui conduit à  $ng = 1$ , d'où  $l = 2$ . De même,  $A(x(t))$  et  $B(x(t))$  contiennent les termes non linéaires  $\cos^2(x_2(t))$ ,  $\frac{1}{1+x_1^2(t)}$  et  $\frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)}$  qui conduisent à  $nd = 3$ , c'est-à-dire  $r = 8$ . Dans ce cas, le représentant T-S obtenu ne comporte pas de termes incertains, les conditions apportées par [7], le cas échéant relâché par [13][15][16], peuvent être utilisées. Notons que  $l.r(r+1)/2 = 72$  LMI doivent être vérifiées, ce qui, à l'aide des outils informatiques actuels, ne conduit pas à une solution. Lorsque aucune solution ne peut être trouvée pour un modèle nominal à l'aide des conditions classiques, il peut être intéressant de synthétiser une loi de commande robuste en considérant certains termes non linéaires comme des incertitudes. Ainsi, la diminution du nombre de règles floues décrivant le modèle non linéaire (24) entraînera une réduction du conservatisme liée à la vérification de sa stabilité via les théorèmes 2 et 3.

Afin de réécrire le modèle non linéaire (24) sous la forme d'un modèle descripteur incertain, nous proposons de réécrire les termes  $\cos^2(x_2(t))$  et  $\frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)}$  sous la forme :

$$\cos^2(x_2(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta_1(t) \quad (25)$$

$$\frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} = \frac{1-\rho}{2} + \frac{1+\rho}{2} \Delta_2(t) \quad (26)$$

où  $\rho \approx -0.2172$  est le minimum de la fonction  $\frac{\sin(x(t))}{x(t)}$

Les fonctions  $\Delta_1(t) = 2 \cos^2(x_2(t)) - 1$  et

$$\Delta_2(t) = \frac{1}{1+\rho} \left( 2 \frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} - 1 + \rho \right),$$

contenues dans (25) et (26), sont bornées sur  $\mathfrak{R}$  tels que  $\forall t \in \mathfrak{R}, \Delta_1^2(t) \leq 1$  et  $\Delta_2^2(t) \leq 1$ . Ces fonctions sont alors considérées comme incertaines pour l'obtention d'un représentant T-S sous forme descripteur incertain du système (24). Celui-ci est donné par:

$$\begin{aligned} & [\tilde{E} + \Delta \tilde{E}(t)] \dot{x}(t) \\ & = [\tilde{A}(x(t)) + \Delta \tilde{A}(x(t))] x(t) + [\tilde{B}(x(t)) + \Delta \tilde{B}(t)] u(t) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{avec } \tilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{E}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \Delta_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} - f(x_1(t)) \\ -\frac{3}{2} & -3 + b(1 + f(x_1(t))) \frac{1-\rho}{2} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \tilde{A}(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \Delta_1(t) \\ 0 & b(1 + f(x_1(t))) \frac{1+\rho}{2} \Delta_2(t) \end{bmatrix}, \Delta \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \Delta_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 + f(x_1(t)) \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \text{ et } f(x_1(t)) = \frac{1}{1 + x_1^2(t)}.$$

Par conséquent, l'obtention d'un représentant flou T-S sous la forme descripteur peut s'obtenir par le découpage de la non linéarité  $f(x_1(t))$  tels que :

$$f(x_1(t)) = h_1(z(t)) \times 0 + h_2(z(t)) \times 1 \quad (28)$$

$$\text{avec } h_1(z(t)) = 1 - f(x_1(t)), \quad h_2(z(t)) = f(x_1(t))$$

et  $z(t) \equiv x_1(t)$ .

On obtient donc le modèle descripteur flou incertain à deux règles décrit par:

Règle 1: Si  $x_1(t)$  est  $h_1(z(t))$

$$\text{Alors } (\tilde{E} + \Delta \tilde{E}(t)) \dot{x}(t) = (\tilde{A}_1 + \Delta \tilde{A}_1(t)) x(t) + (\tilde{B}_1 + \Delta \tilde{B}(t)) u(t)$$

Règle 2: Si  $x_1(t)$  est  $h_2(z(t))$

$$\text{Alors } (\tilde{E} + \Delta \tilde{E}(t)) \dot{x}(t) = (\tilde{A}_2 + \Delta \tilde{A}_2(t)) x(t) + (\tilde{B}_2 + \Delta \tilde{B}(t)) u(t)$$

$$\text{avec } \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b \frac{1-\rho}{2} \end{bmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b(1-\rho) \end{bmatrix},$$

$$\Delta \tilde{A}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \Delta_1(t) \\ 0 & b \frac{1+\rho}{2} \Delta_2(t) \end{bmatrix}, \Delta \tilde{A}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \Delta_1(t) \\ 0 & b(1+\rho) \Delta_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}.$$

C'est-à-dire, après défuzzification:

$$\begin{aligned} & [\tilde{E} + \Delta \tilde{E}(x(t))] \dot{x}(t) \\ & = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) \{ [\tilde{A}_i + \Delta \tilde{A}_i(t)] x(t) \} + [\tilde{B}_i + \Delta \tilde{B}(t)] u(t) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{Avec } h_1(z(t)) = F_{30}(x_1(t)) = 1 - \frac{1}{1 + x_1^2(t)}$$

$$\text{et } h_2(z(t)) = F_{31}(x_1(t)) = \frac{1}{1 + x_1^2(t)}.$$

### B. Simulation et résultats

Le modèle descripteur flou incertain (29) représente le modèle non linéaire (24). Afin de prouver la stabilité de ce modèle en boucle fermée, les conditions des théorèmes 2 ou 3 nécessitent la majoration des matrices d'incertitudes à l'aide du lemme 1 et de son corollaire:

$$\Delta E(x(t)) = H_e \Delta_e(t) N_e, \quad \Delta A_1(x(t)) = H_{a1} \Delta_{a1}(t) N_{a1},$$

$$\Delta A_2(t) = H_{a2} \Delta_{a2}(t) N_{a2} \text{ et } \Delta B(t) = H_b \Delta_b(t) N_b,$$

$$\text{avec } H_e = H_{a1} = H_{a2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_e(t) = \Delta_b(t) = \Delta_1(t), \quad \Delta_{a1}(t) = \Delta_{a2}(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) & 0 \\ 0 & \Delta_2(t) \end{bmatrix},$$

$$N_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b \frac{1+\rho}{2} \end{bmatrix}, \quad N_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b(1+\rho) \end{bmatrix} \text{ et } N_b = \frac{a}{2}.$$

Afin d'illustrer le gain en terme de conservativité du théorème 3 par rapport au théorème 2, les domaines de stabilité, solutions de ces théorèmes, pour les paramètres  $a$  et  $b$  variant respectivement entre  $[-2.5, 1.5]$  et  $[-9, 6]$  sont présentés figure 1.

A titre d'exemple, les matrices suivantes constituent la solution, obtenue à l'aide de la LMI Toolbox de Matlab [11], au théorème 3 pour les paramètres  $a = -1.5$  et  $b = -1$  :

$$K_{11} = [0.9119 \quad -1.2475], \quad K_{21} = [1.1639 \quad -0.9451]$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} 118.3405 & -4.5515 \\ -4.5515 & 23.6827 \end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} 126.0740 & -37.1366 \\ -10.5783 & 20.0279 \end{bmatrix},$$

$$z_4 = \begin{bmatrix} 107.4726 & -81.9021 \\ -22.4079 & 121.5464 \end{bmatrix}, \quad \tau_1 = 21.1611, \quad \tau_2 = 65.0254,$$

$$\tau_3 = 11.5796 \text{ et } \tau_4 = 33.7578.$$

La figure 2 présente l'évolution des variables d'état  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et du signal de commande  $u(t)$  lors de la simulation de cette solution en considérant la condition initiale  $x(0)^T = [10 \ 20]^T$ . On remarque des fluctuations lors de la stabilisation du système. Néanmoins, rappelons qu'ici, le système NL global est stabilisé via une loi synthétisée en considérant les termes non linéaires contenant la variable d'état  $x_2(t)$  incertains. Malgré cela, on constate l'efficacité de l'approche proposée puisque le système est stable après environs  $2s$ .

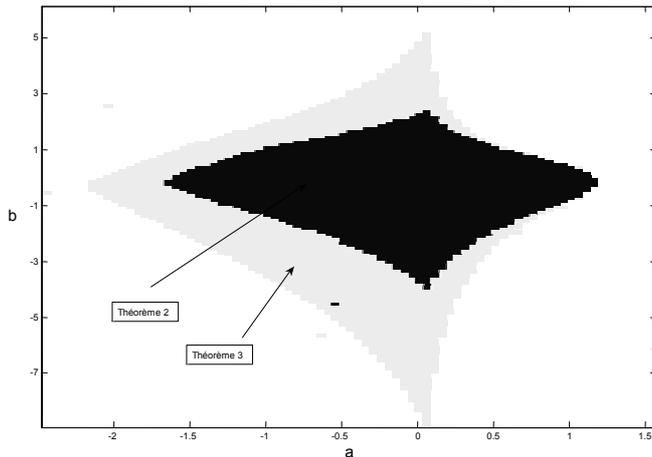


Fig. 1. Domaines de stabilité

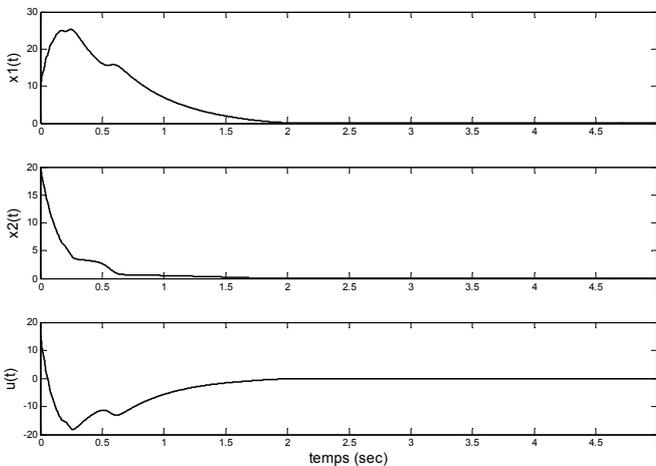


Fig. 2. Résultats en simulation.

## VI. CONCLUSION

Dans ce papier, les conditions de stabilité de descripteur flou TS incertain sont proposées. Celles-ci sont basées sur une fonction quadratique de Lyapunov et la loi de commande PDC modifiée. En premier lieu ces conditions sont proposées sous une forme non solvable (BMI) à l'aide des outils d'optimisation convexe. Ensuite une formulation sous forme LMI est proposée dans le théorème 2 qui constitue la contribution principale de ce travail. Par ailleurs ces conditions de stabilité sont conservatives, pour remédier à ce problème et rendre ces dernières moins conservatives, on a opté pour un théorème de relaxation [13]. Enfin, un exemple a été proposé pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

## VII. REMERCIEMENTS

Les auteurs souhaitent remercier Pr I. Tsinov pour ses conseils avisés concernant la finalité de ces travaux

## VIII. REFERENCES

- [1] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. on System Man and Cybernetics*, Vol. 15 (1), 1985, pp. 116-132.
- [2] K. Tanaka, H.O. Wang, *Fuzzy control systems desing and analysis. A linear matrix inequality approach*, Wiley, New York, 2001.
- [3] T.M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, H. Tirmant, "Condition of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form", *Fuzzy Set and Systems*, Vol. 157, 2006, pp. 1248-1259.
- [4] Dai L. Singular control systems. in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1989, pp.12-45.
- [5] K. Guelton, S. Delprat, T.M. Guerra, "Joint torques estimation in standing human by mean of a fuzzy descriptor unknown inputs observer," in *Proc. 6th IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems*, Reims, France, Elsevier, 2006, pp. 405-410.
- [6] H. Schulte, K. Guelton, "Modelling and simulation of two-link robot manipulators based on Takagi Sugeno fuzzy descriptor systems," in *Proc. IEEE International Conference on Industrial Technology*, Mumbai, India, 2006.
- [7] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, "Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 8 (4), 1999, pp.442-452
- [8] B. Marx, J. Ragot, Synthèses d'observateurs pour systèmes Takagi-Sugeno singuliers à entrées inconnues, in *LFA'06*, Toulouse, France, 2006, Cépadués ed., pp. 247-254.
- [9] B.P. Ma, J. Sun, "Robust stabilization of uncertain T-S fuzzy descriptor systems," in *Proc. 3rd IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, China, 2004.
- [10] B.Y. Zhu, Q.L. Zhang, S.C. Tong, Passivity Control for Uncertain T-S Fuzzy Descriptor Systems, *Acta Automatica Sinica*, Vol. 32, N°5, 2006, pp. 674-679.
- [11] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali, *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB*, The Mathworks Partener Series. 1995.
- [12] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [13] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto, "Parametrized linear matrix inequality techniques in fuzzy control design," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 9(2), 2001, pp.324-332.
- [14] K. Zhou, P.P. Khargonedkar, "Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *Syst. Control Letters*, Vol. 10, 1988, pp. 17-20.
- [15] K. Tanaka, T. Ikeda, H.O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol. 6(2), 1998, pp. 250-265
- [16] X. Liu, Q. Zhang, "New approaches to H-infinity controller design based on fuzzy observers for fuzzy TS systems via LMI," *Automatica*, Vol. 12(9), 2003, pp.1571-1582.