



HAL
open science

Convergence d'observateurs flous sous formes descripteurs : application à l'homme en station debout

Kevin Guelton, Thierry-Marie Guerra, Sebastien Delprat

► To cite this version:

Kevin Guelton, Thierry-Marie Guerra, Sebastien Delprat. Convergence d'observateurs flous sous formes descripteurs : application à l'homme en station debout. 3ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'04), Nov 2004, Douz, Tunisie. hal-02291500

HAL Id: hal-02291500

<https://hal.science/hal-02291500>

Submitted on 18 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Convergence d'observateurs flous sous formes descripteurs : application à l'homme en station debout

KEVIN GUELTON, THIERRY-MARIE GUERRA, SEBASTIEN DELPRAT

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Hamaines UMR CNRS 8530
UVHC, Le Mont Houy, 59313 VALENCIENNES Cedex 09 - FRANCE

prenom.nom@univ-valenciennes.fr

Résumé — Une classe d'observateurs non linéaires sous forme descripteurs basée sur une modélisation de type Takagi-Sugeno (TS) est décrite. Les conditions de convergence de l'erreur de reconstruction sont obtenues sous la forme de problèmes LMI. L'intérêt de ce type de représentation est, pour certains modèles non linéaires, de réduire la conservativité des résultats classiques. Cette réduction se fait au travers de la réduction du nombre de règles du modèle TS. Une application à la biomécanique de l'homme en station debout est proposée. Un observateur à entrées inconnues est défini afin d'estimer les vitesses et couples articulaires à partir de mesures de positions obtenues par un système optoélectronique de capture du mouvement.

Mots clés— Descripteurs, Observateurs flous, LMI, Station debout humaine, Estimation de couples articulaires.

I. INTRODUCTION

Les modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS) ont été largement utilisés dans un contexte de commande et de modélisation [1~3,5]. Les modèles descripteurs d'état ont également été utilisés dans la littérature. Une définition des modèles descripteurs flous a été présentée dans [4,5]. Ces études ont fourni les premiers résultats de stabilité et de stabilisation avec une approche de type commande PDC.

L'objectif de cette étude est de proposer la synthèse d'un observateur basé sur une forme descripteur.

Une approche basée sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov est utilisée pour établir les conditions de convergence de l'erreur de reconstruction. Il apparaît que pour certains types de modèles, cela permet de réduire la conservativité des résultats.

Une transformation matricielle est alors utilisée afin de proposer de nouvelles conditions incluant les précédentes. L'ensemble de ces résultats est écrit sous la forme de problèmes LMI en utilisant un schéma de relaxation du à [6].

Enfin, un exemple illustratif concernant l'estimation des couples et vitesses articulaires de l'homme en station debout est présenté.

Notations:

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons:

$$E_v = \sum_{k=1}^e v_k(z(t)) E_k, Y_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) Y_i$$

$$\text{et } Y_{hv} = \sum_{k=1}^e \sum_{i=1}^r v_k(z(t)) h_i(z(t)) Y_{ik}, \text{ avec } Y \in \{A, B, C, K\}.$$

Ainsi que $\mathbf{a}(x) \in [\underline{\mathbf{a}} \ \bar{\mathbf{a}}]$, où $\underline{\mathbf{a}} = \min_x \mathbf{a}(x)$, $\bar{\mathbf{a}} = \max_x \mathbf{a}(x)$

De manière usuelle, une étoile (*) dans une matrice symétrique indique la quantité transposée.

II. STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR FLOU SOUS FORME DESCRIPTEUR

On considère les modèles descripteurs flous définis par [5] et écrits sous la forme :

$$\sum_{k=1}^e v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

c'est à dire avec les notations proposées :

$$\begin{cases} E_v \dot{x}(t) = A_h x(t) + B_h u(t) \\ y(t) = C_h x(t) \end{cases} \quad (1)$$

En posant $x^*(t) = [x^T(t), \dot{x}^T(t)]^T$, le système (1) peut se réécrire :

$$\begin{cases} E^* \dot{x}^*(t) = A_{hv}^* x^*(t) + B_h^* u(t) \\ y(t) = C_h^* x^*(t) \end{cases} \quad (2)$$

$$E^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{hk}^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}, B_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}, C_i^* = [C_i \ 0].$$

Dans la suite, les fonctions $h_i(z(t))$, $i \in \{1, \dots, r\}$, $v_k(z(t))$, $k \in \{1, \dots, e\}$ sont supposées mesurables. On considère alors l'observateur suivant :

$$\begin{cases} E_v \dot{\hat{x}}(t) = A_h \hat{x}(t) + B_h u(t) + K_{hv} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_h \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

c'est à dire avec $\hat{x}^*(t) = [\hat{x}^T(t), \dot{\hat{x}}^T(t)]^T$:

$$\begin{cases} E^* \dot{\hat{x}}^*(t) = A_{hv}^* \hat{x}^*(t) + B_h^* u(t) + K_{hv}^* (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_h^* \hat{x}^*(t) \end{cases} \quad (4)$$

On définit l'erreur de reconstruction augmentée:

$$\tilde{x}^*(t) = \left[(x(t) - \hat{x}(t))^T, (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t))^T \right]^T, \text{ dont l'évolution est}$$

décrite par :

$$E^* \dot{\tilde{x}}^*(t) = (A_{hv}^* - K_{hv}^* C_h^*) \tilde{x}^*(t) \quad (5)$$

III. CONDITIONS DE CONVERGENCE

D'après les travaux de [5] les conditions du théorème suivant assurent la convergence de l'erreur de prédiction.

Théorème 1 : Le modèle descripteur flou (5) est quadratiquement stable s'il existe une matrice commune P telle que :

$$E^* P = P^T E^* \geq 0 \quad (6)$$

$$(A_{hv}^* - K_{hv}^* C_h^*)^T P + P^T (A_{hv}^* - K_{hv}^* C_h^*) < 0 \quad (7)$$

Preuve: Celle-ci s'obtient de façon directe en considérant la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(\tilde{x}^*(t)) = \tilde{x}^{*T}(t) E^{*T} P \tilde{x}^*(t).$$

D'après le théorème 1, la convergence de l'erreur de prédiction est assurée si les conditions (6) et (7) sont satisfaites. Le problème revient donc à trouver les gains d'observation K_{ik} qui satisfassent ces conditions. L'un des objectifs majeurs est de pouvoir obtenir une mise sous forme de LMI (Linear Matrix Inequality) [7].

On pose $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, la condition (6) peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & 0 \\ P_2^T & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Ce qui impose les conditions $P_1 = P_1^T \geq 0, P_2 = 0$. La condition (7) peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 0 & A_h^T - C_h^T K_{hv}^T \\ I & -E_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_3^T \\ 0 & P_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h - K_{hv} C_h & -E_v \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

Finalement, les conditions permettant d'assurer la convergence de l'erreur de prédiction sont données par $P_1 = P_1^T > 0$ et :

$$\begin{bmatrix} A_h^T P_3 + P_3^T A_h - C_h^T K_{hv}^T P_3 - P_3^T K_{hv} C_h & (*) \\ P_1 - E_v^T P_3 + P_4^T A_h - P_4^T K_{hv} C_h & -E_v^T P_4 - P_4^T E_v \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

Notons que de façon évidente, le problème décrit en (9) est LMI en P_1, P_3 et P_4 , i.e., si les gains de l'observateur sont déterminés séparément l'existence des matrices P_1, P_3 et P_4 permet de prouver la convergence. Cependant, rien ne permet de garantir *a priori* que les gains déterminés puissent répondre au problème. Il est alors évidemment intéressant de pouvoir rechercher de façon systématique ces matrices ainsi que les gains de l'observateur.

Dans la suite, les conditions utiliseront une relaxation classique pour les modèles TS due à [6]. Dans ce contexte, on définit les différentes inégalités suivantes $\forall i, j, k \in \{1, \dots, r\}$:

$$\Upsilon_{ii}^k + Q_{ii}^k < 0 \quad (10)$$

$$\Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k + 2Q_{ij}^k < 0 \quad (j > i) \quad (11)$$

$$Q^k = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & \dots & Q_{1r}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^k & \dots & & Q_{rr}^k \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

A. Approche 1:

Si on veut obtenir (9) LMI en P_1, P_3, P_4 et K_{ik} , il faut pouvoir « traiter » les produits $P_3^T K_{ik}$ et $P_4^T K_{ik}$. Une façon usuelle est d'utiliser un changement bijectif, dans le cas présent cela impose de choisir $P_3 = P_4$ (avec P_3 non singulière) puis : $M_{ik} = P_3^T K_{ik}$. On définit alors :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} A_i^T P_3 + P_3^T A_i - C_i^T M_{jk}^T - M_{jk} C_i & (*) \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_3^T A_i - M_{jk} C_i & -E_k^T P_3 - P_3^T E_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

Théorème 2: Soit le modèle descripteur flou (5) et les Υ_{ij}^k définis en (13). La convergence de l'erreur de prédiction est assurée si : $\forall k \in \{1, \dots, e\}$ il existe $P_1 = P_1^T > 0, P_3$ régulière, $M_{ik}, Q_{ii}^k > 0$ et $Q_{ij}^k = (Q_{ij}^k)^T$ de telle sorte que : (10), (11) et (12) soient vérifiées.

Preuve : L'équation (9) peut être écrite sous la forme :

$$\sum_{k=1}^e v_k(z) \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(z) \Upsilon_{ii}^k + \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i(z) h_j(z) (\Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k) \right) < 0 \quad (14)$$

D'après les conditions (10) et (11), (14) est satisfaite si :

$$\sum_{k=1}^e v_k(z) \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(z) Q_{ii}^k + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i(z) h_j(z) Q_{ij}^k \right) = \sum_{k=1}^e v_k(z) \Xi^k > 0 \quad (15)$$

(15) s'écrit :

$$\forall s \neq 0, \quad s^T(t) \Xi^k s(t) = \begin{bmatrix} h_1(z) s \\ h_2(z) s \\ \vdots \\ h_r(z) s \end{bmatrix}^T Q^k \begin{bmatrix} h_1(z) s \\ h_2(z) s \\ \vdots \\ h_r(z) s \end{bmatrix} > 0 \quad \text{qui est}$$

vérifiée d'après la condition (12). δ

B. Intérêt de l'approche descripteur :

Afin d'illustrer l'approche par descripteur par rapport à l'approche classiques [6], l'exemple suivant est traité.

Exemple : on considère le modèle descripteur :

$$\begin{cases} E_v \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C_h x(t) \end{cases} \quad (16)$$

et l'observateur associé :

$$\begin{cases} E_v \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_{hv} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C_h \hat{x}(t) \end{cases} \quad (17)$$

avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $E_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+x_1^2 & 1 \\ -1 & 1 \\ & 1+x_2^2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -4.7 & -4.7 \\ 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}$ et

$C_h = [\cos(x_2) + 3 \quad 1]$. L'observateur flou comporte 4 règles pour E_v qui contient les fonctions non linéaires $\frac{1}{1+x_1^2}$ et

$\frac{1}{1+x_2^2}$ et 2 règles pour C_h qui contient la non linéarité $\cos(x_2)$.

Les conditions de convergence sont alors obtenues par le théorème 2. On note que dans ce cas, le nombre de conditions à vérifier est $e \cdot r \cdot (r+1)/2$, c'est-à-dire 12 conditions. Le modèle (17) peut s'écrire de façon TS en multipliant par E_v^{-1} . On obtient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = E_v^{-1} (A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_{hv}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C_h \hat{x}(t) \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{avec } E_v^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1+x_1^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} & -\frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} \\ \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} & \frac{(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} \end{bmatrix}$$

Il est nécessaire de prendre en compte trois non linéarités dans E_v^{-1} et une dans C_h . Le modèle obtenu est donc composé de 16 règles. Le nombre de LMI sera donc de $r \cdot (r+1)/2 = 136$!!!

Evidemment, l'approche ne se justifie pas pour tous les modèles TS. Il semble que la forme descripteur doit être privilégiée dans le cas où la matrice $E(z(t))$ a une structure comportant plusieurs non linéarités et dont l'inverse $E^{-1}(z(t))$ devient alors difficile à « traiter » dans le cadre d'un modèle TS classique.

IV. CONDITIONS RELÂCHÉES

A. Transformations matricielles :

L'objectif de cette partie est de proposer des conditions qui permettront de réduire la conservativité de celles obtenues par l'approche 1. Pour ce faire, le lemme suivant est utilisé. Il correspond à une version modifiée de la propriété décrite par [8] mais aussi utilisée dans le contexte de la stabilisation des modèles flous TS [9].

Lemme 1 : Soient P , Γ , Φ et Ψ des matrices de dimensions appropriées :

$$\begin{cases} \text{Rechercher } P, \Phi \text{ et } \Psi \text{ tq:} \\ \left[\begin{array}{cc} \Gamma^T \Phi + \Phi^T \Gamma & (*) \\ P - \Phi + \Psi^T \Gamma & -\Psi - \Psi^T \end{array} \right] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Rechercher } P, \text{ tq:} \\ \Gamma^T P + P^T \Gamma < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Preuve : (\Rightarrow) On pose $\Pi = \begin{bmatrix} I & \Gamma^T \end{bmatrix}$ qui est de rang plein. Le résultat est alors obtenu par congruence avec Π .

(\Leftarrow) Etant donné $\Gamma^T P + P^T \Gamma < 0$, il existe toujours un e^2 assez petit tel que :

$$\Gamma^T P + P^T \Gamma + \frac{e^2}{2} \Gamma^T \Gamma < 0 \quad (20)$$

En utilisant le complément de Schur, (20) devient :

$$\begin{bmatrix} \Gamma^T P + P^T \Gamma & e^2 \Gamma^T \\ e^2 \Gamma & -2e^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

Finalement, si on choisit $\Phi = P$ et $\Psi = e^2 I$, le premier terme de (19) est vérifié. δ

B. Approche 2 :

Le lemme 1 peut s'appliquer directement sur le premier bloc de (9), on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} A_h^T \Phi_3 + \Phi_3^T A_h - C_h^T K_{hv}^T P_3 - P_3^T K_{hv} C_h & (*) & (*) \\ P_1 - E_v^T P_3 + P_4^T A_h - P_4^T K_{hv} C_h & -E_v^T P_4 - P_4^T E_v & 0 \\ P_3 - \Phi_3 + \Psi_3 A_h & 0 & -\Psi_3 - \Psi_3^T \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

Notons que (9) s'obtient à partir de (22) par congruence avec

$$\begin{bmatrix} I & 0 & A_h^T \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T. \text{ L'inégalité (22) s'exprime en fonction d'une}$$

triple somme $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^e h_i h_j v_k$ en raison du terme $K_{hv} C_h$. Etant

donné que le choix des matrices Φ_3 et Ψ_3 est libre et qu'elles apparaissent en produit avec A_h , on peut les remplacer respectivement par Φ_{3hv} et Ψ_{3hv} en gardant la même triple somme. D'où (22) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_h^T \Phi_{3hv} + \Phi_{3hv}^T A_h - C_h^T K_{hv}^T P_3 - P_3^T K_{hv} C_h & (*) & (*) \\ P_1 - E_v^T P_3 + P_4^T A_h - P_4^T K_{hv} C_h & -E_v^T P_4 - P_4^T E_v & 0 \\ P_3 - \Phi_{3hv} + \Psi_{3hv} A_h & 0 & -\Psi_{3hv} - \Psi_{3hv}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, *approche 1*, la mise sous forme d'un problème LMI se fait avec $P_3 = P_4$ et $P_3^T K_{hv} = M_{hv}$. On définit alors :

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} A_i^T \Phi_{3jk} + \Phi_{3jk}^T A_i - C_i^T M_{jk}^T - M_{jk} C_i & (*) & (*) \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_3^T A_i - M_{jk}^T C_i & -E_k^T P_3 - P_3^T E_k & 0 \\ P_3 - \Phi_{3jk} + \Psi_{3jk} A_i & 0 & -\Psi_{3jk} - \Psi_{3jk}^T \end{bmatrix} \quad (24)$$

Théorème 3 : Soit le modèle descripteur flou (5) et les Υ_{ij}^k définis en (24). La convergence de l'erreur de prédiction est assurée s'il existe : $P_1 = P_1^T > 0$, P_3 , Φ_{3ik} , Ψ_{3ik} , M_{ik} , $Q_{ij}^k > 0$ et $Q_{ij}^k = (Q_{ij}^k)^T$ de telle sorte que : (10), (11) et (12) soient vérifiées.

Lemme 3 : L'approche 2 (théorème 4) inclut toujours l'approche 1 (théorème 3).

Preuve : Supposons qu'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, P_3 régulière,

M_{ik} , $Q_{ii}^{k(1)} > 0$ et $Q_{ij}^{k(1)} = (Q_{ij}^{k(1)})^T$ telles que les conditions (10) à (12) soient satisfaites pour l'approche 1. On va montrer que ces matrices sont également des solutions possibles pour l'approche 2. On choisit :

$$Q_{ii}^{k(2)} = \begin{bmatrix} Q_{ii}^{k(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^2 I_n \end{bmatrix}, \quad Q_{ij}^{k(2)} = \begin{bmatrix} Q_{ij}^{k(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{La condition (12)}$$

$Q^{k(2)} > 0$ est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} Q^{k(1)} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^2 I_{n \times r} \end{bmatrix} > 0 \text{ qui est vraie puisque } Q^{k(1)} > 0.$$

On pose également : $\forall i \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{1, \dots, e\}, \Phi_{3ik} = P_3$

et $\Psi_{3ik} = \mathbf{e}^2 I$. (24) s'écrit alors :

$$\Upsilon_{ij}^{k(2)} = \begin{bmatrix} A_i^T P_3 + P_3^T A_i - C_i^T M_{jk}^T - M_{jk} C_i & (*) & (*) \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_3^T A_i - M_{jk} C_i & -E_k^T P_3 - P_3^T E_k & 0 \\ \mathbf{e}^2 A_i & 0 & -2\mathbf{e}^2 I_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

Avec : $U_i = [A_i \quad 0]$, (25) devient :

$$\Upsilon_{ij}^{k(2)} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ij}^{k(1)} & (*) \\ \mathbf{e}^2 U_i & -2\mathbf{e}^2 I_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

On peut alors écrire pour les conditions (10) à (12) de l'approche 2 :

$$\Upsilon_{ii}^{k(2)} + Q_{ii}^{k(2)} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ii}^{k(1)} + Q_{ii}^{k(1)} & (*) \\ \mathbf{e}^2 U_i & -\mathbf{e}^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\Upsilon_{ij}^{k(2)} + \Upsilon_{ji}^{k(2)} + 2Q_{ij}^{k(2)} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ij}^{k(1)} + \Upsilon_{ji}^{k(1)} + 2Q_{ij}^{k(1)} & (*) \\ \mathbf{e}^2 (U_i + U_j) & -4\mathbf{e}^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

qui sont équivalentes, en utilisant le complément de Schur aux expressions suivantes :

$$(27) \Leftrightarrow \Upsilon_{ii}^{k(1)} + Q_{ii}^{k(1)} + \mathbf{e}^2 U_i^T U_i < 0 \quad (29)$$

$$(28) \Leftrightarrow \Upsilon_{ij}^{k(1)} + \Upsilon_{ji}^{k(1)} + 2Q_{ij}^{k(1)} + \frac{\mathbf{e}^2}{4} (U_i + U_j)^T (U_i + U_j) < 0 \quad (30)$$

Or on a supposé que l'approche 1 est vérifiée, i.e. les conditions $\Upsilon_{ii}^{k(1)} + Q_{ii}^{k(1)} < 0$ et $\Upsilon_{ij}^{k(1)} + \Upsilon_{ji}^{k(1)} + 2Q_{ij}^{k(1)} < 0$ sont satisfaites. Il existe donc toujours un \mathbf{e}^2 assez petit tel que (29) et (30) soient satisfaites. δ

V. APPLICATION À LA BIOMÉCANIQUE DE L'HOMME EN STATION DEBOUT

A. Modèle descripteur de l'homme en station debout :

Lorsqu'un individu se tient debout, les mouvements autour des genoux et du cou sont faibles vis-à-vis de ceux autour des chevilles et de la hanche dans le plan sagittal. Ainsi, deux stratégies d'oscillation peuvent être définies : la stratégie de "cheville" et la stratégie de "hanche" [10]. De ce fait, un modèle en double pendule inversé est choisi afin de représenter les mouvements du corps humain dans le plan sagittal, figure 1. Le pendule inférieur oscille autour d'un point O situé au centre géométrique des chevilles et, le pendule inférieur autour du point H situé à l'articulation coxo-fémorale (Hanche). Ce modèle est basé sur deux hypothèses : 1) Les segments du double pendule inversé sont rigides et connectés par des liaisons rotoïdes parfaites, et 2) le système neuromusculaire produit les couples articulaires nécessaires aux chevilles u_1 et

à la hanche u_2 afin de stabiliser le corps humain en station debout. Ces couples sont les entrées du modèle en double pendule inversé et, les sorties sont les positions angulaires q_1 et q_2 . Le segment d'indice 1 représente les membres inférieurs sans les pieds et, celui d'indice 2 l'ensemble {tête, tronc, membres supérieurs}. Les caractéristiques inertielles m_i , I_i et K pour chaque segment sont obtenues par des tables anthropométriques [11].

Le modèle dynamique en double pendule inversé de l'homme en station debout est obtenu par les équations de Lagrange :

$$M(y) \cdot \ddot{y} + S(y, \dot{y}) \cdot \dot{y} + G(y) \cdot y = Ru \quad (31)$$

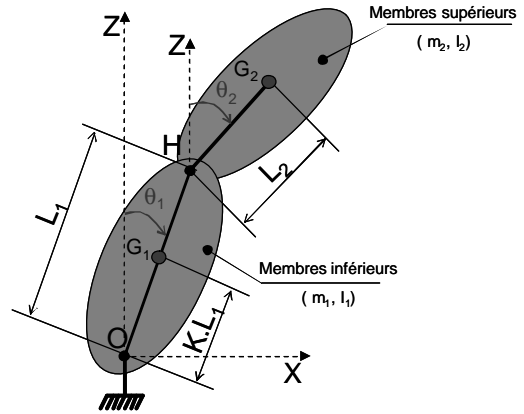


Figure 1 : Modèle en double pendule inversé de l'homme en station debout dans le plan sagittal.

avec : $u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t)]^T$ le vecteur d'entrées,

$y(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T$ le vecteur de sorties,

$$M(y) = \begin{bmatrix} a & c \cos(q_1 - q_2) \\ c \cos(q_1 - q_2) & b \end{bmatrix} \text{ la matrice d'inertie,}$$

$$S(y, \dot{y}) = \begin{bmatrix} 0 & c \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2) \\ -c \dot{q}_1 \sin(q_1 - q_2) & 0 \end{bmatrix} \text{ la matrice de Coriolis,}$$

$$G(y) = \begin{bmatrix} d \frac{\sin q_1}{q_1} & 0 \\ 0 & e \frac{\sin q_2}{q_2} \end{bmatrix} \text{ la matrice de gravitation,}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice de transformation des couples en}$$

forces généralisées et, $a = I_1 + m_1 K^2 L_1^2 + m_2 L_1^2$, $b = I_2 + m_2 L_2^2$,

$$c = m_2 L_1 L_2, \quad d = (m_2 + m_1 K) g L_1, \quad e = m_2 g L_2.$$

En considérant $x(t) = [y^T(t) \quad \dot{y}^T(t)]^T$ le vecteur d'état du système, (31) s'écrit sous la forme descripteur :

$$\begin{cases} E(y(t)) \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (32)$$

$$\text{avec } E(y(t)) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \end{bmatrix}, C = [I \ 0], B = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A(y(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) & -S(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2) \end{bmatrix}.$$

B. Structure de l'observateur basé sur le modèle descripteur de l'homme en station debout

Les couples articulaires mis en œuvre par l'homme en station debout ne peuvent être mesurés sans une instrumentation invasive qui est éthiquement proscrite. Afin de pallier ce problème, on propose l'utilisation d'un observateur à entrées inconnues. On définit le vecteur d'état augmenté $x^e(t) = [x^T(t) \ u^T(t)]^T$ et on fait l'hypothèse que la dynamique des entrées est faible devant celle du système, i.e. $\dot{u}(t) \approx 0$. L'observateur à entrées inconnues s'écrit alors :

$$\begin{cases} E^e \dot{\hat{x}}^e = A^e \hat{x}^e + K^e (y - C^e \hat{x}^e) \\ y = C^e x^e \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{avec: } E^e = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, A^e = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C^e = [C \ 0].$$

Les fonctions non linéaires à prendre en compte pour la formalisation de l'observateur flou TS sont :

$$\text{dans } E^e : \mathbf{w} = \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \in [\underline{w} \ \bar{w}],$$

$$\text{dans } A^e : \mathbf{h}_1 = \frac{\sin(\mathbf{q}_1)}{\mathbf{q}_1} \in [\underline{h}_1 \ \bar{h}_1] \text{ et } \mathbf{h}_2 = \frac{\sin(\mathbf{q}_2)}{\mathbf{q}_2} \in [\underline{h}_2 \ \bar{h}_2]$$

A^e contient également les fonctions $\mathbf{h}_3 = \dot{\mathbf{q}}_1 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ et $\mathbf{h}_4 = \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$. Cependant, les vitesses angulaires ne pouvant être directement mesurées par un système de capture du mouvement, ces fonctions ne sont pas prises en compte dans le découpage. Celui-ci est effectué de manière à décomposer les termes non linéaires tels que [15] :

$$f = \frac{\bar{f} - f}{f - \underline{f}} \cdot \underline{f} + \frac{f - \underline{f}}{\bar{f} - \underline{f}} \cdot \bar{f} \text{ avec } f \in \{\mathbf{w}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\},$$

$$v_1 = \frac{\bar{w} - w}{\bar{w} - \underline{w}} = 1 - v_2, h_1 = \frac{\bar{h}_1 - h_1}{\bar{h}_1 - \underline{h}_1} \cdot \frac{\bar{h}_2 - h_2}{\bar{h}_2 - \underline{h}_2} \text{ etc.}$$

$$\text{et, } E_i^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c\bar{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\bar{w} & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d\bar{h}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & d\bar{h}_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

L'observateur flou ainsi simplifié s'écrit :

$$\begin{cases} E_v^e \dot{\hat{x}}^e = A_h^e \hat{x}^e + K_{hv}^e (y - C_h^e \hat{x}^e) \\ y = C_h^e x^e \end{cases} \quad (34)$$

C. Résultats en simulation

La validité de l'observateur flou (34) a été testée en simulation en comparant l'estimation du vecteur d'état augmenté \hat{x}^e aux

positions, vitesses et couples articulaires obtenues par la simulation du modèle descripteur non linéaire (32) incluant les fonctions \mathbf{h}_3 et \mathbf{h}_4 . Les K_{ik}^e ont été obtenus par placement de pôle avec deux pôles dominants choisis à -18 et quatre pôles auxiliaires à -55 . Le mouvement simulé correspond à un mouvement de la position érigée ($\mathbf{q}_1 = 0, \mathbf{q}_2 = 0$) à la position ($\mathbf{q}_1 = -\mathbf{p}/6, \mathbf{q}_2 = \mathbf{p}/3$) avec une dynamique réaliste au regard des contraintes physiologiques. La figure 2 présente la comparaison des couples articulaires simulés à partir du modèle non linéaire et reconstruits par l'observateur à entrées inconnues (OEI).

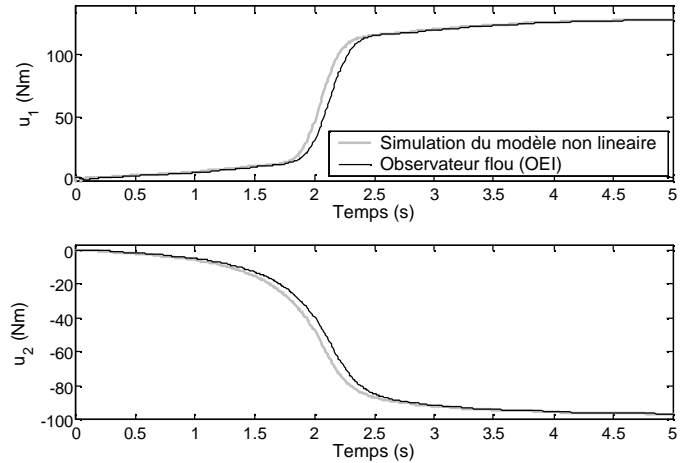


Figure 2 : Couples articulaires obtenus par la simulation du modèle non linéaire et reconstruits par l'observateur flou.

D. Résultats expérimentaux

Un sujet sain de 27 ans, 69,8kg, 1,85m a participé à cette étude. Le mouvement étudié correspond à une flexion-extension combinée autour de la hanche et de la cheville dans le plan sagittal tout en maintenant une rigidité apparente du pendule inférieur (cuisses + jambes) ainsi que du pendule supérieur (Tronc + membres supérieurs + tête). L'acquisition du mouvement est effectuée au moyen d'un système optoélectronique de capture du mouvement (Vicon 612) synchronisé avec une plateforme de force, figure 3 [14].

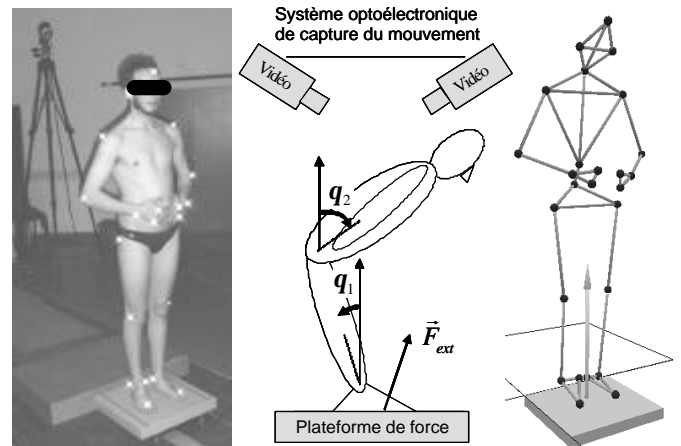


Figure 3: Dispositif expérimental pour la mesure des positions angulaires et des forces extérieures au corps humain.

L'erreur de reconstruction 3D a été évaluée à 0,6mm et la fréquence d'échantillonnage est de 120Hz. Basée sur la mesure des positions de chaque segment corporel et sur l'utilisation de tables anthropométriques, le centre de gravité et l'inertie de chaque pendule sont déterminés dans le plan sagittal [11].

Afin d'obtenir une indication sur la validité de la reconstruction des couples articulaires au moyen de l'observateur à entrées inconnues (OEI), une comparaison avec les couples articulaires estimés par la technique « bottom-up » de dynamique inverse (ID) classiquement utilisée en biomécanique [11] est réalisée. La figure 4 montre que les couples articulaires OEI reconstruits ont des allures semblables à ceux obtenus par la dynamique inverse ID. Le tableau 1 présente des indicateurs représentatifs de la cohérence entre les deux types d'estimations à la hanche et aux chevilles.

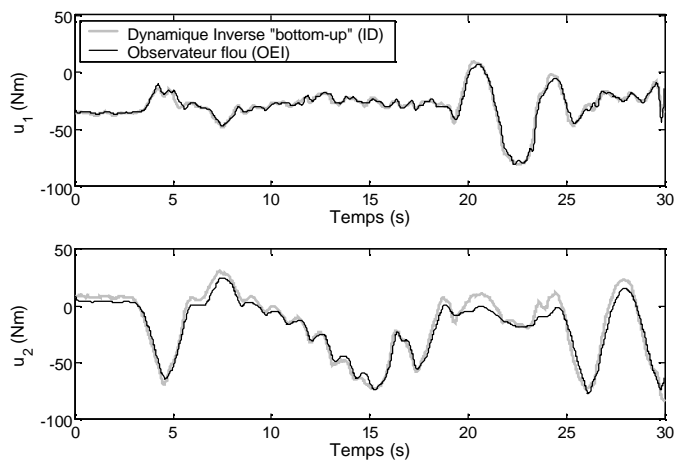


Figure 4 : Couples articulaires estimés par la dynamique inverse et par l'observateur flou à entrées inconnues.

OEI vs ID	Coefficient de corrélation	Erreur quadratique moyenne (Nm)
Chevilles	0,98	2,83
Hanche	0,98	6,29

Tableau 1 : Comparaison des différentes estimations des couples articulaires.

La valeur des coefficients de corrélations confirme la similarité des différentes estimations (OEI et ID). Cependant, nous remarquons des écarts entre les estimations OEI et ID du couple articulaire au niveau de la hanche u_2 . Ces erreurs d'estimations peuvent être dus aux problèmes de mises en correspondances de données hétérogènes [12,14]. En effet, la technique « bottom-up » de la dynamique inverse nécessite les mesures issues d'une plate-forme de force et d'un système optoélectronique de capture du mouvement. De plus, elle engendre des incertitudes croissantes à mesure que les indéterminations sont levées de proches en proches [13]. Celles-ci sont confirmées par une erreur quadratique moyenne plus élevée à la hanche qu'aux chevilles. En dépit d'une mesure de référence qui ne peut être obtenue sans une instrumentation invasive éthiquement proscrite, il n'est pas possible d'affirmer que l'utilisation d'un observateur à entrées inconnues fournit de meilleurs résultats que la dynamique inverse. Cependant, sa mise en œuvre ne nécessitant que la mesure des positions segmentaires, il constitue une alternative intéressante à la dynamique inverse.

VI. CONCLUSION

Cette étude a présenté une structure d'observateur non-linéaire de type Takagi Sugeno basée sur une forme descripteur. Des conditions de convergence de l'erreur de reconstruction mises sous forme de problèmes LMI ont été introduites. Deux approches ont été proposées, la seconde incluant la première. Un exemple a permis d'illustrer l'intérêt de tels observateurs pour réduire dans certains cas la conservativité des résultats. Enfin, ces résultats ont été appliqués avec succès pour au cas de l'estimation des couples articulaires de l'homme en station debout par un observateur à entrées inconnues.

VII. RÉFÉRENCES

- [1] Guerra T.M., Vermeiren L., LMI based relaxed Non-quadratic stabilisations for non-linear systems in the Takagi-Sugeno's form, *Automatica*. À paraître, 2004.
- [2] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O., Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 6(2):1-16, 1998.
- [3] Wang, H.O., K. Tanaka, Griffin M., An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4 (1),14-23, 1996.
- [4] Taniguchi, T., Tanaka K., Yamafuji K., Wang H.O., Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs. *ACC'99 San diego, June, USA*, 1827-1831, 1999.
- [5] Taniguchi T., Tanaka K., Wang H.O., Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 8 (4), 442-452, 2000.
- [6] Kim E., Lee H., New Approaches to Relaxed Quadratic Stability Condition of Fuzzy Control Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5), 523-533, 2000.
- [7] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM*, Philadelphia, 1994.
- [8] Peaucelle D., Arzelier D., Bachelier O., Bernussou J., A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Systems & Control letters*, 40(1), 21-30, 2000.
- [9] Guerra T.M., Ksontini M., Delmotte F., Some new relaxed conditions of quadratic stabilization for continuous Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE CESA'03 Lille*, France, 2003.
- [10] Nashner L., McCollum G., The organization of human postural movements: a formal basis and experimental synthesis. *Behavioral Brain Sciences* 8, 135-72, 1985
- [11] Winter, D.A., Biomechanics and motor control of human movement. *Wiley & Sons Editors*, New York, 1990
- [12] McCaw S.T., De Vita P., Errors in alignment of center of pressure and foot coordinates affect predicted lower extremity torques. *Journal of Biomechanics*, 28, pp. 985-988, 1995.
- [13] Hatze H., The fundamental problem of myoskeletal inverse dynamics and its implications. *Journal of biomechanics* 32, 109-115, 2001.
- [14] Guelton K., Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station. Mise en œuvre d'observateurs flous sous forme descripteur, *Thèse de doctorat, LAMIH*, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2003.
- [15] Morère Y., Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi Sugeno, *Thèse de doctorat, LAMIH*, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2001.