



**HAL**  
open science

## Suivi de trajectoire d'un dispositif de rééducation des membres inférieurs - Approche multimodèles

Lynda Seddiki, Kevin Guelton, J. Zaytoon

### ► To cite this version:

Lynda Seddiki, Kevin Guelton, J. Zaytoon. Suivi de trajectoire d'un dispositif de rééducation des membres inférieurs - Approche multimodèles. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. hal-02291465

**HAL Id: hal-02291465**

**<https://hal.science/hal-02291465v1>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Suivi de trajectoire d'un dispositif de rééducation des membres inférieurs - Approche multimodèles

LYNDA SEDDIKI, KEVIN GUELTON, JANAN ZAYTOON

Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (CRestIC)

Université de Reims Champagne Ardenne, UFR Sciences, Moulin de la Housse BP 1039, 51689 Reims, France

{lynda.seddiki; kevin.guelton; janan.zaytoon}@univ-reims.fr

**Résumé**— Cet article propose la commande en suivi de trajectoire d'un nouveau dispositif de rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire fermée. L'effort du patient appliqué sur cette machine est considéré comme une perturbation externe à la dynamique du système. Le modèle dynamique obtenu de ce dispositif est écrit sous forme d'un multimodèle de type Takagi-Sugeno (T-S). Une loi de commande de type non-PDC (Parallel-Distributed-Compensation) est synthétisée afin d'assurer le suivi de trajectoire de ce système en boucle fermée avec atténuation des perturbations externes. Des conditions de stabilité sont données sous forme d'inégalités linéaires matricielles en utilisant une fonction de Lyapunov non-quadratique. Enfin, la simulation d'un mouvement isocinétique illustre l'efficacité de l'approche proposée.

**Mots clés**— Dispositif de rééducation, chaîne musculaire fermée, multimodèles, descripteurs, suivi de trajectoires, LMI.

## I. INTRODUCTION

L'assistance aux techniques de rééducation fonctionnelle a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années [1][2]. Ainsi, un grand nombre de machines, de robots de rééducation et/ou d'assistance ont été conçues pour répondre à des besoins spécifiques exprimés par les médecins rééducateurs. Parmi ces dispositifs, les machines dites isocinétiques telles que les machines Cybex ou Multi-Iso ont été développées pour la rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire ouverte (CMO) [3][4]. Plus récemment, la rééducation en chaîne musculaire fermée (CMF) a fait l'objet d'attentions particulières pour son aptitude à stabiliser l'articulation ciblée tout en assurant des exercices proches de ceux utilisés dans la vie courante [5][6]. Dans ce cadre, un nouveau concept de machine de rééducation en CMF, nommé Sys-Réeduc, a été proposé [7]. Généralement les machines isocinétiques sont asservies en position, vitesse et force [4]. Cependant, elles n'assurent pas le rejet des perturbations externes telles que les actions mécaniques (forces et couples) qu'exerce le patient sur la machine. Ainsi, sur la base d'une structure de commande générique proposée et validée expérimentalement sur Multi-Iso [8], cet article propose l'application d'une loi de commande non linéaire pour le dispositif Sys-Réeduc. Notons que dans [7][8], seule la stabilisation a été traitée. Cependant, l'objectif d'une telle loi de commande est d'assurer la sécurité de l'utilisateur lors d'un mouvement complet de rééducation. De ce fait, l'objectif est de garantir le suivi de trajectoire dans l'ensemble de l'espace opérationnel tout en assurant l'atténuation des perturbations externes. Parmi les approches de commandes non linéaires, la commande de type Takagi-Sugeno a été récemment plébiscitée pour son efficacité tant pour les aspects théoriques [11][12][13][14] que pratiques

[8][15][16]. Après avoir rappelé le concept et la modélisation dynamique de Sys-Réeduc, la synthèse d'une telle loi de commande sera proposée sur la base d'un multimodèle de type Takagi-Sugeno (T-S) [10]. Le choix se portera sur ce type de modèles dans la mesure où ceux-ci constituent une méthodologie élégante d'approximation universelle des systèmes non linéaires [11][13]. De plus, une approche descripteur sera considérée dans la mesure où cette classe de systèmes constitue une écriture naturelle des systèmes mécanique [15][16]. D'autre part, afin de fournir les conditions moins conservatives que celles classiquement rencontrées dans la littérature [13][14], une fonction de Lyapunov non quadratique sera considérée. Dans la dernière section, des résultats en simulation illustreront les performances de l'approche de commande proposée.

## II. CONCEPT ET MODELISATION DE SYS-REEDUC

### A. Concept cinématique du dispositif Sys-Réeduc

La figure (1) présente le concept cinématique de la machine de rééducation Sys-Réeduc dans le plan sagittal. Le patient est assis sur un siège fixé au bâti de la machine. Le tronc et le bassin sont supposés fixes par rapport au bâti. Seules la rotation interne-externe suivant l'axe  $\vec{z}_s$ , repérée par la variable  $q_2(t)$ , et le mouvement de translation du support mobile suivant l'axe  $\vec{x}$ , repérée par la variable  $q_1(t)$ , sont mobiles et actionnés par des moteurs à courants continus. Ces deux axes suffisent donc pour solliciter la majeure partie des articulations et des groupes musculaires du membre inférieur. Ainsi, la rééducation ou le renforcement musculaire peut être pratiqué de façon spécifique au cours d'un mouvement ciblé. Par exemple, le mouvement du membre inférieur avec le pied en rotation externe et en extension favorise l'étirement des ischio-jambiers internes.

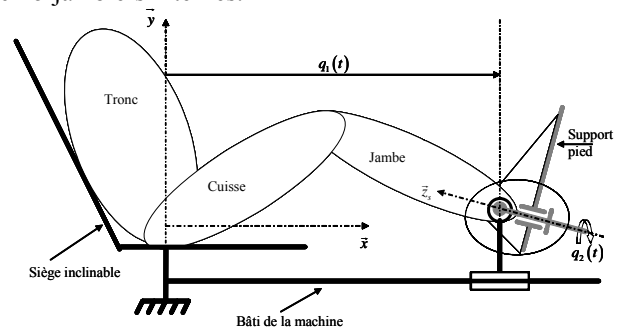


Fig. 1. Concept cinématique du dispositif Sys-Réeduc dans le plan sagittal

Pour plus de détail sur la structure mécanique de Sys-Rééduc, le lecteur pourra se référer à [7].

Notons qu'ici, la structure cinématique n'est présentée que pour un seul des deux membres inférieurs. En effet, les fonctions de chacun des membres inférieurs étant symétrique, le dispositif final est composé de deux structures cinématiques identiques à celle présentée figure 1.

### B. Structure de commande utilisée

Une structure de commande, validée expérimentalement sur une machine de rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire ouverte, a été proposée dans [8]. Dans le cadre de cet article, nous reprenons les principes de cette structure afin de l'appliquer à Sys-Rééduc. Celle-ci, présentée figure 2, est basée sur deux étages [8]:

- Un étage de commande continue du système mécanique que constitue le dispositif de rééducation. Celui-ci permet de fournir un comportement sécuritaire en assurant la stabilité de la partie mécanique quelque soit l'action réalisée par le patient. Dans ce cas, on peut considérer l'action humaine comme une perturbation externe qu'il convient d'atténuer ou de rejeter. Notons qu'à lui seul, cet étage ne permet pas la conduite volontaire du système par le patient.
- Un étage de génération de trajectoires relatives à un mouvement de rééducation spécifié par le médecin (flexion-extension isocinétique, isométrique, isotonique...). Cet étage est basé sur une machine à états discrets [3][9] et permet la conduite volontaire du système par le patient. Ainsi, selon l'effort appliqué par le patient sur le dispositif, une trajectoire désirée et cohérente est générée.

Dans la suite de cet article, nous nous intéresserons à la synthèse de loi de commande en suivi de trajectoire pour l'étage continu. Par ailleurs, pour un dispositif de rééducation des membres inférieurs, les différents modes de rééducation ont été traduits en terme de machine à états discrets [3][8][9] et ne seront pas repris dans cet article.

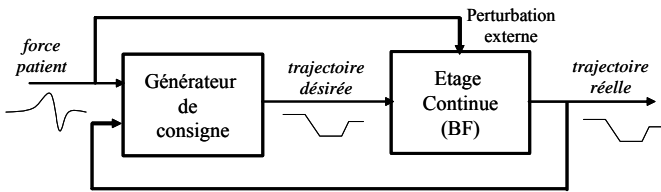


Fig. 2. Structure de contrôle-commande d'un système de rééducation.

### C. Modèle dynamique du dispositif Sys-Rééduc et modélisation T-S

La figure 3 représente le principe mécanique de Sys-Rééduc.  $C_{M1}(t)$  et  $C_{M2}(t)$  sont respectivement les couples moteurs permettant la mise en mouvement des degrés de liberté associés aux variables  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$ . On considère, pour synthétiser la loi de commande, que seule la machine est à contrôler, via les couples moteurs, et que le patient applique un effort externe qui se traduit par une force  $f_p(t)$  suivant l'axe de translation  $\bar{x}$  et un couple  $C_p(t)$  suivant l'axe de rotation  $\bar{z}_s$  du support mobile. Le modèle dynamique de ce système est obtenu via les équations de Lagrange et est donné par :

$$M(q)\ddot{q}(t) + C(q, \dot{q})\dot{q}(t) + G(q)q(t) = Ru(t) + S\varphi(t) \quad (1)$$

$$\text{avec } M = \begin{bmatrix} M+m & -(M+m)b\sin(q_2(t)) \\ -(M+m)b\sin(q_2(t)) & (M+m)l^2 + J \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -(M+m)b\dot{q}_2(t)\cos(q_2(t)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mgd\sin_c(q_2(t)) \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$q(t) = [q_1(t), q_2(t)]^T$  représente le vecteur des coordonnées généralisées,  $u(t) = [C_{M1}(t) \ C_{M2}(t)]^T$  le vecteur des couples d'entrées et  $\varphi(t) = [f_{p/x}(t) \ \gamma(t)f_{p/z}(t)]^T$  le vecteur des actions extérieures appliquées par le patient sur la machine où  $\gamma(t)$  est la distance entre l'axe de rotation du support mobile et le point d'application de l'effort appliqué par le sujet sur la machine (centre de pression).

Notons que les composantes des perturbations externes  $\varphi(t)$  sont de deux natures :

- $f_{p/x}(t)$  est la composante de la force du patient exercée sur le support mobile suivant l'axe  $\bar{x}$ .
- $f_{p/z}(t)$  est la composante de l'effort du patient suivant l'axe  $\bar{z}$  qui engendre un couple  $\gamma(t)f_{p/z}(t)$  lors du mouvement de rotation interne-externe du pied.

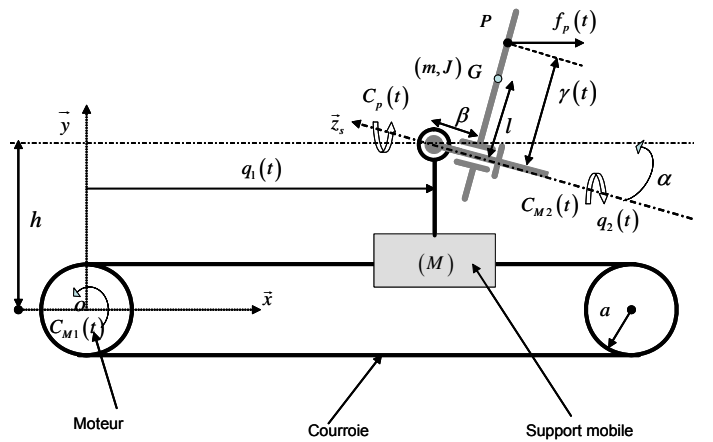


Fig. 3. Principe mécanique du dispositif Sys-Rééduc

Le modèle de la machine Sys-Rééduc représenté par l'équation (1) peut s'écrire sous la forme descripteur d'état non linéaire suivante :

$$E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) + H\varphi(t) \quad (2)$$

où  $x(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dot{q}_1(t) \ \dot{q}_2(t)]$  est le vecteur d'état,

$$E(x(t)) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -G & -C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix}.$$

Tableau 1. Paramètres du modèle dynamique de Sys-Réeduc

Param.	Désignation	Valeur
$M$	Masse du support mobile (partie en translation)	14kg
$m$	Masse du support mobile (partie en rotation)	4kg
$J$	Inertie du support mobile selon $\vec{z}_s$ (partie en rotation)	0.26kg / m <sup>2</sup>
$a$	Rayon de la poulie-courroie réalisant la translation suivant l'axe $\vec{x}$	0.025m
$h$	Hauteur bâtis/axe de rotation du support mobile	0.6m
$\beta$	Distance entre l'axe de la cheville et l'axe de rotation du support mobile	0.01m
$l$	Distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du support	0.05m
$\alpha$	Angle entre l'axe horizontal du bâti et l'axe de rotation du support mobile	20°

*Remarque :* Dans le cadre de cette application, les moteurs permettant la rotation interne-externe sont dimensionnés pour une vitesse maximale de rotation de  $\bar{q}_2 \equiv 100$  (tr / min)  $\equiv 10,47$  (rad / s). Ainsi, on peut considérer que  $\dot{q}_2 \in [-\bar{q}_2, \bar{q}_2]$ . De plus, on pose  $\varpi$  tel que  $\sin_c(q_2(t)) \in [\varpi, 1]$ . Dans ce cas,  $\varpi = -0,217$ .

Notre objectif est maintenant de garantir le suivi de trajectoire du système non linéaire (2) par un retour d'état assurant l'atténuation des perturbations  $\varphi(t)$ . Parmi les approches de commande non linéaires, la commande des multimodèles de type Takagi-Sugeno [10] a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années [11][12]. Un découpage en secteurs non linéaire permet de réécrire les modèles non linéaires affines en la commande de manière exacte sous la forme d'un multimodèle T-S sur un compact de l'espace d'état [13]. En effet, un multimodèle T-S, composé d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaire, peut-être obtenu à partir de (2). Les fonctions non linéaires comprises dans (2) peuvent être réécrites telles que :

$$\sin(q_2(t)) = (1) \underbrace{\frac{\sin(q_2(t)) + 1}{2}}_{v_1(q_2)} + (-1) \underbrace{\frac{1 - \sin(q_2(t))}{2}}_{v_2(q_2)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \dot{q}_2(t) \cos(q_2(t)) \\ &= (\bar{q}_2) \underbrace{\frac{\dot{q}_2(t) \cos(q_2(t)) + \bar{q}_2}{2\bar{q}_2}}_{w_{11}(\dot{q}_2, q_2)} + (-\bar{q}_2) \underbrace{\frac{\bar{q}_2 - \dot{q}_2(t) \cos(q_2(t))}{2\bar{q}_2}}_{w_{12}(\dot{q}_2, q_2)} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\sin_c(q_2(t)) = (1) \underbrace{\frac{\sin_c(q_2(t)) - \varpi}{1 - \varpi}}_{w_{21}(q_2)} + (\varpi) \underbrace{\frac{1 - \sin_c(q_2(t))}{1 - \varpi}}_{w_{22}(q_2)} \quad (5)$$

Dès lors, considérant (3), (4) et (5), le modèle non linéaire (2) peut-être réécrit sous la forme du multimodèle descripteur suivant :

$$\sum_{k=1}^2 v_k(q_2) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(q_2, \dot{q}_2) (A_i x(t) + Bu(t) + H\varphi(t)) \quad (6)$$

$$\text{avec } E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & -(M+m)l \sin \alpha \\ 0 & 0 & -(M+m)l \sin \alpha & (M+m)l^2 + J \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & (M+m)l \sin \alpha \\ 0 & 0 & (M+m)l \sin \alpha & (M+m)l^2 + J \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (M+m)l \bar{q}_2 \sin \alpha \\ 0 & mgl \cos \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (M+m)l \bar{q}_2 \sin \alpha \\ 0 & mgl \varpi \cos \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(M+m)l \bar{q}_2 \sin \alpha \\ 0 & mgl \cos \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(M+m)l \bar{q}_2 \sin \alpha \\ 0 & mgl \varpi \cos \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } h_1(\cdot) = w_{11}(\cdot)w_{21}(\cdot), \quad h_2(\cdot) = w_{11}(\cdot)w_{22}(\cdot),$$

$$h_3(\cdot) = w_{12}(\cdot)w_{21}(\cdot), \quad h_4(\cdot) = w_{12}(\cdot)w_{22}(\cdot).$$

Pour plus de détail sur l'obtention des modèles T-S, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de référence [13].

### III. SYNTHÈSE $H_\infty$ DE COMMANDE DE TYPE T-S EN SUIVI DE TRAJECTOIRES

Dans cette section, nous proposons des conditions assurant le suivi de trajectoire avec rejet de perturbations externes pour une large classe de multimodèles comprenant le système (6).

*Notations :* Dans la suite de cet article, afin d'alléger les notations mathématiques, nous considérerons les notations :

$$X_h = \sum_{i=1}^r h_i X_i, \quad Y_{hv} = \sum_{k=1}^e \sum_{i=1}^r v_k h_i Y_{ik}, \quad Z_{hvh} = \sum_{k=1}^e \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r v_k h_i h_j Y_{ik},$$

$$\text{ainsi que : } W_{hvh} = X_{hv} Y_h^{-1} = \left( \sum_{k=1}^e \sum_{i=1}^r v_k h_i X_{ik} \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i Y_i \right)^{-1}, \text{ etc.}$$

De plus, de manière usuelle, le symbole (\*) à l'intérieur d'une matrice indique une quantité symétrique transposée.

Soit la classe des multimodèles descripteurs perturbés représentés par [14]:

$$\sum_{k=1}^e v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + H_i \varphi(t)) \quad (7)$$

avec  $z(t)$  le vecteur des variables de décisions,  $x(t)$  le vecteur d'état,  $u(t)$  le vecteur d'entrées,  $y(t)$  le vecteur de sorties,  $\varphi(t)$  le vecteur des perturbations externes. Pour  $i = \{1, \dots, r\}$  et  $k = \{1, \dots, e\}$ ,  $E_k$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $H_i$ , sont des matrices réelles à coefficients constants et de dimensions appropriées,  $h_i(z(t)) > 0$ ,  $v_k(z(t)) > 0$  sont des fonctions scalaires et  $\forall t \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et  $\sum_{k=1}^e v_k(z(t)) = 1$ .

*Remarque* : Cette classe de multimodèles, appelés descripteurs de type T-S a fait l'objet de plusieurs travaux de stabilité et de stabilisation [12][14]. Néanmoins, à notre connaissance, aucunes des études existantes dans la littérature traitent des conditions de stabilité non quadratique en suivi de trajectoire avec atténuation des perturbations externes.

Soit le vecteur d'état augmenté  $x^*(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ , (7) peut être réécrit avec les notations définies ci-dessus tel que :

$$E^* \dot{x}^*(t) = A_{hv}^* x^*(t) + B_h^*(t) u(t) + H_h^* \varphi(t) \quad (8)$$

$$\text{avec } E^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{hv}^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}, \quad B_h^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h \end{bmatrix},$$

$$H_h^* = \begin{bmatrix} 0 \\ H_h \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, i \text{ et } v = 1, \dots, k.$$

On considère le modèle de référence donné par :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + \tau(t) \quad (9)$$

avec  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice Hurwitz et  $\tau(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée du modèle de référence.

On pose  $x_r^*(t) = [x_r^T(t) \quad \dot{x}_r^T(t)]^T$ , (9) peut se réécrire :

$$E^* \dot{x}_r^*(t) = A_r^* x_r^*(t) + B_r^* \tau(t) \quad (10)$$

$$\text{avec } A_r^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_r & -I \end{bmatrix} \text{ et } B_r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

On considère la loi de commande de type non-PDC (Parallel-Distributed-Compensation) définie par :

$$u(t) = -K_{hv} Z_{11hv}^{-1} (x(t) - x_r(t)) \quad (11)$$

On pose  $e^*(t) = x^*(t) - x_r^*(t)$  l'erreur de suivi de trajectoire, (11) peut se réécrire :

$$u(t) = -K_{hv}^* e^*(t), \quad K_{hv}^* = [K_{hv} Z_{11hv}^{-1} \quad 0] \quad (12)$$

La dynamique de l'erreur de suivi de trajectoire peut-être exprimée par :

$$E^* \dot{e}^*(t) = E^* \dot{x}^*(t) - E^* \dot{x}_r^*(t) \quad (13)$$

En considérant (8), (10) et (12), la dynamique de la boucle fermée s'exprime par:

$$\tilde{E} \dot{\tilde{e}}(t) = \tilde{A}_{hhvh} \tilde{e}(t) + \tilde{H}_h \tilde{\varphi}(t) \quad (14)$$

$$\text{avec } \tilde{e}(t) = \begin{bmatrix} e^*(t) \\ x_r^*(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \tau(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} E^* & 0 \\ 0 & E^* \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{hhvh} = \begin{bmatrix} (A_{hv}^* - B_h^* K_{hv}^*) & A_{hv}^* - A_r^* \\ 0 & A_r^* \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{H}_h = \begin{bmatrix} H_h^* & -B_r^* \\ 0 & B_r^* \end{bmatrix}.$$

L'objectif consiste maintenant en l'obtention des matrices  $K_{hv}$  et  $Z_{11hv}$  permettant la stabilisation de la boucle fermée (14) tout en assurant l'atténuation de l'effet des perturbations externes  $\tilde{\varphi}(t)$  sur l'erreur de poursuite  $\tilde{e}(t)$ . Pour cela, on considère le critère  $H_\infty$  suivant :

$$\int_{t_0}^{t_f} \tilde{e}^T(t) \tilde{Q} \tilde{e}(t) dt \leq \eta^2 \int_{t_0}^{t_f} \tilde{\varphi}^T(t) \tilde{\varphi}(t) dt \quad (15)$$

où  $\eta$  est le taux d'atténuation à minimiser et  $\tilde{Q} = \text{diag}[I \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ .

Le résultat est résumé par le théorème suivant.

**Théorème** : Soient  $\forall z(t)$ ,  $\xi \in \{1, \dots, e-1\}$ ,  $\psi \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $\dot{h}_\psi \geq \mu_\psi$  et  $\dot{v}_\xi(z(t)) \geq \rho_\xi$ . Le suivi de trajectoire du système en boucle fermée (14) est garanti avec atténuation des perturbations externes  $\tilde{\varphi}(t)$  selon le taux  $\delta = \eta^2$  s'il existe les matrices  $K_{jk}$ ,  $Z_{11jk} = Z_{11jk}^T > 0$ ,  $Z_{41jk} = Z_{41jk}^T > 0$ ,  $Z_{13ij}$ ,  $Z_{14ij}$ ,  $Z_{23ij}$ ,  $Z_{24ij}$ ,  $Z_{33ij}$ ,  $Z_{34ij}$ ,  $Z_{43ij}$ ,  $Z_{44ij}$  vérifiant :

Pour tout  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, e$ ,  $\min_{\mathbb{R}^+} \delta$  tq :

$$\begin{bmatrix} \chi_{11ijk} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ \chi_{21ijk} & \chi_{22ijk} & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ Z_{11jk} & Z_{11jk} & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{41ijk} & \chi_{42ijk} & 0 & \chi_{44ijk} & (*) & (*) & (*) \\ \chi_{51ijk} & \chi_{52ijk} & 0 & \chi_{54ijk} & \chi_{55ij} & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & H_i^T & 0 & -\delta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & I & 0 & -\delta I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

avec :

$$\chi_{11ijk} = Z_{13ij}^T + Z_{13ij} - \sum_{\xi=1}^{e-1} \rho_\xi (Z_{11i\xi} - Z_{11ie}) + \sum_{\psi=1}^{r-1} \mu_\psi (Z_{11\psi k} - Z_{11rk}),$$

$$\chi_{21ijk} = Z_{33ij} + Z_{23ij}^T - \sum_{\xi=1}^{e-1} \rho_\xi (Z_{11i\xi} - Z_{11ie}) + \sum_{\psi=1}^{r-1} \mu_\psi (Z_{11\psi k} - Z_{11rk}),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{22ijk} &= Z_{43ij}^T + Z_{43ij} - \sum_{\xi=1}^{e-1} \rho_{\xi} (Z_{41i\xi} - Z_{41ie}) + \sum_{\psi=1}^{r-1} \mu_{\psi} (Z_{41\psi k} - Z_{41rk}), \\
\mathcal{X}_{41ijk} &= Z_{14ij}^T + A_i Z_{11jk} - E_k Z_{13ij} \\
&\quad - B_i K_{jk} + A_i Z_{11jk}^T - E_k Z_{33ij} - A_r Z_{11jk}^T + Z_{33ij}, \\
\mathcal{X}_{42ijk} &= Z_{34ij}^T + A_i Z_{11jk} - E_k Z_{23ij} \\
&\quad - B_i K_{jk} + A_i Z_{41jk} - E_k Z_{43ij} - A_r Z_{41jk} + Z_{43ij}, \\
\mathcal{X}_{44ijk} &= -Z_{14ij}^T E_k^T - E_k Z_{14ij} - Z_{34ij}^T E_k^T + Z_{34ij}^T - E_k Z_{34ij} + Z_{34ij}, \\
\mathcal{X}_{51ijk} &= A_r Z_{11jk}^T - Z_{33ij} + Z_{24ij}^T, \quad \mathcal{X}_{52ijk} = Z_{44ij}^T + A_r Z_{41jk} - Z_{43ij}, \\
\mathcal{X}_{54ijk} &= -Z_{34ij} - Z_{24ij}^T E_k^T - Z_{44ij}^T E_k^T + Z_{44ij}^T \text{ et } \mathcal{X}_{55ij} = -Z_{44ij}^T - Z_{44ij}.
\end{aligned}$$

*Preuve :* Soit la fonction candidate de Lyapunov non-quadratique suivante :

$$V(\tilde{e}(t)) = \tilde{e}^T(t) \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{e}(t) > 0 \quad (17)$$

avec  $\tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} = \tilde{Z}_{hhv}^{-T} \tilde{E} > 0$ , c'est-à-dire :

$$\tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{E} = \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv} > 0 \quad (18)$$

On pose  $\tilde{Z}_{hhv} = \begin{bmatrix} Z_{11hv} & Z_{12hvh} & Z_{21hh} & Z_{22hvh} \\ Z_{13hh} & Z_{14hh} & Z_{23hh} & Z_{24hh} \\ Z_{31hh} & Z_{32hvh} & Z_{41hv} & Z_{42hvh} \\ Z_{33hh} & Z_{34hh} & Z_{43hh} & Z_{44hh} \end{bmatrix}$ , (18) implique

$$\begin{aligned}
Z_{11hv}^T &= Z_{11hv} > 0, & Z_{21hh}^T &= Z_{31hh} > 0, & Z_{41hv}^T &= Z_{41hv} > 0, \\
Z_{12hvh} &= 0, & Z_{22hvh} &= 0, & Z_{32hvh} &= 0 \text{ et } Z_{42hvh} = 0.
\end{aligned}$$

(14) est stable au regard du critère (15) si :

$$\dot{V}(\tilde{e}(t)) + \tilde{e}^T(t) \tilde{Q} \tilde{e}(t) - \eta^2 \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \leq 0 \quad (19)$$

que l'on peut réécrire sous la forme quadratique:

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}^T(t) \\ \tilde{\phi}^T(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{hhv}^T \tilde{Z}_{hhv}^{-1} + \tilde{Z}_{hhv}^{-T} \tilde{A}_{hhv} \\ + \tilde{Q} + \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \\ \tilde{H}_h^T \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{hhv}^{-T} \tilde{H}_h \\ -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

d'où, (19) est vérifiée si et seulement si:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{hhv}^T \tilde{Z}_{hhv}^{-1} + \tilde{Z}_{hhv}^{-T} \tilde{A}_{hhv} + \tilde{Q} + \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} & \tilde{Z}_{hhv}^{-T} \tilde{H}_h \\ \tilde{H}_h^T \tilde{Z}_{hhv}^{-1} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

En multipliant (21) à gauche par  $\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{hhv}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et à droite par

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{hhv} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{bmatrix} \left( \tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{A}_{hhv}^T + \tilde{A}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv} \right) \\ \left( + \tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{Q} \tilde{Z}_{hhv} + \tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} \right) \\ \tilde{H}_h^T \\ -\eta^2 I \end{bmatrix} \tilde{H}_h \leq 0 \quad (22)$$

Notons que, selon (18),  $\tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} = \tilde{E} \tilde{Z}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv}$  et que :

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} &= \tilde{Z}_{hhv} \dot{\tilde{Z}}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} + \dot{\tilde{Z}}_{hhv} - \dot{\tilde{Z}}_{hhv} \\
&= \tilde{Z}_{hhv} \dot{\tilde{Z}}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} + \dot{\tilde{Z}}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv}^{-1} \tilde{Z}_{hhv} - \dot{\tilde{Z}}_{hhv} \\
&= \frac{d(\tilde{Z}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv}^{-1})}{dt} \tilde{Z}_{hhv} - \dot{\tilde{Z}}_{hhv} \\
&= -\dot{\tilde{Z}}_{hhv}
\end{aligned} \quad (23)$$

dans ce cas, (22) peut se réécrire tel que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{A}_{hhv}^T + \tilde{A}_{hhv} \tilde{Z}_{hhv} + \tilde{Z}_{hhv}^T \tilde{Q} \tilde{Z}_{hhv} - \tilde{E} \dot{\tilde{Z}}_{hhv} & \tilde{H}_h \\ \tilde{H}_h^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

Après avoir développé (24) sous sa forme étendue (avec les matrices définies en (14), etc.), après l'application du complément de Schur, et sachant que, pour toutes matrice  $W_{hv}$  de classe  $C^1$  on a :

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{hv} &\geq \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^e h_i(z(t)) v_k(z(t)) \left( \sum_{\xi=1}^{e-1} \rho_{\xi} (W_{i\xi} - W_{ie}) + \sum_{\psi=1}^{r-1} \mu_{\psi} (W_{\psi k} - W_{rk}) \right) \\
&\quad (25)
\end{aligned}$$

avec,  $\forall \xi = 1, \dots, e-1$ ,  $\forall \psi = 1, \dots, r-1$ ,  $\dot{v}_{\xi} \geq \rho_{\xi}$  et  $\dot{h}_{\psi} \geq \mu_{\psi}$ , on obtient les conditions du théorème 1. ■

#### IV. RESULTATS ET SIMULATIONS

Suivant la méthodologie présentée à la section précédente, une loi de commande, de type (11), assurant le suivi de trajectoire du modèle dynamique de Sys-Rééduc (1) est obtenue. On choisit  $A_r = \text{diag}(-10, -10, -10, -10)$  afin d'autoriser une dynamique satisfaisante des trajectoires désirées. La résolution des conditions données au théorème 1 permet de garantir le taux d'atténuation minimal  $\eta = 0.048$ .

Afin d'illustrer l'atténuation des perturbations externes, la simulation est réalisée en imposant des efforts externes (fictifs en simulation) surpassant les caractéristiques physiologiques de la force que pourrait appliquer un patient sur Sys-Rééduc

$$f_p(t) = \frac{37.5}{a} \sin(6t) \text{ et } C_p(t) = 20 \sin(5t).$$

Les mouvements simulés sont présentés aux figures 4 et 5. Le mouvement de translation du support mobile correspond à une extension isocinétique du membre inférieur de vitesse  $\dot{q}_1 = 0.8 \text{ m/s}$  réalisée entre  $t=1 \text{ s}$  et  $t=2 \text{ s}$  à partir de la position initiale  $q_1(0) = 0.1 \text{ m}$ . Ce mouvement de translation est combiné à un mouvement de rotation interne-externe

choisi, dans le cadre de cette simulation, tel que

$$q_2 = -\frac{\pi}{4} \cos(2t).$$

Ces résultats de simulation illustrent les performances obtenues en suivi de trajectoire de la loi de commande synthétisée. En effet, on constate que le vecteur des perturbations externes imposées est parfaitement compensé par la commande et que les trajectoires simulées sont superposées aux trajectoires désirées.

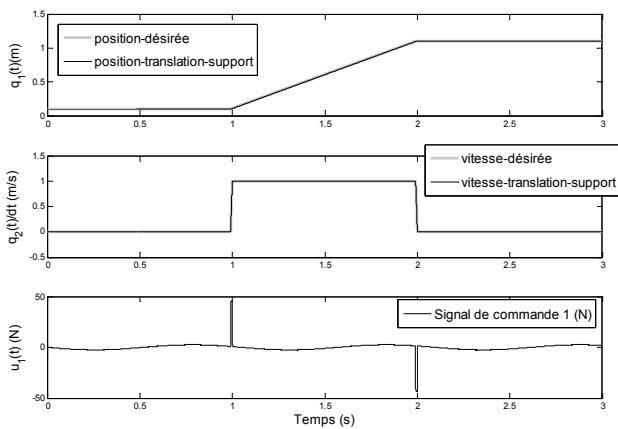


Fig. 4. Suivi de trajectoire en translation du support mobile

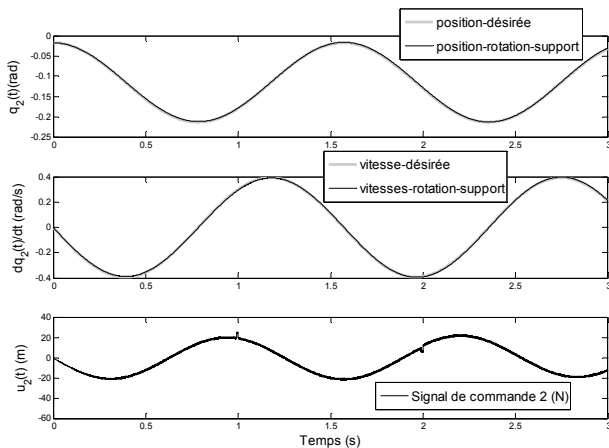


Fig. 5. Suivi de trajectoire en rotation du support mobile

## V. CONCLUSION

Cet article propose la commande en suivi de trajectoire d'un nouveau dispositif de rééducation des membres inférieurs nommée Sys-Réeduc. Sur la base du modèle non linéaire de Sys-Réeduc, une modélisation sous forme de multimodèle T-S a été proposée. Une méthodologie de synthèse de loi de commande robuste pour la classe des multimodèles T-S descripteur a été proposée. Des conditions LMIs ont été obtenues sur la base d'une fonction de Lyapunov non quadratique et ont permis d'assurer la convergence de l'erreur de suivi en boucle fermée de Sys-Réeduc. La simulation d'un mouvement isocinétique a permis d'illustrer la pertinence de l'approche proposée. Les perspectives de ce travail concernent naturellement la mise en œuvre de l'approche de contrôle-commande en situation réelle ainsi que l'évaluation de nouveaux protocoles de rééducations des membres inférieurs.

## VI. REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient la région Champagne Ardenne pour son soutien financier dans le cadre du CPER SYS-REEDUC ainsi que Mme Maggy Bowl pour ses remarques avisées.

## VII. REFERENCES

- [1] J.L. Dallaway, R. D. Jackson, P. H.A. Timmers, «Rehabilitation robotics in europe», IEEE Transaction on Rehabilitation Engineering, vol. 3 n° 1, pp. 35-45, 1995.
- [2] R. Riemer, «control of robots for rehabilitation», EUROCON, Belgrade, November, 2005.
- [3] S. Moughamir, J. Zaytoon, N. Manamanni, L. Afilal. «A system approach for control development of lower-limbs training machines». Control Engineering Practice, vol. 10, pp. 287-299, 2002.
- [4] «Les appareils d'isocinétisme en évaluation et en rééducation musculaire: intérêt et utilisation», Agence National d'accréditation et d'évaluation en santé, 2001.
- [5] G.E. Lutz, R.A. Palmitier, K.N. An. «Comparison of tibio femoral joint forces during open kinetic chain and closed kinetic chain exercices», J. Bone Joint Surg, 75 A, pp. 732-739, 1993.
- [6] E.B. Bynum, R.L. Barrack, A.H. Alexander. «Open versus closed chain kinetic exercices after anterior cruciate ligament reconstruction», A prospective randomized study. Am. J. Sports Med, vol. 23, 4, pp. 401-406, 1995.
- [7] L. Seddiki, K. Guelton, S. Leteneur, J. Zaytoon. « Concept and simulation of "Sys-Réeduc": Closed muscular chain lower limbs rehabilitation device», IEEE Int. Conf. on Rehabilitation Robotics, Noordwijk, Netherland, 2007.
- [8] L. Seddiki, K. Guelton, S. Moughamir, B. Mansouri, J. Zaytoon. «Modélisation T-S et commande H $\infty$  d'une machine de rééducation des membres inférieurs», JESA, 41, pp. 199-218, 2007.
- [9] J. Zaytoon, S.Moughamir, N. Manamanni, L. Afilal, L. Angelloz. «Formal specifications of sequential control for training machines for the lower limbs», IEEE-EMBS, 4, 2001.
- [10] T. Takagi et M. Sugeno, «Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control », IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. vol. 15, pp.116-132, 1985.
- [11] A. Sala, T.M. Guerra, R. Babuska, «Perspectives of fuzzy systems and control», Fuzzy Sets & Systems, vol. 153, 3, pp. 432-444, 2005.
- [12] T. Bouarar, K. Guelton, N. Manamanni, « LMI based H-infinity controller design for uncertain T-S descriptors subject to external disturbances», IFAC workshop on advanced Fuzzy/Neural control, Valenciennes, 2007.
- [13] K. Tanaka et H.O. Wang, «Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach», John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Interscience, 2001.
- [14] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, « Fuzzy descriptor systems and non linear model following control», IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 8, 4, pp. 442-452, 1998.
- [15] K. Guelton, S. Delprat, T.M. Guerra, «An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi-Sugeno unknown-input observer in the descriptor form », Control Engineering Practice, in press 2008, doi: 10.1016/j.conengprac. 2008. 04. 002.
- [16] H. Schulte, K. Guelton, « Modelling and simulation of two-link robot manipulators based on Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems», IEEE ICIT, International Conference on Industrial Technology. Mumbai, India, pp. 2692-2697, december 15-17, 2006.