



**HAL**  
open science

# Approches non-quadratiques pour la commande robuste des descripteurs flous de type T-S

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni

► **To cite this version:**

Tahar Bouarar, Kevin Guelton, Nouredine Manamanni. Approches non-quadratiques pour la commande robuste des descripteurs flous de type T-S. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. hal-02291463

**HAL Id: hal-02291463**

**<https://hal.science/hal-02291463>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approches non-quadratiques pour la commande robuste des descripteurs flous de type T-S

TAHAR BOUARAR, KEVIN GUELTON, NOUREDDINE MANAMANNI

Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (CReSTIC)

Université de Reims Champagne Ardenne, UFR Sciences, Moulin de la Housse BP 1039, 51689 Reims, France

{tahar.bouarar ; kevin.guelton ; noureddine.manamanni}@univ-reims.fr

**Résumé**— Dans ce papier, nous proposons une synthèse de contrôleurs pour la stabilisation robuste des systèmes descripteurs de type Takagi-Sugeno (T-S) incertains et perturbés. Celle-ci est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov Non-Quadratique dite Fonction de Lyapunov Floue (FLF) ainsi que sur une loi de commande dite non-PDC (Non-Parallel-Distributed-Compensation). Les problèmes de stabilité et de synthèse de contrôleur  $H_\infty$  sont alors formulés en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Enfin un exemple académique est proposé.

**Mots clés**— Commande non linéaire, Commande floue, Takagi-Sugeno, Commande robuste, Descripteurs, Fonction de Lyapunov non-quadratique, LMI.

## I. INTRODUCTION

Durant ces dernières décennies, la commande des modèles flous Takagi-Sugeno (T-S) [1] a largement démontré ses intérêts théoriques et pratiques. En effet, les modèles T-S permettent de représenter, d'une manière exacte sur un compact de l'espace d'état, les modèles non linéaires affines en la commande, par exemple en utilisant la technique d'obtention par secteurs non linéaires [2]. Depuis l'introduction des modèles T-S, divers travaux ont traité la stabilité et la synthèse de contrôleurs. Notamment, la loi de commande de type « Parallel Distributed Compensation » (PDC) qui a fait l'objet de nombreuses études [2][3][4]. La plupart du temps, les conditions de stabilité sont basées sur l'utilisation d'une Fonction de Lyapunov Quadratique (FLQ). De fait, ces conditions sont pessimistes puisqu'elles nécessitent la recherche de matrices communes pour un ensemble de contraintes LMI. Afin de réduire le conservatisme des conditions LMI, une possibilité est de considérer de nouvelles fonctions de Lyapunov non-quadratiques. Ainsi, certaines études ont proposé l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux [5][6][7], d'autres, une fonction non quadratique et/ou, plus récemment, une Fonction de Lyapunov Floue (FLF) [8][9][6][10]. Notons que, la plupart des conditions de stabilité présentées dans la littérature sont uniquement utilisables pour la classe des représentations d'état « classiques » des systèmes non linéaires. Une classe plus générale des systèmes dynamiques est la classe des descripteurs. Cette dernière est constituée par des équations algèbro-différentielles permettant, entre autres, la représentation de systèmes singuliers [11], mais aussi, correspondants à l'écriture « naturelle » des systèmes mécaniques à inertie variable dans le temps [14]. Les

premières conditions de stabilité pour les descripteurs de type T-S ont été proposées dans [12][13]. De plus, des conditions de stabilité robustes ont été proposées pour les descripteurs incertains [15][16], avec perturbations externes [17][18]. Cependant, dans [15] les conditions ne sont pas LMI et, par conséquent, difficilement « solutionnable » par les outils classiques de l'optimisation convexe [19]. Enfin, dans [16][17] et [18] les approches considérées sont basées sur l'utilisation d'une FLQ. Une approche pour réduire le pessimisme introduit par la FLQ a été proposée par [20]. Dans ce papier, afin d'améliorer les résultats proposés dans [17][18][20], du point de vue pessimisme des conditions LMI, une approche, basées sur une FLF et une loi de commande non-PDC, est proposée. Celle-ci permet la synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes non linéaires réécrits sous la forme de descripteurs flous T-S. Enfin, afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée, un exemple académique a été proposé.

## II. NOTATIONS, LEMME ET COROLLAIRE

Soient, pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $k \in \{1, \dots, l\}$ , les fonctions scalaires  $v_k(z(t))$ ,  $h_i(z(t))$ , les matrices  $L_k$ ,  $G_i$  et  $Q_{ik}$  de dimensions appropriées, on notera :  $L_v = \sum_{k=1}^l v_k(z(t))L_k$ ,  $G_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))G_i$  et  $Q_{hv} = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^r v_k(z(t))h_i(z(t))Q_{ik}$ . De plus, (\*) indique une quantité transposée dans une matrice symétrique. Enfin, de manière générale, on notera  $X_z = X(z(t))$  une matrice dépendante d'une variable  $z(t)$  :

**Lemme 1** [21]: Pour les matrices réelles de dimensions appropriées  $X$  et  $Y$ , et les scalaires positifs  $\delta$ , on a :

$$X^T Y + Y^T X \leq \delta X^T X + \delta^{-1} Y^T Y \quad (1)$$

**Corollaire**: Soit les matrices réelles de dimensions appropriées  $X$ ,  $Y$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $M$  et  $\mathfrak{S} > 0$ , on a :

$$\begin{bmatrix} R & (T+XY)^T \\ T+XY & M \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} R+Y\mathfrak{S}^{-1}Y^T & T^T \\ T & M+X\mathfrak{S}X^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

### III. SYSTEMES DESCRIPTEURS T-S

Soit la classe des systèmes descripteurs T-S, incertains avec perturbations externes, représentée par :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) \{E_k + \Delta E_k(t)\} \dot{x}(t) = \\ \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + W_i \gamma(t) \} \end{aligned} \quad (3)$$

où  $l$  et  $r$  représentent respectivement le nombre de règles floues dans les parties gauche et droite de l'équation d'état.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur des perturbations externes.  $z(t) \in \mathbb{R}^f$  est le vecteur des variables de prémisses.  $v_k(z(t))$  et  $h_i(z(t))$  sont les fonctions d'appartenance positives associées aux règles floues. Ces fonctions vérifient les propriétés d'une somme convexe  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et  $\sum_{k=1}^l v_k(z(t)) = 1$ .  $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $W_i \in \mathbb{R}^{n \times d}$  sont des matrices constantes.  $\Delta E_k(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont les matrices d'incertitudes. On suppose que celles-ci peuvent se réécrire telles que:  $\Delta A_i(t) = H_{ai} \Delta_{ai}(t) N_{ai}$ ,  $\Delta B_i(t) = H_{bi} \Delta_{bi}(t) N_{bi}$  et  $\Delta E_k(t) = H_{ek} \Delta_{ek}(t) N_{ek}$  où  $H_{ai}$ ,  $H_{bi}$ ,  $H_{ek}$ ,  $N_{ai}$ ,  $N_{bi}$ , et  $N_{ek}$  sont des matrices constantes,  $\Delta_{ai}(t)$ ,  $\Delta_{bi}(t)$  et  $\Delta_{ek}(t)$  sont des matrices contenant une fonction dont l'évolution est inconnue dans le temps mais majorées telles que:  $\Delta_{ai}^T(t) \Delta_{ai}(t) \leq I$ ,  $\Delta_{bi}^T(t) \Delta_{bi}(t) \leq I$ ,  $\Delta_{ek}^T(t) \Delta_{ek}(t) \leq I$ .

*Remarque :* On suppose les modèles descripteurs représentés par (3) proprement définis (impulse free) [11].

On considère la loi de commande non-PDC :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z(t)) v_k(z(t)) S_{jk} (X_z^1)^{-1} x(t) \quad (4)$$

Où  $S_{jk}$  et  $X_z^1$  sont les matrices à synthétiser. Notons que la structure d'interconnexion de la matrice  $X_z^1$  sera définie dans la preuve du théorème 1.

D'une manière usuelle pour les systèmes descripteurs, on considère le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ .

En combinant (4) et (3), la dynamique de la boucle fermée s'écrit :

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hv}) \tilde{x}(t) + \tilde{W}_h \tilde{\gamma}(t) \quad (5)$$

$$\text{Avec } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h + \Delta A_h(t) & -E_v - \Delta E_v(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h + \Delta B_h(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{W}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ W_h^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \\ \tilde{K}_{hv} = \begin{bmatrix} S_{hv} (X_z^1)^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'objectif est maintenant de proposer des conditions de stabilité LMI permettant l'atténuation des perturbations externes et la détermination des gains de retour d'état stabilisant (5).

### IV. CONDITIONS DE STABILITE ET FORMULATION LMI

Dans cette section, la stabilité des systèmes (5) est considérée sans tenir compte des perturbations externes, i.e.  $\gamma(t) = 0$ . La solution proposée pour ce problème de stabilité est résumée dans le théorème suivant.

**Théorème 1 :** Soient  $\forall z(t)$ ,  $\zeta \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $\psi \in \{1, \dots, l-1\}$ ,  $\dot{h}_\zeta(z(t)) \geq \phi_\zeta$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$ . Le descripteur T-S incertain en boucle fermée (5) (avec  $\gamma(t) = 0$ ) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe les matrices  $X_{jk}^1 = X_{jk}^{1T} > 0$ ,  $X_{ij}^3$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $S_{jk}$ , les scalaires  $\tau_{ijk}^1 > 0$ ,  $\tau_{ijk}^2 > 0$ ,  $\tau_{ijk}^3 > 0$  et  $\tau_{ijk}^4 > 0$ , tels que, pour tout  $i, j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$  :

$$\Phi_{ijk} < 0 \quad (6)$$

avec

$$\Phi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Omega_{11ijk} & & & & & \\ N_{ai} X_{jk}^1 & -\tau_{ijk}^1 I & & & & \\ N_{bi} S_{jk} & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & & & \\ N_{ek} X_{ij}^3 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^3 I & & \\ \Omega_{51ijk} & 0 & 0 & 0 & \Omega_{55ijk} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ek} X_{ij}^4 & -\tau_{ijk}^4 I \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\text{et où } \Omega_{51ijk} = X_{ij}^{4T} + A_i X_{jk}^1 - E_k X_{ij}^3 - B_i S_{jk},$$

$$\Omega_{11ijk} = X_{ij}^3 + X_{ij}^{3T} - \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{j\psi}^1) \right),$$

$$\begin{aligned} \Omega_{55ijk} = & -X_{ij}^{4T} E_k^T - E_k X_{ij}^4 + \tau_{ijk}^1 H_{ai} H_{ai}^T \\ & + \tau_{ijk}^2 H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{ijk}^3 H_{ek} H_{ek}^T + \tau_{ijk}^4 H_{ek} H_{ek}^T. \end{aligned}$$

*Preuve:* On considère la FLF suivante :

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E} (X_z)^{-1} \tilde{x}(t) \quad (7)$$

où  $X_z$  est une matrice non singulière et :

$$\tilde{E} X_z^{-1} = X_z^{-T} \tilde{E} > 0 \quad (8)$$

$$\text{On pose } X_z = \begin{bmatrix} X_z^1 & X_z^2 \\ X_z^3 & X_z^4 \end{bmatrix}, \quad (8) \quad \text{implique } X_z^2 = 0 \quad \text{et}$$

$$X_z^1 = X_z^{1T} \geq 0$$

Afin d'alléger les écritures, le temps  $t$  sera omis dans la suite de cet article.

Le système en boucle fermée (5) est stable si:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \dot{\tilde{x}}^T \tilde{E} X_z^{-1} \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{E} X_z^{-1} \dot{\tilde{x}} + \tilde{x}^T \tilde{E} \dot{X}_z^{-1} \tilde{x} < 0 \quad (9)$$

En considérant (8), (9) peut-être réécrite:

$$\left( \tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz} \right)^T X_z^{-1} + X_z^{-T} \left( \tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz} \right) + \tilde{E} \dot{X}_z^{-1} < 0 \quad (10)$$

De plus, en considérant (8) et en multipliant (10) à gauche et à droite respectivement par  $X_z^T$  et  $X_z$ , on obtient :

$$X_z^T \left( \tilde{A}_{hv}^T - \tilde{K}_{hvz}^T \tilde{B}_h^T \right) + \left( \tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz} \right) X_z + \tilde{E} X_z \dot{X}_z^{-1} X_z < 0 \quad (11)$$

Or:

$$\begin{aligned} -\dot{X}_z^{-1} &= \frac{d}{dt} \{ X_z^{-1} X_z \} X_z^{-1} - \dot{X}_z^{-1} \\ &= \dot{X}_z^{-1} X_z X_z^{-1} + X_z^{-1} \dot{X}_z X_z^{-1} - \dot{X}_z^{-1} \\ &= X_z^{-1} \dot{X}_z X_z^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

D'où (11) devient:

$$X_z^T \left( \tilde{A}_{hv}^T - \tilde{K}_{hvz}^T \tilde{B}_h^T \right) + \left( \tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz} \right) X_z - \tilde{E} \dot{X}_z < 0 \quad (13)$$

C'est-à-dire, en développant avec les matrices contenues dans (5) :

$$\begin{bmatrix} X_z^{3T} + X_z^3 - \dot{X}_z^1 & (*) \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{21} &= X_z^{4T} + A_h X_z^1 - E_v X_z^3 - B_h S_{hv} + H_{ah} \Delta_{ah} N_{ah} X_z^1 \\ &\quad - H_{ev} \Delta_{ev} N_{ev} X_z^3 - H_{bh} \Delta_{bh} N_{bh} S_{hv} \\ \text{et } \Gamma_{22} &= -X_z^{4T} E_v^T - E_v X_z^4 - X_z^{4T} N_{ev}^T \Delta_{ev}^T H_{ev}^T - H_{ev} \Delta_{ev} N_{ev} X_z^4. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1 et son corollaire, (14) peut-être réécrite :

$$\begin{bmatrix} \Theta - \dot{X}_z^1 & (*) \\ X_z^{4T} + A_h X_z^1 - E_v X_z^3 - B_h S_{hv} & \Xi \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi &= -X_z^{4T} E_v^T - E_v X_z^4 + \tau_{hz}^2 H_{ah} H_{ah}^T + \tau_{hhv}^2 H_{bh} H_{bh}^T \\ &\quad + \tau_{zv}^4 X_z^{4T} N_{ev}^T N_{ev} X_z^4 + \tau_{zv}^3 H_{ev} H_{ev}^T + \tau_{zv}^4 H_{ev} H_{ev}^T \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Theta &= X_z^{3T} + X_z^3 + \tau_{hz}^{-1} X_z^{1T} N_{ah}^T N_{ah} X_z^1 + \\ &\quad \tau_{hhv}^2 S_{hv}^T N_{bh}^T N_{bh} S_{hv} + \tau_{zv}^3 X_z^{3T} N_{ev}^T N_{ev} X_z^3 \end{aligned}$$

En appliquant successivement le complément de Schur [22], (15) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} - \dot{X}_z^1 & & & & & \\ N_{ah} X_z^1 & -\tau_{hz}^{-1} I & & & & \\ N_{bh} S_{hv} & 0 & -\tau_{hhv}^2 I & & & \\ N_{ev} X_z^3 & 0 & 0 & -\tau_{zv}^3 I & & \\ \Lambda_{51} & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ev} X_z^4 & -\tau_{zv}^4 I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \Lambda_{11} &= X_z^3 + X_z^{3T}, \quad \Lambda_{51} = X_z^{4T} + A_h X_z^1 - E_v X_z^3 - B_h S_{hv} \text{ et} \\ \Lambda_{55} &= -X_z^{4T} E_v^T - E_v X_z^4 + \tau_{hz}^2 H_{ah} H_{ah}^T + \\ &\quad \tau_{hhv}^2 H_{bh} H_{bh}^T + \tau_{zv}^3 H_{ev} H_{ev}^T + \tau_{zv}^4 H_{ev} H_{ev}^T \end{aligned}$$

Notons que la structure d'interconnexion minimale pour (16) est une triple somme ( $hhv$ ). Afin de proposer des conditions de stabilité le moins pessimiste sous forme LMI, on choi

$$\begin{aligned} X_z^1 &= X_{hv}^1 = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j v_k X_{jk}^1, & X_z^3 &= X_{hh}^3 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j X_{ij}^3, \\ X_z^4 &= X_{hh}^4 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j X_{ij}^4, & \tau_{hz}^1 &= \tau_{hhv}^1, \quad \tau_{zv}^3 = \tau_{hhv}^3 \text{ et } \tau_{zv}^4 = \tau_{hhv}^4. \end{aligned}$$

Dans ce cas, avec les propriétés de sommes convexes :

$$\dot{X}_{hv}^1 = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j v_k \left( \sum_{\xi=1}^r \dot{h}_\xi X_{\xi k}^1 + \sum_{\psi=1}^l \dot{v}_\psi X_{j\psi}^1 \right) \quad (17)$$

De plus :

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi(z(t)) \text{ et } \dot{v}_l(z(t)) = -\sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi(z(t)) \quad (18)$$

D'où (17) peut s'écrire sous la forme relâchée :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{hv}^1 &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j v_k \left( \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi X_{\xi k}^1 \right) + \dot{h}_r X_{rk}^1 + \left( \sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi X_{j\psi}^1 \right) + \dot{v}_l X_{jl}^1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j v_k \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

*Remarque :* Pour tout  $i=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$ , les fonctions non linéaires  $h_i(z(t))$  et  $v_k(z(t))$  doivent être de classe  $C^1$ , ce qui est le cas pour les modèles flous obtenus par découpages en secteurs non-linéaires [2].

Soit, pour tout  $i=1, \dots, r-1$  et  $k=1, \dots, l-1$ ,  $\dot{h}_i(z(t)) \geq \phi_i$  et  $\dot{v}_k(z(t)) \geq \theta_k$ , on peut écrire:

$$-\dot{X}_{hv}^1 \leq -\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j v_k \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right) \quad (20)$$

De fait, considérant (16) et (20), on obtient:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i h_j v_k \Phi_{ijk} < 0 \quad (21)$$

Avec, pour tout  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, l$  et  $k=1, \dots, l$ ,  $\Phi_{ijk}$  donnés en (6).

De manière suffisante, (21) est vérifiée si (6) l'est.

## V. SYNTHÈSE DE CORRECTEUR ROBUSTE AVEC ATTENUATION DES PERTURBATIONS

Les conditions de stabilité proposées par le théorème 1 ne prennent pas en compte le cas où  $\gamma(t) \neq 0$  dans (3). Dans cette section, l'objectif est de fournir des conditions permettant l'atténuation de ces perturbations externes. Pour ce faire, nous considérons le critère  $H_\infty$  donné par [23]:

$$\int_{t_0}^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{M} \tilde{x}(t) - \rho^2 \int_{t_0}^{t_f} \tilde{\gamma}^T(t) \tilde{\gamma}(t) \leq 0 \quad (22)$$

où  $t_0$  et  $t_f$  représentent respectivement le temps initial et le temps final,  $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > 0$  est une matrice de pondération et,  $\rho > 0$  est un scalaire représentant le taux d'atténuation.

Les conditions de stabilité pour le système en boucle fermée (5) avec perturbations externes sont résumées dans le théorème suivant :

**Théorème 2 :** Soient  $\forall z(t)$ ,  $\zeta \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $\psi \in \{1, \dots, l-1\}$ ,  $\dot{h}_\zeta(z(t)) \geq \phi_\zeta$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$ . Le descripteur T-S incertain en boucle fermée (5) avec  $\gamma(t) \neq 0$  est globalement asymptotiquement stable, s'il existe les matrices  $X_{jk}^1 = X_{jk}^{1T} > 0$ ,  $X_{ij}^3$ ,  $X_{ij}^4$  et  $S_{jk}$ , les scalaires  $\tau_{ijk}^1 > 0$ ,  $\tau_{ijk}^2 > 0$ ,  $\tau_{ijk}^3 > 0$ ,  $\tau_{ijk}^4 > 0$  et  $\eta > 0$  tels que, pour tout  $i, j=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$  :

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \hline X_{jk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M^{-1} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^T & 0 & 0 & \eta I & \end{array} \right] < 0 \quad (23)$$

avec les  $\Phi_{ijk}$  définies au théorème 1.

*Preuve:* Le système perturbé en boucle fermée (5) est stable sous la performance  $H_\infty$  (22) si :

$$\dot{V}(\tilde{x}) + \tilde{x}^T \tilde{M} \tilde{x} - \rho^2 \tilde{\gamma}^T(t) \tilde{\gamma}(t) < 0 \quad (24)$$

C'est-à-dire:

$$\left[ \begin{array}{cc} \Upsilon_{11hhvz} + M & (*) \\ \tilde{W}_h^T X_z^{-1} & -\rho^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (25)$$

avec

$$\Upsilon_{11hhvz} = (\tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz})^T X_z^{-1} + X_z^{-T} (\tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz}) + \tilde{E} \dot{X}_z^{-1}$$

En multipliant à gauche et à droite (25) respectivement par  $\text{diag}[X_z^T \ I]$  et  $\text{diag}[X_z \ I]$ , on obtient:

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( X_z^T (\tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz})^T + (\tilde{A}_{hv} - \tilde{B}_h \tilde{K}_{hvz}) X_z \right) & (*) \\ \left( X_z^T \tilde{E} \dot{X}_z^{-1} X_z + X_z^T \tilde{M} X_z \right) & \\ \tilde{W}_h^T & -\rho^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (26)$$

A partir de (12), et en suivant le même chemin que pour la preuve du théorème 1, on obtient les conditions données par le théorème 2. ■

*Remarque:* Les conditions établies aux théorèmes 1 et 2 restent conservatives du fait de la structure d'interconnexion en triple somme de (21). L'objet de cet article n'est pas de s'attaquer à ce problème pour lequel la littérature abonde. Néanmoins, des conditions relâchées peuvent être évidemment obtenues sur la base des conditions (6) par l'application de lemmes de relaxation tels que celui présenté dans [23].

## VI. EXEMPLE DE SIMULATION

On considère le descripteur non linéaire perturbé suivant:

$$E(x(t)) \dot{x}(t) = A(x(t)) x(t) + B(x(t)) u(t) + W \gamma(t) \quad (27)$$

$$\text{Avec } E(x(t)) = \begin{bmatrix} -5 & 5 \sin(x_1(t)) \\ \cos^2(x_2(t)) & -4 \end{bmatrix},$$

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \cos(x_1(t)) \\ -2 & \frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} \end{bmatrix},$$

$$B(x_2(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tanh^2(x_2(t)) \end{bmatrix} \text{ et } W = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A partir du modèle non linéaire (27), un modèle T-S peut être obtenu par découpage en secteurs non linéaires [2]. Ainsi, un modèle exacte peut-être obtenu en considérant deux non linéarités dans la partie gauche de (27) ( $\sin(x_1)$  et  $\cos^2(x_2)$ ) conduisant à  $l=4$ ) et trois non linéarités dans sa partie droite ( $\cos(x_1)$ ,  $\sin(x_2)$  et  $\cos(x_2)$  conduisant à  $r=8$ ). Dans ce cas, 144 conditions LMI doivent être vérifiées ce qui, à l'aide des solveurs et ordinateurs actuels conduit à un coût de calcul considérable voir à l'impossibilité d'obtenir une solution. Une

manière de réduire le nombre de contraintes LMI est de considérer certains termes non linéaires comme incertains. A titre d'exemple, dans (27) l'ensemble des termes non linéaires dépendant de la variable d'état  $x_2(t)$  peuvent être considérés comme incertains. On considère alors:

$$\sin(x_1) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}(-1) + \frac{\sin(x_1) + 1}{2}(1) \quad (28)$$

$$\cos(x_1) = \frac{1 - \cos(x_1)}{2}(-1) + \frac{\cos(x_1) + 1}{2}(1) \quad (29)$$

Et les termes à réécrire sous forme d'incertitudes tels que:

$$\frac{\sin(x_2)}{x_2} = \frac{1 - \lambda}{2} + \frac{1 + \lambda}{2} \Delta_1(t) \quad (30)$$

$$\cos^2(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta_2(t) \quad (31)$$

$$\tanh^2(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta_3(t) \quad (32)$$

où  $\lambda$  est la valeur minimale de  $\sin c(x_2)$ .  $\Delta_1(t)$ ,  $\Delta_2(t)$  et  $\Delta_3(t)$  sont des fonctions bornées telles que  $\Delta_1^2(t) \leq 1$ ,  $\Delta_2^2(t) \leq 1$  et  $\Delta_3^2(t) \leq 1$ .

A partir de (28), (29), (30), (31) et (32), un représentant T-S du descripteur incertain avec perturbations externes (27) est donné par :

$$\sum_{k=1}^2 v_k [E_k + \Delta E_k] \dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i \{ [A_i + \Delta A_i] \dot{x} + [B_i + \Delta B_i] u + W_i \gamma(t) \} \quad (33)$$

$$\text{avec: } E_1 = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0.5 & -4 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0.5 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & \frac{1-\lambda}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & \frac{1-\lambda}{2} \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad W_1 = W_2 = W,$$

$$\Delta E(t) = H_e \Delta_1(t) N_e, \quad \Delta A(t) = H_a \Delta_2(t) N_a,$$

$$\Delta B(t) = H_b \Delta_3(t) N_b, \quad N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\lambda}{2} \end{bmatrix},$$

$$N_b = -0.5, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_e = H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et les fonctions}$$

$$\text{d'appartenances } h_1(z) = \frac{1 - \cos(x_1)}{2}, \quad h_2(z) = \frac{\cos(x_1) + 1}{2},$$

$$v_1(z) = \frac{1 - \sin(x_1)}{2}, \quad v_2(z) = \frac{\sin(x_1) + 1}{2}.$$

*Remarque :* Une méthode permettant la détermination des bornes inférieures de  $\dot{h}_\xi(z(t))$  et  $\dot{v}_\psi(z(t))$  données

respectivement par  $\phi_\xi$  et  $\theta_\psi$  a été proposée dans [6].

Les solutions des théorèmes 1 et 2 sont obtenues à l'aide de MATLAB LMI Toolbox [19] pour  $\theta_1 = -5$ ,  $\phi_1 = -3.5$ ,  $M = \text{diag}[2.5 \ 2]$ . La figure 1 présente la stabilisation du descripteur (27) et du signal de commande dans le cas où les perturbations externes sont nulles, c'est-à-dire  $\gamma(t) = 0$  (théorème 1), avec la condition initiale  $x(0) = [1.7 \ 1.5]^T$ . Partant de la même condition initiale, la figure 2 présente la stabilisation du descripteur (27) soumis aux perturbations externes  $\gamma(t) = 0.5 \sin(\pi t)$  et l'évolution du signal de commande. Notons que, dans ce cas, le théorème 2 permet de garantir un taux d'atténuation des perturbations externes  $\rho = 0.7545$ .

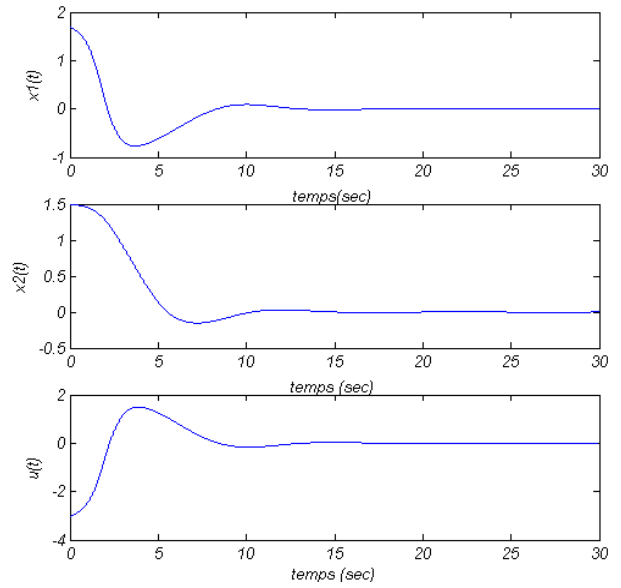


Figure 1: Résultat de simulation (théorème 1).

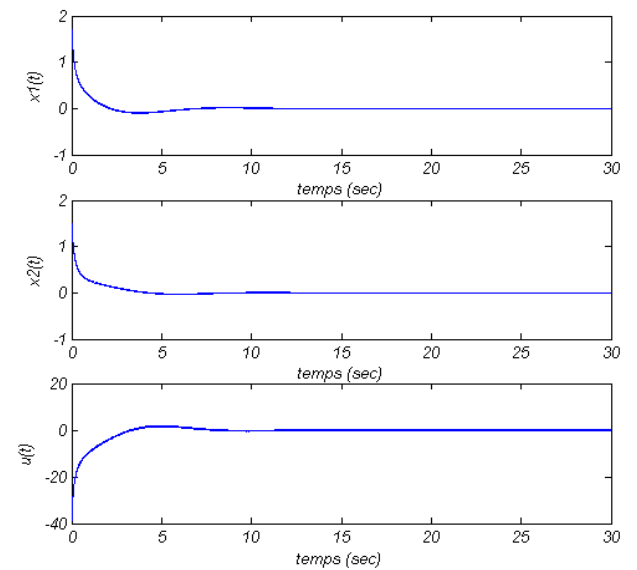


Figure 2: Résultat de simulation (théorème 2).

## VII. CONCLUSION

Dans cet article, de nouvelles conditions de stabilité LMI pour la classe des descripteurs incertains de type T-S, sans et avec perturbations externes, ont été proposées. Celles-ci sont basées sur l'utilisation d'une FLF et d'une loi de commande non PDC (Lyapunov dépendante). Ces résultats sont moins pessimistes par rapport aux conditions de stabilité quadratiques puisqu'elles ne nécessitent plus la recherche de matrices communes pour l'ensemble des contraintes LMI. Finalement, ces approches ont montré leur efficacité au travers d'un exemple académique.

## VIII. REMERCIEMENTS

Les auteurs souhaitent remercier le GIS 3SGS pour son soutien dans le cadre du projet COSMOS ainsi que le Dr Arianna Grather pour ses remarques constructives.

## IX. REFERENCES

- [1] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. on System Man and Cybernetics*, Vol. 15 (1), 1985, pp. 116-132.
- [2] K. Tanaka, H.O. Wang, "Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach", Wiley, New York, 2001.
- [3] H.O. Wang, K. Tanaka, M.F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, February 1996.
- [4] K. R. Lee, E. T. Jeung, H. B. Park, "Robust Fuzzy  $H_\infty$  Control for Uncertain Nonlinear Systems via State Feedback: an LMI Approach" *Fuzzy Sets and Systems*. Pp. 123-134, 2001.
- [5] Z. Ji, Y. Zhou, Y. Shen, "Stabilization of a Class of Fuzzy Control Systems via Piecewise Fuzzy Lyapunov Function Approach", in *Proc. ACC'07, American Control Conference, USA, July 11-13, 2007*.
- [6] K. Tanaka, T. Hori, and H.O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
- [7] M. Johansson, A. Rantzer, K.E. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, Vol.7. No 6, pp. 713-722, 1999.
- [8] T.M. Guerra, L. Vermeiren., "LMI based relaxed nonquadratic stabilizations for non-linear systems in the Takagi-Sugeno's form", *Automatica*, Vol. 40 (5), pp. 823-829, 2004
- [9] B.J. Rhee, S. Won, "A new Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211-1228, 2006.
- [10] G. Feng, "A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems," *IEEE Trans Fuzzy Systems*, vol. 14, no. 5, pp.676- 697, 2006.
- [11] Dai L. Singular control systems. in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1989, pp.12-45.
- [12] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, H.O. Wang, "Fuzzy descriptor systems: Stability Analysis and Design Via LMIs" in *Proc. ACC'09, American Control conference*, San Diego, California, June 1999.
- [13] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang, "Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control" *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 8 (4), 2000, pp.442-452 .
- [14] K. Guelton, S. Delprat, T.M. Guerra, "An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi-Sugeno unknown-input observer in the descriptor form," *Control Engineering Practice*, In press 2008, doi:10.1016/j.conengprac.2008.04.002.
- [15] B.P. Ma, J. Sun, "Robust stabilization of uncertain T-S fuzzy descriptor systems," in *Proc. 3<sup>rd</sup> IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, China, 2004.
- [16] T. Bouarar, K. Guelton, B Mansouri, N. Manamanni, "LMI Stability Condition for Uncertain Descriptors", in *Proc. FUZZ-IEEE, Int. Conf. on fuzzy systems*, London, UK, July 2007.
- [17] J. Yoneyama, A. Ichikawa, " $H_\infty$ -Control for Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor Systems", in *Proc. IEEE Int. Conf. Syst. Man Cybern*, Tokyo, Japan, 1999, Vol. 3, pp 28-33.
- [18] T. Bouarar, K. Guelton, N. Manamanni, "LMI Based  $H_\infty$  Controller Design for Uncertain Takagi-Sugeno Descriptors Subject to External Disturbances", *3<sup>rd</sup> IFAC Workshop on advanced Fuzzy/Neural control*, Valenciennes , France, October 2007.
- [19] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali, "LMI Control Toolbox for Use with MATLAB", *The Mathworks Partner Series. 1995*
- [20] T.M. Guerra, M. Bernal, A. Kruzewski, M. Afroun "A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models," in *Proc. 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007.
- [21] K. Zhou, P.P. Khargonedkar, "Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *Syst. Control Letters*, Vol. 10, 1988, pp. 17-20.
- [22] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [23] X. Liu, Q. Zhang. "New approaches to H-infinity controller design based on fuzzy observers for fuzzy TS systems via LMI", *Automatica*, Vol. 39(9), pp.1571-1582, 2003.