

Twee bevolkingsmodellen in een langzame of snelle periodieke omgeving

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Wiskundige en computermodellering van complexe systemen
Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk
nicolas.bacaer@ird.fr

Overzicht

We pakken twee problemen in de bevolkingsdynamiek aan in een langzame of snelle periodieke omgeving. Ten eerste krijgen we een benadering voor de waarschijnlijkheid van niet-uitsterven van een lineair proces van geboorte en dood met periodieke coëfficiënten, wanneer de periode groot of klein is. Als het geboortecijfer gedurende een deel van de periode lager is dan de sterfte en als de periode naar het oneindige neigt, convergeert de waarschijnlijkheid van niet-uitsterven naar een discontinue limiet gekoppeld aan een "eend" in een langzaam-snel systeem .

Ten tweede bestuderen we een niet-lineair epidemisch model van het SIR-type wanneer de contactsnelheid snel oscilleert. De uiteindelijke omvang van de epidemie ligt dicht bij die van het bereiken van de contactfrequentie door het gemiddelde. Een benadering van de correctie wordt analytisch berekend wanneer de reproduceerbaarheid van de epidemie dicht bij 1 ligt. De correctie, die positief of negatief kan zijn, is evenredig met zowel de periode van de oscillaties als met de initiële fractie van geïnfecteerde personen.

1. Inleiding

In een werk dat enige tijd geleden werd gepubliceerd (Bacaër, 2015), bestudeerden we de limiet van een populatiedynamisch model, het stochastische model SIS, in een periodieke omgeving waarin de periode neigde naar 0 of oneindig. We stellen hier voor om op dezelfde manier twee ogenschijnlijk eenvoudigere modellen te bestuderen: een lineair proces van geboorte en dood en een deterministisch epidemisch model van het SIR-type. Deze twee modellen kunnen worden gezien als benaderingen van hetzelfde stochastische SIR-model. Het geboorte- en sterfproces dient als benadering bij het begin van de epidemie. Nieuwe infecties spelen de rol van geboorten. Genezingen spelen de rol van de dood. Het deterministische model wordt gebruikt als benadering wanneer het aantal geïnfecteerde mensen al groot genoeg is.

Laten we daarom eerst kijken naar een lineair proces van geboorte en dood in een variabele omgeving met een geboortecijfer $a(t)$ en een sterfelijkheid $b(t)$. Het proces begint bij $t = t_0$ met een enkel individu. De kans op niet-uitsterven is

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

of de integraal met de noemer eindig of oneindig is (Gani, 1975, p. 220). Dit geldt met name voor het geval waarin de functies $a(t)$ en $b(t)$ periodiek met dezelfde periode T . Wij nemen aan

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T).$$

$A(\tau)$ en $B(\tau)$ zijn periodieke functies van periode 1. Overweeg de middelen

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

$p(t_0)$ is identiek gelijk aan 0 als $\bar{a} \leq \bar{b}$. Het is een periodieke functie van periode T , strikt positief en strikt minder dan 1 indien $\bar{a} > \bar{b}$. Zie (Bacaër, 2007, §5.2) en (Bacaër en Ait Dads, 2014). We nemen nu aan $\bar{a} > \bar{b}$. Dit is het superkritische geval.

Formule (1) is vereenvoudigd wanneer de periode T erg klein of erg groot is, zoals onlangs opgemerkt (Carmona en Gandon, 2019). Met $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ constant en als $T \rightarrow 0$, men heeft $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$. Met $t_0/T = \tau_0$ constant en als $T \rightarrow +\infty$, men heeft $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$, althans voor bepaalde waarden van τ_0 met $A(\tau_0) > B(\tau_0)$.

Het onderstaande doel is om deze waarnemingen te verduidelijken door een benadering voor te stellen van de kans op uitsterven. De grens $T \rightarrow 0$ is de eenvoudigste: we hebben

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

In het geval $T \rightarrow +\infty$, gaan we ervan uit dat de functies $A(\tau)$ en $B(\tau)$ zijn regelmatig (zeg differentieerbaar met een continue afgeleide) en overweeg twee gevallen:

- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$ (zeer superkritisch geval);
- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1]$ met $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ en $A(\tau) < B(\tau) \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[$ (zwak superkritisch geval).

Zonder verlies van algemeenheid kan in het tweede geval verder worden aangenomen dat $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$. Er is dan een uniek $\tau^* \in]0, \tau_1[$ met

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

We laten in sectie 2 zien dat in het eerste geval voor $\tau_0 \in [0, 1]$, en in het tweede geval voor $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

In het tweede geval met $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Deze laatste kans convergeert exponentieel snel naar 0 wanneer $T \rightarrow +\infty$. Uiteindelijk is er dus een discontinuïteit in $\tau_0 = \tau^*$. De limiet is niet alleen nul $]\tau_1, \tau_2[$ maar ook in $]\tau^*, \tau_2[$. Dit houdt verband met een 'eend'-fenomeen in een langzaam-snel systeem, zoals uitgelegd in paragraaf 2.6.

Beschouw vervolgens het deterministische SIR-epidemiemodel. We definiëren

- N : de veronderstelde constante omvang van een populatie,
- $S(t)$: het aantal gezonde mensen op dat moment t ,
- $I(t)$: het aantal geïnfecteerde mensen,
- $R(t)$: het aantal mensen dat uit de transmissieketen is verwijderd omdat ze genezen en geïmmuniseerd zijn,
- $a(t)$: de mate van besmettelijk contact,
- b : het genezingspercentage.

Men heeft $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Aangenomen wordt, zoals in het vereenvoudigde model van Kermack en McKendrick (zie bijvoorbeeld (Hillion, 1986, p. 75)) dat

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Ieder gezond individu wordt daarom beïnvloed door het I/N -aandeel van geïnfecteerde individuen in de totale populatie, met andere woorden door het "gemiddelde veld", en niet door zijn omgeving in een bepaalde contactstructuur.

In een recent werk (Bacaër, 2019) waren we geïnteresseerd in de invloed die een periodieke oscillatie van een kleine amplitude van de contactfrequentie zou hebben op de uiteindelijke omvang van de epidemie. We zullen ons hier concentreren op het geval waar de amplitude willekeurig is, maar waar de periode van de oscillaties klein is in vergelijking met de typische duur van de epidemie. Voor een epidemie die enkele weken zou duren, zou dit bijvoorbeeld de snelle afwisseling tussen dag en nacht betekenen. Voor een epidemie die enkele maanden zou duren, zou dit de afwisseling zijn tussen werkdagen en weekends, vooral voor epidemieën op scholen. Voor een epidemie die meerdere jaren of zelfs tientallen jaren zou duren, zou dit de afwisseling tussen winters en zomers betekenen.

De periode van de oscillaties is $T > 0$. Deze parameter is bedoeld om te convergeren naar 0. We gaan ervan uit dat

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

met

- $\bar{a} > 0$,
- ϕ : een continue functie in stukjes met

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

$a(t)$ is dus een periodieke functie van periode T , met een gemiddelde \bar{a} . Neem als beginvoorwaarden aan het begin van de epidemie

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

met $0 < i < N$.

Paragraaf 3.1 toont simulaties van dit model. We zien aan de hand van voorbeelden dat de uiteindelijke omvang van de epidemie opmerkelijk dicht in de buurt komt van die welke wordt verkregen door het contactpercentage te vervangen door het gemiddelde. In paragraaf 3.2 stellen we een verklaring voor deze nabijheid voor door enkele aanvullende hypothesen te maken over de parameters van het model, met name door te veronderstellen dat de initiële fractie van geïnfecteerde mensen klein is en dat de reproduceerbaarheid van de epidemie dicht bij 1 blijft. We verkrijgen een benaderende formule voor het corrigeren van de uiteindelijke omvang van de epidemie. Deze correctie is evenredig met zowel de periode van de oscillaties als met de initiële fractie van geïnfecteerde mensen, vandaar de kleinheid ervan.

2 Een proces van geboorte en dood

2.1 Voorafgaande berekening

Laten we eerst eens kijken naar het lineaire proces van geboorte en dood. Beschouw de integraal van de noemer van formule (1)

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Per definitie hebben we

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Men heeft $t_0/T = \tau_0$. We definiëren $u = t/T$ en $v = s/T$. Dus, gebruikmakend van de periodiciteit van de functies $A(\tau)$ en $B(\tau)$, we verkrijgen

$$\begin{aligned}
J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{\tau_0+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du.
\end{aligned}$$

We hebben dus

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2 De limiet $T \rightarrow 0$

Met de benadering $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ voor $x \rightarrow 0$ in de factor voor de integraal, en eenvoudiger $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ in de integraal krijgen we

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Men heeft

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

We leiden dat af

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

Met $p(t_0) = 1/(1 + J)$, leiden we de formule af (2).

2.3 De limiet $T \rightarrow +\infty$: het zeer superkritische geval

Laten we terugkeren naar formule (7). De integraal is van het formulier

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

met

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

Men heeft

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

We gaan eerst uit van $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$. We hebben dan $F'(u) > 0 \forall u \in [0, 1]$, F bereikt zijn minimum in $u = 0$ en $F(0) = 0$. Bovendien $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ als $u \rightarrow 0$, met $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ en $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$. Anderszins, $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ als $u \rightarrow 0$, met $\psi_0 = B(\tau_0)$ en $\psi_1 = B'(\tau_0)$. Volgens een Erdlyi-stelling (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du = e^{-T F(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

met $c_0 = \psi_0/\phi_0$ en $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$. Omdat $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ is exponentieel klein, formule (7) geeft

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

Met $p(t_0) = 1/(1 + J)$, leiden we de formule (4) af.

2.4 Het zwak superkritische geval

We nemen nu aan $\exists \tau_1, \exists \tau_2$ met $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ en

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \quad \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \quad \forall \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Omdat $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ hebben we twee mogelijkheden:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

We gaan ervan uit dat de eerste ongelijkheid waar is, ook al betekent dit dat de functies in de tijd moeten worden verschoven $A(\tau)$ en $B(\tau)$.

Er is dan een uniek $\tau^* \in [0, \tau_1]$ met

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

Inderdaad, als

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

men heeft $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, \tau_1]$. Bovendien $h(0) > 0$ volgens de eerste ongelijkheid (9) en $h(\tau_1) < 0$. Er is dus een uniek $\tau^* \in [0, \tau_1]$ met $h(\tau^*) = 0$.

Laten we eerst het geval bekijken waar $0 < \tau_0 < \tau_1$. Functie $F(u)$ neemt toe als $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$. Het neemt af als $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$. Het groeit weer als $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$. Functie $F(u)$ heeft daarom een lokaal minimum in $\tau_2 - \tau_0$. We hebben ook $F(0) = 0$.

In het geval $\tau_0 \in]0, \tau^*[$, men heeft $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$. $u = 0$ blijft het totale minimum van $F(u)$ op het interval $[0, 1]$. De asymptotische ontwikkeling (8) blijft geldig en de formule (4) ook.

Als, aan de andere kant $\tau \in]\tau^*, \tau_1[$, men heeft $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$. Het totale minimum van $F(u)$ op het interval $[0, 1]$ is $u = \tau_2 - \tau_0$, $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$, $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$ en

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T F(\tau_2 - \tau_0)}, \quad T \rightarrow +\infty,$$

volgens de Laplace-methode (Ovaert en Verley, 1997). We hebben dus

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

en $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ als $T \rightarrow +\infty$, wat formule (5) geeft.

Overweeg nu het geval waar $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$. $F(u)$ is een afnemende functie gedurende het interval $[0, \tau_2 - \tau_0]$ dan een toenemende functie over het interval $[\tau_2 - \tau_0, 1]$. Het is minimaal $[0, 1]$ wordt daarom bereikt in $u = \tau_2 - \tau_0$, zoals in het vorige geval. Dus formule (5) is nog steeds geldig.

Overweeg ten slotte het geval waar $\tau_2 < \tau_0 < 1$. $F(u)$ is een toenemende functie gedurende het interval $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ dan een afnemende functie over het interval $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$, dan een toenemende functie over het interval $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$. Deze functie heeft daarom een lokaal minimum in $1 + \tau_2 - \tau_0$ en

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

volgens de eerste ongelijkheid (9). Het totale minimum in $[0, 1]$ wordt daarom bereikt op $u = 0$. Het is dus formule (4) die van toepassing is.

2.5 Voorbeeld

We nemen $B(\tau) = \bar{b} > 0$ constant en

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

met $\bar{a} > \bar{b}$ en $0 \leq k \leq 1$. Het zeer superkritische geval komt overeen met $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. Integendeel $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$, dan zijn de twee oplossingen in $[0, 1]$ van de vergelijking $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ zijn

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

De drempel τ^* is de oplossing in $[0, \tau_1]$ van de vergelijking

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

Formule (2) geeft

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right), \quad T \rightarrow 0.$$

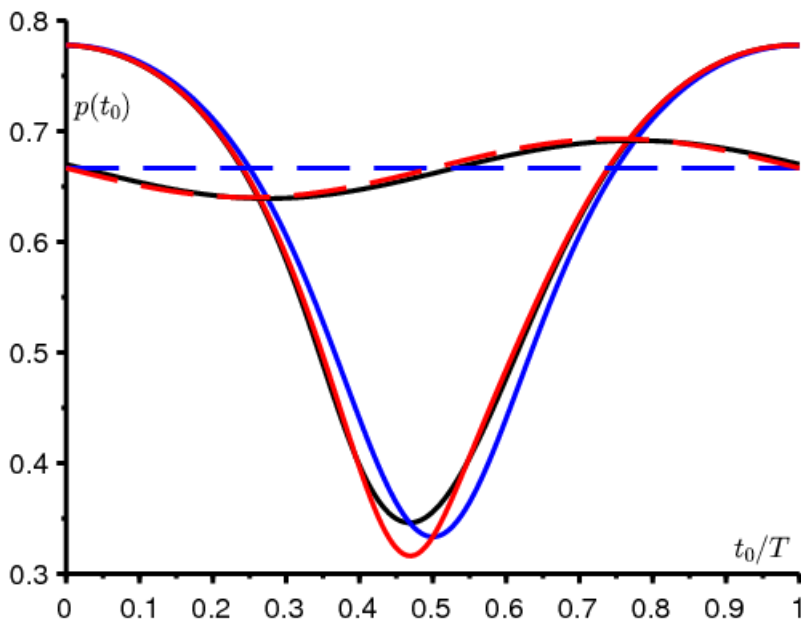
In het geval $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ of in het geval met $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ en $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$, dan geeft formule (4)

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right), \quad T \rightarrow +\infty.$$

In het geval met $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ en $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ Formule geeft (5)

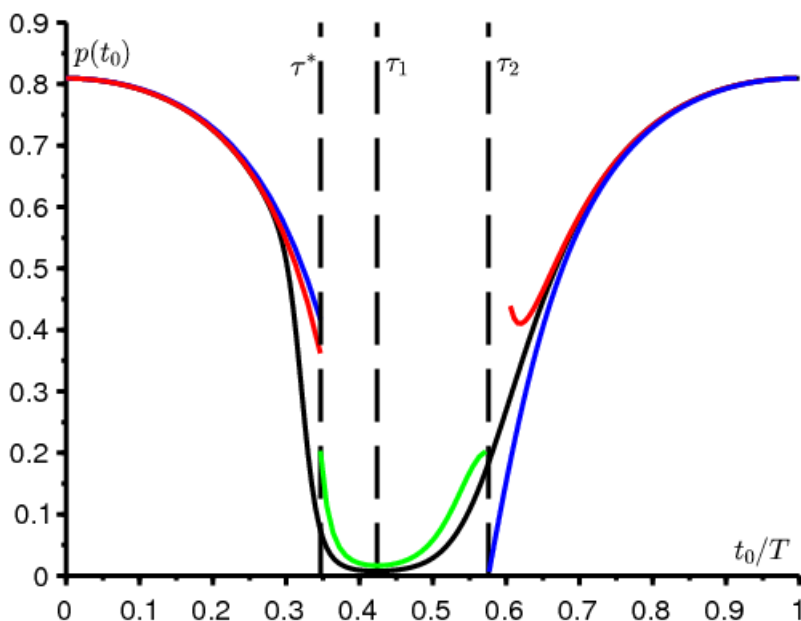
$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right], \quad T \rightarrow +\infty.$$

Laten we in het bijzonder nemen $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$ en $k = 0,5$. We hebben dan $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. Figuur 1 toont de resultaten voor twee waarden van de periode: $T = 0,5$ en $T = 50$. De kans op niet-uitsterven $p(t_0)$, gegeven door formule (1), wordt geschat door numerieke integratie met Scilab-software. We kunnen zien dat de geschatte formules (2) en (4) betere benaderingen geven. Merk echter op dat voor $T \rightarrow +\infty$, de benadering (4) wijkt een beetje af van $p(t_0)$ in de buurt van het minimum van $p(t_0)$.



Figuur 1. Twee voorbeelden: $T = 0,5$ (gestippeld) en $T = 50$ (Solide lijnen). De kans op niet-uitsterven $p(t_0)$, gegeven door formule (1), is zwart. Stippellijn: de geschatte formule (2) in rood en de benadering $1 - \bar{b}/\bar{a}$ in blauw. Doorlopende lijnen: de geschatte formule (4) in rood en de benadering $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ in blauw.

Laten we het nu nemen $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$, $k = 0,75$ en $T = 100$. We hebben dan $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$, $\tau^* \simeq 0,347$, $\tau_1 \simeq 0,424$ en $\tau_2 \simeq 0,576$. De verschillende benaderende formules zijn weergegeven in figuur 2, in het bijzonder formule (5) in het groen. De kans op niet-uitsterven convergeert naar een discontinue limiet. Voor $\tau < \tau^*$ en $\tau > \tau_2$, de limiet is blauw. Voor $\tau^* < \tau < \tau_2$, de limiet is gelijk aan 0. Er is een klein probleem bij het verbinden van de benaderingen op het niveau van $\tau_0 = \tau_2$, wat ons ertoe brengt nader te bekijken wat er op dit moment gebeurt.



Figuur 2. Zoals in Figuur 1 maar met $T = 100$ en $k = 0,75$. De geschatte formule (5) is in het groen.

Zoals in het geval waar $\tau_2 < \tau_0 < 1$ in rubriek 4.2, $F(u)$ op zijn wereldwijde maximum in $[0, 1]$ in $u = 0$ in het speciale geval waar $\tau_0 = \tau_2$. Maar deze keer, $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$. Volgens dezelfde Erdélyi-

stelling (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

zodat $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ als $T \rightarrow +\infty$. Formule (5) blijft geldig wanneer $\tau_0 = \tau_2$. Het exponentiële verval richting 0 wanneer $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ wordt vervangen door een afname van $1/\sqrt{T}$ op punt τ_2 .

2.6 Link met "eenden"

Formule (1) voor de kans op uitsterven $p(t_0)$ destijds t_0 wordt als volgt verkregen: if $u > t_0$, de kans op uitsterven op het tijdstip u van het proces dat begint bij een individu op het moment t_0 is gegeven door $z(u - t_0)$ met $z(0) = 0$ en

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër en Ait Dads, 2014). Omdat deze Riccati-vergelijking expliciet oplosbaar is, verkrijgen we formule (1) voor de waarschijnlijkheid van niet-uitsterven

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Laten we als voorbeeld nemen $u = t_0 + nT$ met n strikt positief geheel getal. Vergelijking (10) wordt dan geschreven

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

Met $s = t/T$ en $z(t) = x(s)$, men heeft

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

op het interval $s \in [0, n]$. Dit kan worden geschreven als een langzaam-snel autonoom systeem: $\forall s \in [0, n]$,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

met $x(0) = 0$ en $y(0) = 0$. Tenslotte

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

Met $T \rightarrow \infty$, zien we op dit langzaam-snelle systeem dat $x(n) \rightarrow 1$ of $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$. Het feit dat $x(n)$ blijft op de onstabiele tak 1 voor $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$ is daarom hetzelfde fenomeen als wat "eend" wordt genoemd in de studie van langzaam-snelle systemen. Denk aan de definitie (Lobry, 2018, p.182):

"In een langzaam-snel veld van \mathbb{R}^2 kunnen er trajecten zijn die gedurende een aanzienlijke tijd (niet oneindig klein) oneindig dicht bij de langzame curve blijven langs een aantrekkelijke boog, gevolgd door een aanzienlijke tijd doorgebracht langs een afstotende boog. Zo'n traject wordt een [...] eend genoemd. "

Verhulst (2014) merkte ook het uiterlijk van dergelijke eenden op in verband met een periodieke logistieke vergelijking. De relatie (3) die bindt τ^* en τ_2 is de corresponderende "input-output relatie" (Benoît, 1981; De Maesschalck en Schechter, 2016).

Deze opmerkingen strekken zich ongetwijfeld uit in het geval van geboorte- en sterfprocessen tot verschillende typen (Bacaër en Ait Dads, 2014) met geboortematrix $\mathcal{A}(\tau)$ en overgangs- of doodsmatrix

$\mathcal{B}(\tau)$, wat leidde tot een langzaam-snel vormsysteem

$$\frac{dx}{ds} = T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)),$$

$$\frac{dy}{ds} = 1.$$

* geeft de getransponeerde matrix aan. In dit geval moet de input-outputrelatie nog worden bepaald.

3 Het SIR-model

3.1 Enkele simulaties

Overweeg nu het SIR-model (6). De parameters zijn gekozen om aannemelijk te zijn:

- de totale bevolking is $N = 10\,000$;
- slechts één persoon was aan het begin van de epidemie besmet ($i = 1$);
- elke persoon heeft gemiddeld $\bar{a} = 15$ contacten per maand;
- de gemiddelde duur van de infectie is $1/b = 1/10$ maanden, ongeveer 3 dagen;
- de periode T is $1/4$ van een maand, of ongeveer 7 dagen;
- de periodieke factor is

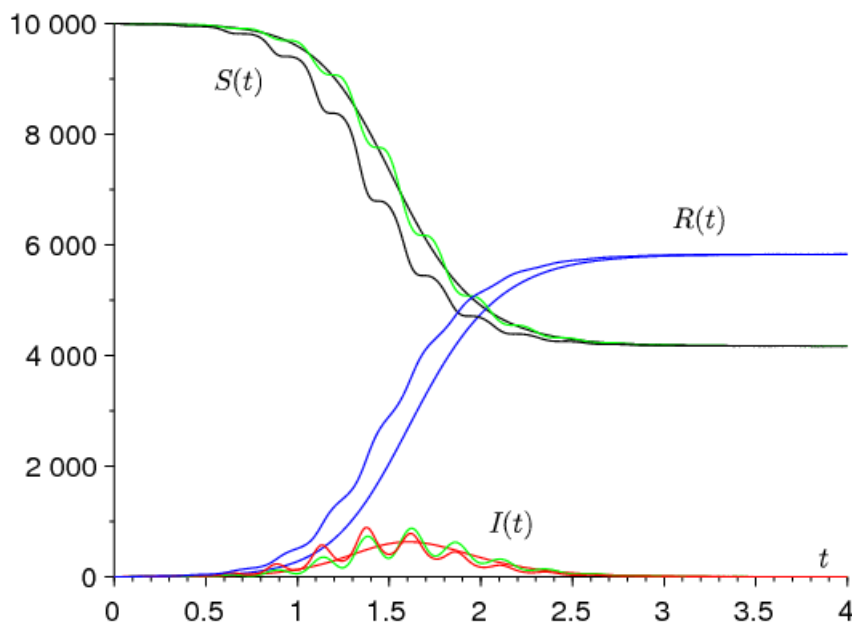
$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

met $\omega = 2\pi/T$ en $|k| \leq 1$;

- de faseverschuiving is $\psi = -\pi/2$ zodat $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ en het contactpercentage $a(t)$ bevindt zich in een toenemende fase op $t = 0$.

Reproduceerbaarheid is dan $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$, wat de ontwikkeling van een epidemie met een uiteindelijk omvang garandeert $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ (Bacaër en Gomes, 2009).

Figuur 3 toont twee typische simulaties van het model: één met $k = 0$ (de contactsnelheid is constant), de andere met $k = 1$ (het contactpercentage fluctueert). Hoewel de bochten voor $k = 1$ aanzienlijk verschillen van die voor $k = 0$ tijdens de epidemie is het opmerkelijk dat de uiteindelijke maten $R(\infty)$ in beide simulaties zijn grafisch bijna niet van elkaar te onderscheiden. Dit wordt in de volgende sectie uitgelegd.



Figuur 3. Simulatie van een epidemie: $S(t)$ in het zwart, $I(t)$ in rood en $R(t)$ in blauw als functie van tijd t (in maanden). De niet-golvende curven komen overeen met $k = 0$, de golvende curven met $k = 1$. De groene curven zijn benaderingen van de tweede orde $S(t)$ en $I(t)$.

Door de periode van de oscillaties te verkorten (bijvoorbeeld met $T = 1/8$ maanden), zouden we de curven zien ($S(t), I(t), R(t)$) voor $k = 1$ behouden hun oscillaties maar komen dichterbij de oplossing met $k = 0$, wat we opmerken ($\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t)$) omdat het overeenkomt met $a(t) = \bar{a}$. Dit is bovendien een gevolg van Fatou's middelingsstelling (Françoise, 2005, stelling 42). Inderdaad, als $\tau = t/T$, is het systeem geschreven

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

met $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$. De stelling verzekert dat wanneer $T \rightarrow 0$,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

voor een poosje τ in de Orde van $1/T$. We hebben dus $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ gedurende een tijd t in de orde van 1. Meer precies zijn er constanten c_1, c_2, c_3 en T_0 allemaal positief, met voor $0 < T < T_0$ en voor $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

We kunnen een benadering van de tweede orde berekenen. Laten we het systeem (11) in het formulier schrijven $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$, met $Z = (S, I, R)$. $f(\tau, Z)$ is een periodieke functie van periode 1 met betrekking tot τ . We hebben dan

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De uitdrukking moet worden verwijderd $\sin(\psi)$ zodat deze laatste functies nulgemiddeld zijn. Volgens (Françoise, 2005, stelling 44) hebben we dat

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

en $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ over een tijdsinterval τ in de Orde van $1/T$. Met andere woorden,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

en $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ over een tijdsinterval t in de Orde van 1. Deze benaderingen van $S(t)$ en $I(t)$ worden groen weergegeven in Figuur 3.

Merk op dat met een periode van de contactsnelheid die klein is, we geen epidemische curve waarnemen met verschillende grote golven, in tegenstelling tot de simulaties van (Bacaër en Gomes, 2009). Dit komt omdat het

systeem steeds dichter bij het geval komt waar de contactfrequentie gemiddeld is, wat slechts één epidemische golf veroorzaakt.

3.2 Nabijheid van de uiteindelijke omvang van epidemieën

Door de eerste vergelijking (6) in het formulier te schrijven $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$ door te integreren tussen $t = 0$ en $t = +\infty$, rekening houdend met de beginvoorwaarden en $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$, is het gemakkelijk te vinden zoals in (Bacaër, 2019) dat

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

De oscillerende integraal $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ komt waarschijnlijk samen met 0 wanneer $T \rightarrow 0$. Enerzijds weten we dat $I(t) \simeq \bar{I}(t)$. Aan de andere kant, tenminste wanneer ϕ is een cosinus, de integraal $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ convergeert naar 0 wanneer $T \rightarrow 0$. Inderdaad, de functie $\bar{I}(t)$ is positief en integreerbaar omdat $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$. De Fourier-transformatie van een integreerbare functie convergeert naar 0 op oneindig.

Het volgt dat $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ als $T \rightarrow 0$. De vraag is hoe snel dit gebeurt. Als eerste benadering geeft vergelijking (12)

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

zoals in (Bacaër, 2019).

Dan gebruiken we voor $\bar{I}(t)$ de benaderde analytische uitdrukking in de vorm van een symmetrische bel verkregen door Kermack en McKendrick (zie bijvoorbeeld (Bacaër, 2019) of (Gani, 1975)). Met $\bar{a}/b > 1$, $\bar{a}/b \simeq 1$ en $i/N \ll 1$, men heeft

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}. \quad (13)$$

$\text{ch}(\cdot)$ duidt de hyperbolische cosinus en

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

onder de waarschijnlijk aanvullende veronderstelling $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$. W is een benadering van de tijd die verstrijkt voor het hoogtepunt van de epidemie in een constante omgeving.

Veronderstel dat tot slot $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ zoals in figuur 3. Laten we opmerken $\text{Re}(\cdot)$ het echte deel van een complex getal en i het gebruikelijke imaginaire nummer (niet te verwarren met i , de aanvankelijk besmette populatie). Vervolgens hebben we, gebruikmakend van een klassiek resultaat op de asymptotische berekening van complexe integralen met een fase die niet stationair is, zodat de hoofdterm afkomstig is van de rand van het integratie-interval (Ovaert en Verley, 1997, Stelling 3),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

Met de benaderingen (14) zien we daarnaast dat

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

wat uiteindelijk geeft voor $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

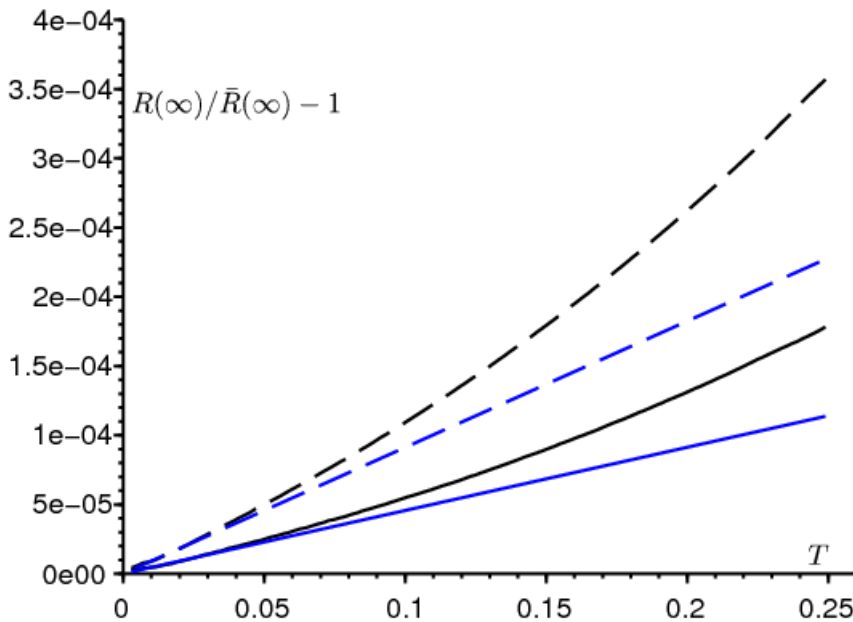
De uiteindelijke maat $\bar{R}(\infty)$ in een constante omgeving is de enige strikt positieve oplossing voor de vergelijking

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

wat gemakkelijk te vinden is uit vergelijking (12). Met $i \ll N$, de uiteindelijke maat $\bar{R}(\infty)$ hangt heel weinig af van de oorspronkelijke toestand i . Dit is ongeveer de strikt positieve oplossing van

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

De correctieterm in vergelijking (15) kan positief of negatief zijn; het hangt af van het teken van $\sin(\psi)$. Het is beide evenredig met $1/\omega$, d.w.z. tegen T , en tegen de i/N - fractie van mensen die aanvankelijk besmet waren. Dit is de reden waarom, zoals aangekondigd, de uiteindelijke omvang van de epidemie opmerkelijk dicht in de buurt komt van die welke wordt verkregen door het contactpercentage te vervangen door het gemiddelde.



Figuur 4. Het relatieve verschil $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ tussen de uiteindelijke omvang van epidemieën volgens de periode T . In het zwart, $R(\infty)$ wordt geschat door het systeem van differentiaalvergelijkingen te simuleren. De benadering (15) wordt blauw weergegeven. De parameters zijn hetzelfde als in Figuur 3 met $k = 1$, behalve dat de periode T varieert tussen 0 en 0,25 maand en dat $i = 1$ (ononderbroken lijnen) of $i = 2$ (gestippeld).

Dit wordt geïllustreerd in figuur 4 met waarden van de parameters identiek aan die van figuur 3 voor $k = 1$. Periode T varieert. We hebben ook twee beginvoorwaarden geprobeerd: $i = 1$ en $i = 2$. De curve voor $R(\infty)$ raakt aan de benadering (15) als $T \rightarrow 0$. Let op de verticale schaal op de kleinheid van het relatieve verschil $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$. Met $N = 10000$ vertaalt dit zich voor de uiteindelijke omvang van de epidemie

maximaal met een verschil van 1 of 2 personen (de omvang zou in principe een geheel getal moeten zijn). Met $\bar{a}/b = 1,5$ is de benadering (13) van Kermack en McKendrick nog steeds relatief goed (Gani, 1975, p. 240).

Als ψ nul is of een geheel veelvoud van het getal π , is de correctieterm in vergelijking (15) nul. Maar aangezien dit een uitzonderlijk geval is, is het misschien niet de moeite waard om een nieuw equivalent voor de integraal te vinden $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ bovenstaande.

Concluderend kunnen we zeggen dat de nabijheid van de uiteindelijke maten $R(\infty)$ en $\bar{R}(\infty)$ rechtvaardigt op een bepaalde manier het feit dat in veel epidemische modellen kortetermijnschommelingen worden verwaarloosd om alleen naar gemiddelde contactpercentages te kijken.

Bibliografische referenties

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoit (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMIAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) Calculs asymptotiques, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.