

Две модели популяции в медленной или быстрой периодической среде

J. Math. Biol. 80 (2020) 1021-1037
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

резюме

Мы решаем две проблемы в динамике населения в медленной или быстрой периодической среде. Сначала мы получаем приближение для вероятности не исчезновения линейного процесса рождения и смерти с периодическими коэффициентами, когда период большой или маленький. Если уровень рождаемости ниже, чем смертность в течение части периода, и если период стремится к бесконечности, то вероятность не исчезновения сходится к прерывистому пределу, связанному с «уткой» в медленно-быстрой системе.

Во-вторых, мы изучаем нелинейную эпидемическую модель типа SIR, когда скорость контакта быстро колеблется. Окончательный размер эпидемии близок к тому, который был получен при замене частоты контакта на ее среднее значение. Аппроксимация поправки аналитически рассчитывается, когда воспроизводимость эпидемии близка к 1. Поправка, которая может быть положительной или отрицательной, пропорциональна как периоду колебаний, так и первоначальной доле зараженных людей.

1. Введение

В работе, опубликованной некоторое время назад (Bacaër, 2015), мы изучали предел модели динамики популяции, стохастической модели SIS, в периодической среде, когда период стремится к 0 или бесконечности. Здесь мы предлагаем аналогичным образом изучить две, по-видимому, более простые модели: линейный процесс рождения и смерти и детерминистическую эпидемическую модель типа SIR. Эти две модели можно рассматривать как приближения одной стохастической модели SIR. Процесс рождения и смерти служит приближением в начале эпидемии. Новые инфекции играют роль рождений. Исцеления играют роль смерти. Детерминированная модель используется в качестве приближения, когда число инфицированных людей уже достаточно велико.

Поэтому давайте сначала рассмотрим линейный процесс рождения и смерти в переменной среде с уровнем рождаемости $a(t)$ и смертность $b(t)$, Процесс начинается в $t = t_0$ с одним человеком. Вероятность не исчезновения

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

является ли интеграл с знаменателем конечным или бесконечным (Гани, 1975, с. 220). Это относится, в частности, к случаю, когда функции $a(t)$ а также $b(t)$ являются периодическими с тем же периодом T . Мы предполагаем

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T).$$

$A(\tau)$ а также $B(\tau)$ являются периодическими функциями периода 1. Рассмотрим средства

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

$p(t_0)$ тождественно равен 0, если $\bar{a} \leq \bar{b}$, Это периодическая функция периода T , строго положительная и строго меньше 1, если $\bar{a} > \bar{b}$, См. (Васаёг, 2007, §5.2) и (Васаёг and Ait Dads, 2014). Теперь мы предполагаем, $\bar{a} > \bar{b}$, Это сверхкритический случай.

Формула (1) упрощается, когда период T либо очень маленький, либо очень большой, как недавно отмечалось (Carmona and Gandon, 2019). С $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ постоянная и если $T \rightarrow 0$, у нас есть $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$, С $t_0/T = \tau_0$ постоянная и если $T \rightarrow +\infty$, у нас есть $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ по крайней мере для определенных значений τ_0 с $A(\tau_0) > B(\tau_0)$,

Цель ниже состоит в том, чтобы уточнить эти наблюдения, предложив приближение вероятности вымирания. Предел $T \rightarrow 0$ самое простое: у нас есть

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T)\right\}. \quad (2)$$

В случае $T \rightarrow +\infty$, мы предполагаем, что функции $A(\tau)$ а также $B(\tau)$ являются регулярными (скажем, дифференцируемыми с непрерывной производной) и рассмотрим два случая:

- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$ (крайне сверхкритический случай);
- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, \tau_1 \cup]\tau_2, 1]$ с $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ а также $A(\tau) < B(\tau) \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[$ (слабо сверхкритический случай).

Без ограничения общности можно далее предположить, что во втором случае $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$, Существует тогда уникальный $\tau^* \in]0, \tau_1[$ с

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Мы показываем в разделе 2, что в первом случае для $\tau_0 \in [0, 1]$ и во втором случае для $\tau_0 \notin]\tau^*, \tau_2[$,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

Во втором случае с $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Эта последняя вероятность быстро экспоненциально сходится к 0, когда $T \rightarrow +\infty$, В конечном счете, поэтому существует разрыв в $\tau_0 = \tau^*$, Предел равен нулю не только в $] \tau_1, \tau_2[$ но и в $] \tau^*, \tau_2[$, Это связано с феноменом «утки» в медленно-быстрой системе, как описано в разделе 2.6.

Далее рассмотрим детерминированную модель эпидемии SIR. Мы определяем

- N : предполагаемая постоянная численность населения,
- $S(t)$: количество здоровых людей в то время t ,
- $I(t)$: количество людей, зараженных,
- $R(t)$: количество людей, удаленных из цепи передачи, потому что они исцелены и иммунизированы,
- $a(t)$: скорость инфекционного контакта,
- b : скорость излечения.

У нас есть $N = S(t) + I(t) + R(t)$, Предполагается, как и в упрощенной модели Кермака и МакКендрика (см., Например, (Hillion, 1986, p. 75)), что

$$\frac{dS}{dt} = -a(t) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t) \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Таким образом, на каждого здорового человека влияет соотношение I/N инфицированных людей в общей популяции, другими словами, «среднее поле», а не его соседство в конкретной структуре контактов.

В недавней работе (Васаёт, 2019) нас интересовало влияние периодических колебаний малой амплитуды скорости контакта на конечный размер эпидемии. Мы сосредоточимся здесь на случае, когда амплитуда произвольна, но когда период колебаний невелик по сравнению с типичной продолжительностью эпидемии. Для эпидемии, которая будет длиться несколько недель, это будет означать, например, быстрое чередование дня и ночи. Для эпидемии, которая будет длиться несколько месяцев, это будет представлять собой чередование рабочих дней и выходных, особенно в случае эпидемий в школах. Для эпидемии, которая будет длиться несколько лет или даже несколько десятилетий, это будет представлять собой чередование зим и лет.

Период колебаний составляет $T > 0$, Этот параметр должен сходиться к 0. Мы предполагаем, что

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

с

- $\bar{a} > 0$,
- ϕ : непрерывная функция по частям с

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

$a(t)$ таким образом, периодическая функция периода T , со средним \bar{a} , Возьмите в качестве начальных условий в начале эпидемии

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

с $0 < i < N$,

Раздел 3.1 показывает моделирование этой модели. Из примеров видно, что окончательный размер эпидемии удивительно близок к тому, который был получен при замене уровня контакта на его среднее значение. В разделе 3.2 мы предлагаем объяснение этой близости, выдвигая некоторые дополнительные гипотезы о параметрах модели, в частности, предполагая, что первоначальная доля инфицированных людей мала и что воспроизводимость эпидемии остается близкой к 1. Мы получаем приближительная формула для корректировки к окончательному размеру эпидемии. Эта поправка пропорциональна как периоду колебаний, так и первоначальной доле зараженных людей, следовательно, ее малости.

2 Процесс рождения и смерти

2.1 Предварительный расчет

Давайте сначала посмотрим на линейный процесс рождения и смерти. Рассмотрим интеграл по знаменателю формулы (1)

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

По определению имеем

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

У нас есть $t_0/T = \tau_0$, Мы определяем $u = t/T$ а также $v = s/T$, Итак, используя периодичность функций $A(\tau)$ а также $B(\tau)$, мы получаем

$$\begin{aligned}
J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{\tau_0+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du.
\end{aligned}$$

У нас есть таким образом

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2 Предел $T \rightarrow 0$

С приближением $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ за $x \rightarrow 0$ в множитель перед интегралом, а проще $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ в интеграле получаем

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

У нас есть

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Мы выводим, что

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

С $p(t_0) = 1/(1 + J)$, выводим формулу (2).

2.3 Предел $T \rightarrow +\infty$: сверхкритический случай

Вернемся к формуле (7). Интеграл имеет вид

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

с

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

У нас есть

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Сначала мы предполагаем $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$, У нас тогда $F'(u) > 0 \forall u \in [0, 1]$, F достигает своего минимума в $u = 0$ а также $F(0) = 0$, Более того, $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ если $u \rightarrow 0$, с $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ а также $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$, В противном случае, $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ если $u \rightarrow 0$, с $\psi_0 = B(\tau_0)$ а также $\psi_1 = B'(\tau_0)$, Согласно теореме Эрдли (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

с $c_0 = \psi_0/\phi_0$ а также $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$. Потому что $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ экспоненциально мала, формула (7) дает

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

С $p(t_0) = 1/(1 + J)$, выводим формулу (4).

2.4 Слабокритический случай

Теперь мы предполагаем, $\exists \tau_1, \exists \tau_2$ с $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ а также

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \quad \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \quad \forall \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Потому что $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ у нас есть две возможности:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

Мы предполагаем, что первое неравенство верно, даже если это означает смещение функций во времени $A(\tau)$ а также $B(\tau)$,

Существует тогда уникальный $\tau^* \in [0, \tau_1]$ с

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

Действительно, если

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

у нас есть $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, \tau_1]$, Более того, $h(0) > 0$ согласно первому неравенству (9) и $h(\tau_1) < 0$, Так что есть уникальный $\tau^* \in [0, \tau_1]$ с $h(\tau^*) = 0$,

Давайте сначала рассмотрим случай, когда $0 < \tau_0 < \tau_1$, функция $F(u)$ увеличивается, если $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$, Уменьшается, если $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$, Это снова растет, если $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$, функция $F(u)$ поэтому имеет локальный минимум в $\tau_2 - \tau_0$, У нас также есть $F(0) = 0$,

В случае $\tau_0 \in]0, \tau^*[$, у нас есть $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$, $u = 0$ остается общий минимум $F(u)$ на интервале $[0, 1]$, Асимптотическое развитие (8) остается в силе и формула (4) также.

Если, с другой стороны $\tau \in]\tau^*, \tau_1[$, у нас есть $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$, Общий минимум $F(u)$ на интервале $[0, 1]$ является $u = \tau_2 - \tau_0$, $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$, $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$ а также

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}, \quad T \rightarrow +\infty,$$

по методу Лапласа (Ovaert and Verley, 1997). У нас есть таким образом

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

а также $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ если $T \rightarrow +\infty$, что дает формулу (5).

Теперь рассмотрим случай, когда $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$, $F(u)$ является убывающей функцией на интервале $[0, \tau_2 - \tau_0]$ затем возрастающая функция в течение интервала $[\tau_2 - \tau_0, 1]$, Его минимум в $[0, 1]$ поэтому достигается в $u = \tau_2 - \tau_0$, как и в предыдущем случае. Таким образом, формула (5) остается в силе.

Наконец рассмотрим случай, когда $\tau_2 < \tau_0 < 1$, $F(u)$ является возрастающей функцией в течение интервала $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ затем убывающая функция на интервале $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$, то возрастающая функция на интервале $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$, Следовательно, эта функция имеет локальный минимум в $1 + \tau_2 - \tau_0$ а также

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

согласно первому неравенству (9). Общий минимум в $[0, 1]$ следовательно, достигается при $u = 0$. Таким образом, применяется формула (4).

2.5 Пример

Мы принимаем $B(\tau) = \bar{b} > 0$ постоянная и

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

с $\bar{a} > \bar{b}$ а также $0 \leq k \leq 1$, Сверхкритический случай соответствует $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$, Если наоборот $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ то два решения в $[0, 1]$ уравнения $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ находятся

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

Порог τ^* это решение в $[0, \tau_1]$ уравнения

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

Формула (2) дает

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right), \quad T \rightarrow 0.$$

В случае $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ или в случае с $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ а также $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ тогда формула (4) дает

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right), \quad T \rightarrow +\infty.$$

В случае с $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ а также $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ Формула (5) дает

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp \left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi} \right], \quad T \rightarrow +\infty.$$

Давайте возьмем, в частности, $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$ а также $k = 0,5$, У нас тогда $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$, На рисунке 1 показаны результаты для двух значений периода: $T = 0,5$ и $T = 50$. Вероятность не исчезновения $p(t_0)$, определяемая формулой (1), оценивается путем численной интеграции с программным обеспечением Scilab. Мы видим, что приближенные формулы (2) и (4) дают лучшие приближения. Обратите внимание, что для $T \rightarrow +\infty$, приближение (4) немного отклоняется от $p(t_0)$ вблизи минимума $p(t_0)$,

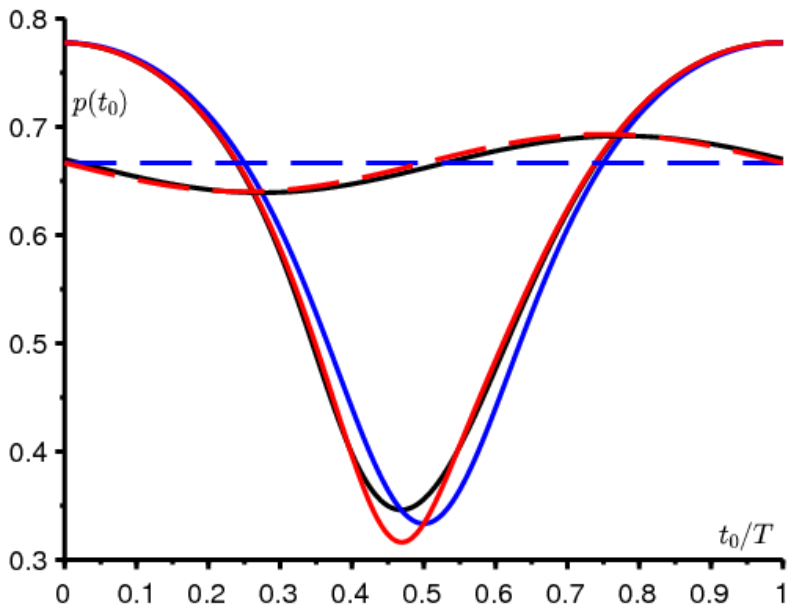


Рисунок 1. Два примера: $T = 0,5$ (пунктир) и $T = 50$ (сплошные линии). Вероятность не исчезновения $p(t_0)$, заданный формулой (1), выделен черным. Пунктирная линия: приближительная формула (2) красного цвета и аппроксимация $1 - \bar{b}/\bar{a}$ в синем. Сплошные линии: приближенная формула (4) красного цвета и приближение $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ в синем.

Давайте возьмем сейчас $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$, $k = 0,75$ а также $T = 100$, у нас тогда $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$, $\tau^* \simeq 0,347$, $\tau_1 \simeq 0,424$ а также $\tau_2 \simeq 0,576$, Различные приближительные формулы представлены на фиг.2, в частности формула (5) зеленым цветом. Вероятность не исчезновения сходится к разрывному пределу. За $\tau < \tau^*$ а также $\tau > \tau_2$, предел синий. За $\tau^* < \tau < \tau_2$, предел равен 0. Существует небольшая проблема подключения аппроксимаций на уровне $\tau_0 = \tau_2$, что побуждает нас поближе взглянуть на то, что происходит в данный момент.

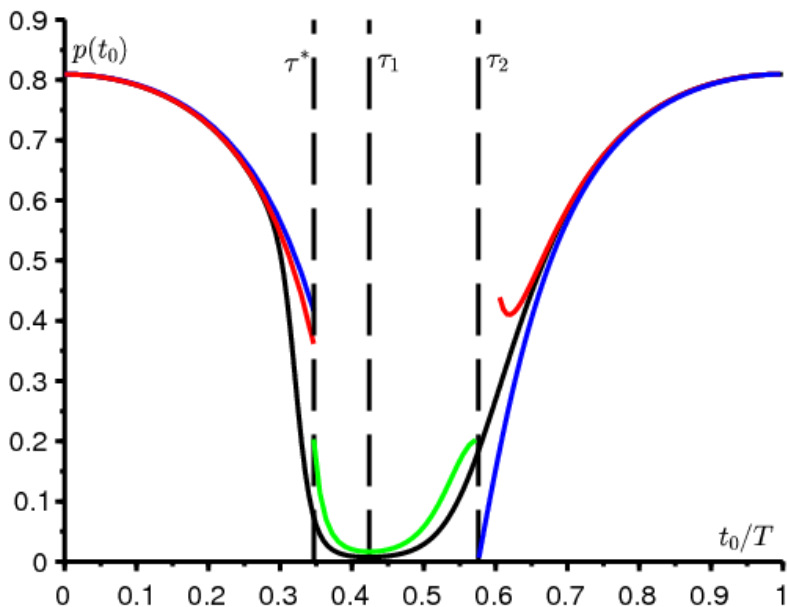


Рисунок 2. Как на рисунке 1, но с $T = 100$ а также $k = 0,75$, Примерная формула (5) выделена зеленым цветом.

Как и в случае, когда $\tau_2 < \tau_0 < 1$ в разделе 4.2, $F(u)$ на глобальном максимуме в $[0, 1]$ в $u = 0$ в особом случае, когда $\tau_0 = \tau_2$, Но в это время, $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$, Согласно той же теореме Эрдели (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

так что $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ если $T \rightarrow +\infty$, Формула (5) остается в силе, когда $\tau_0 = \tau_2$, Экспоненциальный спад к 0, когда $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ заменяется уменьшением $1/\sqrt{T}$ в тему τ_2 ,

2.6 Связь с "утками"

Формула (1) для вероятности вымирания $p(t_0)$ в то время t_0 фактически получается следующим образом: если $u > t_0$, вероятность вымирания в момент времени u процесса, который начинается с человека в момент времени t_0 дан кем-то $z(u - t_0)$ с $z(0) = 0$ а также

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Vasaer and Ait Dads, 2014). Именно потому, что это уравнение Риккати явно разрешимо, мы получаем формулу (1) для вероятности не исчезновения

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Давайте возьмем для примера $u = t_0 + nT$ с n строго положительным целым числом. Уравнение (10) затем записывается

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

С $s = t/T$ а также $z(t) = x(s)$, у нас есть

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

на интервале $s \in [0, n]$, Это может быть записано как медленная быстрая автономная система: $\forall s \in [0, n]$,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

с $x(0) = 0$ а также $y(0) = 0$, в заключение

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

С $T \rightarrow \infty$ мы видим на этой медленной быстрой системе, что $x(n) \rightarrow 1$ или $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$, Дело в том, что $x(n)$ остается на неустойчивой ветке 1 за $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$ следовательно, это то же явление, что и «утка» при изучении быстродействующих систем. Напомним определение (Лобри, 2018, стр. 182):

«В медленном быстром поле \mathbb{R}^2 , могут быть траектории, которые остаются бесконечно близко к медленной кривой в течение значительного времени (не бесконечно малого) вдоль привлекательной дуги, за которым следует значительное время, проведенное вдоль отталкивающей дуги. Такая траектория называется [...] уткой. »

Verhulst (2014) также отметил появление таких уток в связи с периодическим логистическим уравнением. Соотношение (3), которое связывает τ^* а также τ_2 это соответствующее «отношение ввода-вывода» (Benoit, 1981; De Maesschalck and Schecter, 2016).

Эти замечания, несомненно, распространяются в случае процессов рождения и смерти на несколько типов (Vasaer and Ait Dads, 2014) с матрицами рождения $\mathcal{A}(\tau)$ и матрицы перехода или смерти $\mathcal{B}(\tau)$, которые приводят к медленной-быстрой системе форм

$$\frac{dx}{ds} = T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)),$$

$$\frac{dy}{ds} = 1.$$

* обозначает транспонированную матрицу. В этом случае отношение ввода-вывода еще предстоит определить.

3 Модель SIR

3.1 Некоторые симуляции

Теперь рассмотрим модель SIR (6). Параметры выбраны, чтобы быть правдоподобными:

- общая численность населения $N = 10\,000$;
- только один человек был заражен в начале эпидемии ($i = 1$);
- каждый человек имеет в среднем $\bar{a} = 15$ контакты в месяц;
- средняя продолжительность инфекции $1/b = 1/10$ месяцы, около 3 дней;
- Период T составляет 1/4 месяца или около 7 дней;
- периодический фактор

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

с $\omega = 2\pi/T$ а также $|k| \leq 1$;

- фазовый сдвиг $\psi = -\pi/2$ так что $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ и скорость контакта $a(t)$ находится в возрастающей фазе при $t = 0$.

Воспроизводимость тогда $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$, что гарантирует развитие эпидемии с окончательным размером $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ (Васаёр and Gomes, 2009).

На рисунке 3 показаны два типичных моделирования модели: один с $k = 0$ (скорость контакта постоянна), другой с $k = 1$ (скорость контакта колеблется). Хотя кривые для $k = 1$ значительно отличаются от тех, для $k = 0$ во время эпидемии примечательно, что окончательные размеры $R(\infty)$ в обеих симуляциях графически практически неразличимы. Это будет объяснено в следующем разделе.

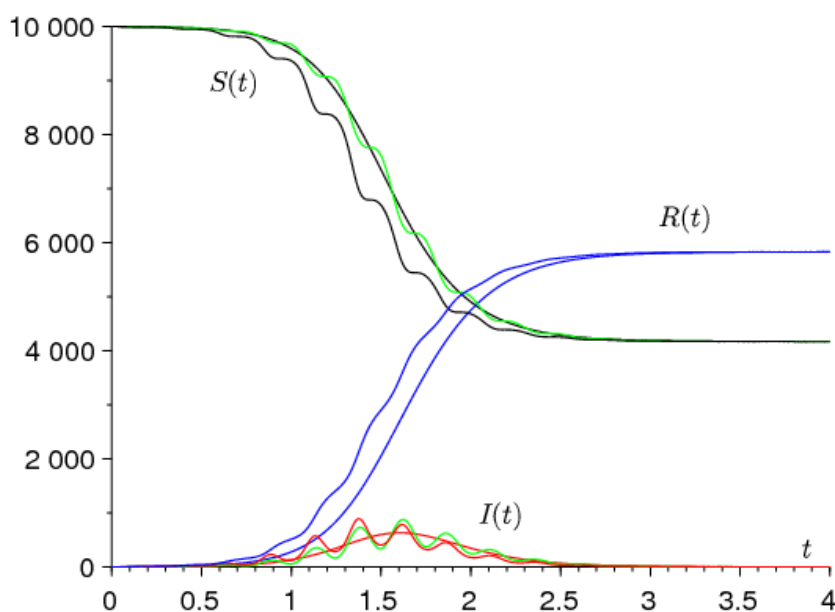


Рисунок 3. Моделирование эпидемии: $S(t)$ в черном, $I(t)$ в красном и $R(t)$ синим цветом как функция времени t (в месяцах). Волнистые кривые соответствуют $k = 0$, волнистые кривые — $k = 1$. Зеленые кривые являются приближениями второго порядка для $S(t)$ а также $I(t)$,

За счет уменьшения периода колебаний (например, с $T = 1/8$ месяцев), мы бы увидели кривые $(S(t), I(t), R(t))$ за $k = 1$ держать их колебания, но стать ближе к решению с $k = 0$, который мы отмечаем $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ потому что это соответствует $a(t) = \bar{a}$. Более того, это является следствием теоремы Фату об усреднении (Франсуаза, 2005, теорема 42). Действительно, если $\tau = t/T$ Система написана

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = T b I, \quad (11)$$

с $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$, Теорема гарантирует, что когда $T \rightarrow 0$,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

какое-то время τ порядка $1/T$, У нас есть таким образом $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ за время t порядка 1. Точнее, есть константы c_1, c_2, c_3 а также T_0 все положительное, с для $0 < T < T_0$ и для $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Мы можем вычислить приближение второго порядка. Запишем систему (11) в виде $dZ/d\tau = T f(\tau, Z)$, с $Z = (S, I, R)$, $f(\tau, Z)$ является периодической функцией периода 1 относительно τ . У нас тогда

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение должно быть удалено $\sin(\psi)$ так что эти последние функции имеют нулевое среднее. Согласно (Франсуаза, 2005, теорема 44), мы имеем

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

а также $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ через промежуток времени τ порядка $1/T$, Другими словами,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

а также $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ через промежуток времени t порядка 1, Эти приближения $S(t)$ а также $I(t)$ показаны зеленым цветом на рисунке 3.

Обратите внимание, что при малом периоде контакта мы не наблюдаем эпидемическую кривую с несколькими большими волнами, в отличие от моделирования (Васаёр and Gomes, 2009). Это связано с тем, что система становится все ближе и ближе к случаю, когда частота контактов является средней, что дает только одну эпидемическую волну.

3.2 Близость к конечным размерам эпидемий

Записав первое уравнение (6) в виде $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$ путем интегриации между $t = 0$ а также $t = +\infty$ с учетом начальных условий и $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ легко найти, как в (Васаёт, 2019), что

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

Колеблющийся интеграл $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ вероятно, сходится к 0, когда $T \rightarrow 0$, Действительно, мы знаем, с одной стороны, что $I(t) \simeq \bar{I}(t)$, С другой стороны, по крайней мере, когда ϕ это косинус, интеграл $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ сходится к 0, когда $T \rightarrow 0$, Действительно, функция $\bar{I}(t)$ является положительным и интегрируемым, потому что $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$, Преобразование Фурье интегрируемой функции сходится к 0 на бесконечности.

Это следует из того $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ если $T \rightarrow 0$, Вопрос в том, как быстро это происходит. В первом приближении уравнение (12) дает

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

как в (Васаёт, 2019).

Тогда мы используем для $\bar{I}(t)$ приблизительное аналитическое выражение в форме симметричного колокола, полученное Кермаком и МакКендриком (см., например, (Васаёт, 2019) или (Gani, 1975)). С $\bar{a}/b > 1$, $\bar{a}/b \simeq 1$ а также $i/N \ll 1$, у нас есть

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}. \quad (13)$$

$\text{ch}(\cdot)$ обозначает гиперболический косинус и

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

при вероятном дополнительном допущении $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$, W представляет собой приблизительное время, которое проходит до пика эпидемии в постоянной среде.

Наконец предположим, что $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ как на рисунке 3. Отметим $\text{Re}(\cdot)$ действительная часть комплексного числа и i обычное воображаемое число (не путать с i население изначально заражено). Затем мы имеем, используя классический результат об асимптотическом вычислении комплексных интегралов с фазой, которая не является стационарной, так что основной член исходит от края интервала интегрирования (Ovaert and Verley, 1997, теорема 3),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

В приближениях (14) мы видим, что

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

что в конечном итоге дает для $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

Окончательный размер $\bar{R}(\infty)$ в постоянной среде является единственным строго положительным решением уравнения

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

что легко найти из уравнения (12). С $i \ll N$, окончательный размер $\bar{R}(\infty)$ очень мало зависит от начального условия i , Это примерно строго положительное решение

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

Корректирующий член в уравнении (15) может быть положительным или отрицательным; это зависит от знака $\sin(\psi)$, Это пропорционально $1/\omega$, т. е. к $T/I/N$ фракции людей, изначально инфицированных. Вот почему, как было объявлено, окончательный размер эпидемии удивительно близок к тому, который был получен при замене показателя контакта на его среднее значение.

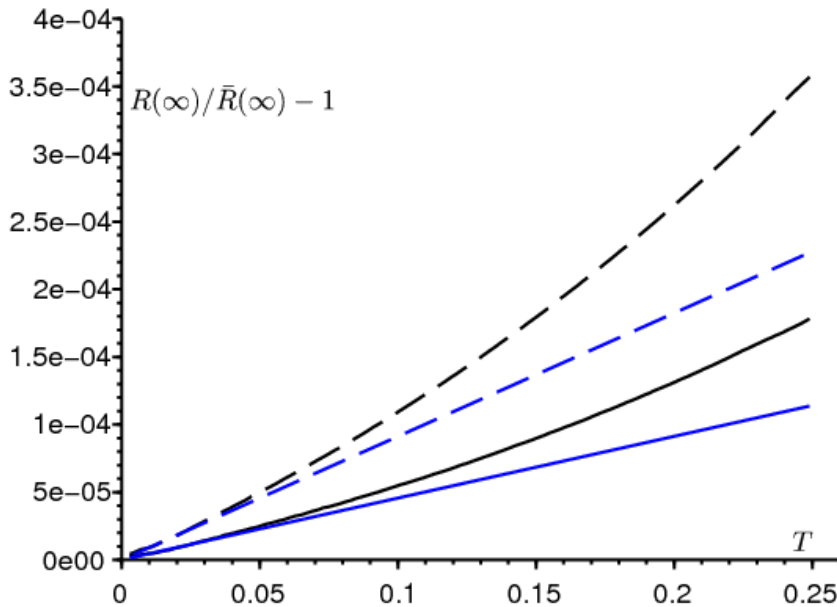


Рисунок 4. Относительная разница $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ между окончательными размерами эпидемий в зависимости от периода T . В черном, $R(\infty)$ оценивается путем моделирования системы дифференциальных уравнений. Аппроксимация (15) показана синим цветом. Параметры такие же, как на рисунке 3 с $k = 1$ кроме того периода T варьируется от 0 до 0,25 месяц и что $i = 1$ (сплошные линии) или $i = 2$ (пунктирный).

Это показано на фиг.4 со значениями параметров, идентичных значениям на фиг.3 для $k = 1$. Период T меняется. Мы также попробовали два начальных условия: $i = 1$ а также $i = 2$, Кривая для $R(\infty)$ касается приближения (15), если $T \rightarrow 0$. Обратите внимание на вертикальную шкалу малости относительной разности $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$, При $N = 10000$ это означает, что для конечного размера эпидемии самое большее разность составляет 1 или 2 человека (размер в принципе должен быть целым числом). С $\bar{a}/b = 1,5$ аппроксимация (13) по Кермаку и Маккендрику все еще относительно хороша (Gani, 1975, p. 240).

Если зего равно нулю или кратно числу π , корректирующий член в уравнении (15) равен нулю. Но поскольку это исключительный случай, возможно, не стоит искать новый эквивалент для интеграла. $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ над.

В заключение можно сказать, что близость конечных размеров $R(\infty)$ а также $\bar{R}(\infty)$ в некотором смысле оправдывает тот факт, что во многих моделях эпидемии короткими периодами колебаний пренебрегают, рассматривая только средние скорости контакта.

Библиографические ссылки

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoit (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.