

遅いまたは速い周期的な環境での2つの母集団モデル

J. Math. Biol. 80 (2020) 1021-1037
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット
Les Cordeliers、パリ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

概要

遅いまたは速い周期的な環境における人口動態の2つの問題に取り組みます。最初に、周期が大きい場合または小さい場合に、周期的な係数を使用した出生と死亡の線形プロセスの非消滅の確率の近似値を取得します。出生率が期間の一部の死亡率よりも低く、期間が無限大になる傾向がある場合、非絶滅の確率は、低速高速システムの「カモ」に関連する不連続な制限に向かって収束します。

第2に、接触率が急速に変動する場合のSIRタイプの非線形流行モデルを調査します。流行の最終的なサイズは、接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに近いです。流行の再現性が1に近い場合、補正の近似値が分析的に計算されます。補正は、正または負であり、振動の周期と感染者の最初の割合の両方に比例します。

1はじめに

しばらく前に公開された研究 (Bacaër, 2015) では、周期が0または無限大になる傾向がある周期的な環境で、人口動態モデルの限界である確率モデルSISを調査しました。ここでは、明らかに単純な2つのモデル、つまり、出生と死亡の線形プロセスとSIRタイプの決定論的流行モデルを研究することを提案します。これら2つのモデルは、同じ確率的SIRモデルの近似として見ることができます。誕生と死のプロセスは、流行の始まりの概算として機能します。新しい感染症は出産の役割を果たします。癒しは死の役割を果たします。確定モデルは、感染者の数がすでに十分に多い場合の概算として使用されます。

したがって、最初に出生率が変動する環境での出生と死亡の線形プロセスを考えてみましょう $a(t)$ そして死亡率 $b(t)$ 。プロセスは $t = t_0$ 一人で。絶滅しない確率は

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

分母との積分が有限か無限か (Gani, 1975, p. 220) 。これは、特に関数が $a(t)$ そして $b(t)$ 同じ周期 T で周期的です。とする

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T).$$

$A(\tau)$ そして $B(\tau)$ 期間1の周期関数です。

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

$p(t_0)$ が0に等しい場合 $\bar{a} \leq \bar{b}$ 。これは、周期 T の周期関数であり、厳密に正で、厳密に1未満の場合、 $\bar{a} > \bar{b}$ 。(Bacaër, 2007, §5.2) および (Bacaër and Ait Dads, 2014) を参照してください。今仮定します $\bar{a} > \bar{b}$ 。これは超臨界の場合です。

式 (1) は、最近指摘されたように、期間 T が非常に小さいか非常に大きい場合に簡略化されま
す (Carmona and Gandon, 2019) 。と $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ 定数と $T \rightarrow 0$ 、我々は持っています
 $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ 。と $t_0/T = \tau_0$ 定数と $T \rightarrow +\infty$ 、我々は持っています $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 、
少なくとも特定の値について τ_0 と $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ 。

以下の目的は、消滅の確率の概算を提案することにより、これらの観察を明確にすること
です。限界 $T \rightarrow 0$ 最も単純です：

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

その場合 $T \rightarrow +\infty$ 、私たちは関数が $A(\tau)$ そして $B(\tau)$ 規則的であり (たとえば、連続微分で微
分可能)、次の2つのケースを検討します。

- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$ (非常に超臨界の場合) ;
- $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]$ と $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ そして $A(\tau) < B(\tau) \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[$ (弱超臨界
状態) 。

一般性を失うことなく、2番目のケースでは、 $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ 。次にユニークな $\tau^* \in]0, \tau_1[$
と

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

セクション2で示します。 $\tau_0 \in [0, 1]$ 、そして2番目のケースでは $\tau_0 \notin]\tau^*, \tau_2[$ 、

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

2番目のケースでは $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ 、

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

この最後の確率は、指数関数的にすばやく0に収束します。 $T \rightarrow +\infty$ 。したがって、最終的に
は、 $\tau_0 = \tau^*$ 。限界はゼロだけでなく $]\tau_1, \tau_2[$ だけでなく $]\tau^*, \tau_2[$ 。これは、セクション2.6で説明す

るように、低速システムでの「ダック」現象に関連しています。

次に、決定論的なSIR流行モデルについて検討します。私たちは定義します

- N : 母集団の想定される一定のサイズ、
- $S(t)$: 当時の健康な人の数 t 、
- $I(t)$: 感染した人の数、
- $R(t)$: 治癒して免疫されたために感染の連鎖から外された人々の数、
- $a(t)$: 感染性接触の割合、
- b : 治癒率。

我々は持っています $N = S(t) + I(t) + R(t)$ 。カーマックとマッケンドリックの簡略化されたモデルのように (たとえば (Hillion, 1986, p. 75) を参照) 、

$$\frac{dS}{dt} = -a(t) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t) \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

したがって、各健康な個人は、特定の接触構造におけるその近傍ではなく、総人口における感染した個人の I/N 比率、つまり「平均フィールド」の影響を受けます。

最近の研究 (Bacaër, 2019) では、接触率の小さな振幅の周期的な振動が流行の最終的なサイズに与える影響に興味を持っていました。ここでは、振幅が任意であるが、振動の周期が流行の典型的な期間と比較して小さい場合に焦点を当てます。数週間続く流行の場合、これは、たとえば、昼と夜の間の急速な交代を表します。数か月続く流行の場合、これは就業日と週末の交代を表し、特に学校での伝染病の場合はそうです。数年または数十年も続く流行の場合、これは冬と夏の交代を表します。

振動の周期は $T > 0$ 。このパラメーターは0に収束することを目的としています。

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

と

- $\bar{a} > 0$ 、
- ϕ : の連続関数

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

$a(t)$ したがって、平均は周期 T の周期関数であり、 \bar{a} 。流行開始時の初期条件とする

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

と $0 < i < N$ 。

セクション3.1は、このモデルのシミュレーションを示しています。例からわかるように、流行の最終的なサイズは、接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに非常に近いです。セクション3.2では、特に感染者の初期の割合が小さく、流行の再現性が1に近いままでであると仮定して、モデルのパラメーターにいくつかの追加の仮説を立てることにより、この近接性の説

明を提案します。流行の最終的なサイズに対して行われる修正の近似式。この補正は、振動の周期と感染者の最初の割合の両方に比例するため、その大きさは小さくなります。

2 誕生と死のプロセス

2.1 予備計算

まず、誕生と死の線形プロセスを見てみましょう。式 (1) の分母の積分を考える

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

定義により、

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

我々は持っています $t_0/T = \tau_0$ 。私たちは定義します $u = t/T$ そして $v = s/T$ 。したがって、関数の周期性を使用して $A(\tau)$ そして $B(\tau)$ 、私達は手に入れました

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

このように

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2 限界 $T \rightarrow 0$

近似あり $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ ために $x \rightarrow 0$ 積分の前の因子で、より簡単に $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ 積分では、

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

我々は持っています

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+1} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

私たちはそれを推測します

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

と $p(t_0) = 1/(1 + J)$ 、式 (2) を推定します。

2.3 限界 $T \rightarrow +\infty$: 非常に超臨界のケース

式 (7) に戻りましょう。積分は次の形式です

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

と

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

我々は持っています

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

最初とする $A(\tau) > B(\tau) \forall \tau \in [0, 1]$ 。私たちは $F'(u) > 0 \forall u \in [0, 1]$ 、 $F(u) = 0$ として $F(0) = 0$ 。さらに、 $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ もし $u \rightarrow 0$ 、 $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ として $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ 。さもないと、 $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ もし $u \rightarrow 0$ 、 $\psi_0 = B(\tau_0)$ として $\psi_1 = B'(\tau_0)$ 。Erdlyiの定理 (Olver, 1974, p. 85) によれば、

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

と $c_0 = \psi_0/\phi_0$ として $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ 。なぜなら $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ 指数関数的に小さいので、式 (7) は

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

と $p(t_0) = 1/(1 + J)$ 、式 (4) を推定します。

2.4 弱い超臨界の場合

今仮定します $\exists \tau_1, \exists \tau_2$ と $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ として

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \forall \tau \in]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \forall \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

なぜなら $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ 、2つの可能性があります。

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

時間の経過とともに関数をシフトすることを意味する場合でも、最初の不等式は真であると想定します。 $A(\tau)$ そして $B(\tau)$ 。

次にユニークな $\tau^* \in [0, \tau_1]$ と

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

確かに

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

我々は持っています $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0 \forall \tau \in [0, \tau_1]$ 。さらに、 $h(0) > 0$ 最初の不等式 (9) および $h(\tau_1) < 0$ 。だからユニークな $\tau^* \in [0, \tau_1]$ と $h(\tau^*) = 0$ 。

最初に、 $0 < \tau_0 < \tau_1$ 。関数 $F(u)$ 増加している場合 $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ 。減少している場合 $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ 。それが再び成長している場合 $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。関数 $F(u)$ したがって、極小値が $\tau_2 - \tau_0$ 。また、 $F(0) = 0$ 。

その場合 $\tau_0 \in]0, \tau^*[$ 、我々は持っています $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ 。 $u = 0$ 全体の最小値のままです $F(u)$ 間隔で $[0, 1]$ 。漸近展開 (8) は引き続き有効であり、式 (4) も有効です。

一方、 $\tau \in]\tau^*, \tau_1[$ 、我々は持っています $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ 。全体の最小値 $F(u)$ 間隔で $[0, 1]$ です $u = \tau_2 - \tau_0$ 、 $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ 、 $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$ そして

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_0) \sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T F(\tau_2 - \tau_0)}, \quad T \rightarrow +\infty,$$

ラプラス法による (Ovaert and Verley, 1997) 。このように

$$J \sim \frac{B(\tau_0) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

そして $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ もし $T \rightarrow +\infty$ 、これは式 (5) を与えます。

ここで、 $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ 。 $F(u)$ 間隔で減少する関数です $[0, \tau_2 - \tau_0]$ 次に、区間にわたって増加する関数 $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。その最小 $[0, 1]$ したがって、 $u = \tau_2 - \tau_0$ 、前の場合と同様に。したがって、式 (5) はまだ有効です。

最後に、 $\tau_2 < \tau_0 < 1$ 。 $F(u)$ 間隔にわたって増加する関数です $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ 次に、区間にわたって減少する関数 $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ 、その後、区間にわたって増加する関数 $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ 。したがって、この関数には極小値があります。 $1 + \tau_2 - \tau_0$ そして

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1 + \tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

最初の不等式 (9) によると、その全体的な最小値 $[0, 1]$ したがって、 $u = 0$ で到達します。したがって、適用されるのは式 (4) です。

2.5例

私たちは取る $B(\tau) = \bar{b} > 0$ 一定と

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

と $\bar{a} > \bar{b}$ そして $0 \leq k \leq 1$ 。非常に超臨界のケースは $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。逆の場合 $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ 、次に2つのソリューション $[0, 1]$ 方程式の $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ は

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

しきい値 τ^* の解決策です $[0, \tau_1]$ 方程式の

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

式 (2) は

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right), \quad T \rightarrow 0.$$

その場合 $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ またはの場合 $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ そして $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ 、次に式 (4) は

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi\bar{a}\bar{b}k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right), \quad T \rightarrow +\infty.$$

の場合 $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ そして $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ 、式 (5) は

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right], \quad T \rightarrow +\infty.$$

特に取りましょう $\bar{b} = 1$ 、 $\bar{a} = 3$ そして $k = 0,5$ 。私たちは $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。図1は、期間の2つの値 ($T = 0.5$ および $T = 50$) の結果を示しています。非絶滅の確率 $p(t_0)$ 式 (1) で与えられるは、Scilab ソフトウェアとの数値積分によって推定されます。近似式 (2) および (4) がより良い近似を与えることがわかります。ただし、 $T \rightarrow +\infty$ 、近似 (4) は、 $p(t_0)$ 最小値付近 $p(t_0)$ 。

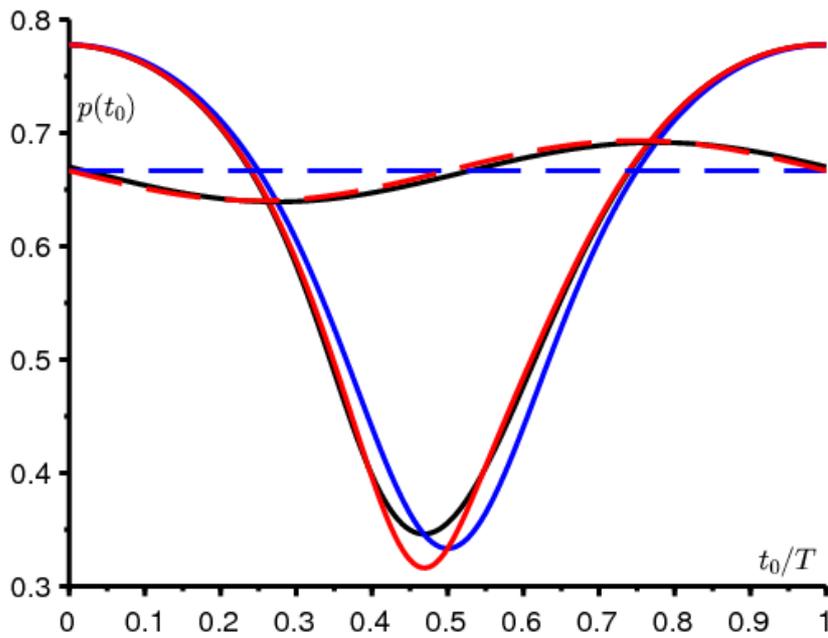


図1. 2つの例： $T = 0,5$ （点線）および $T = 50$ （実線）。非絶滅の確率 $p(t_0)$ は、式（1）で与えられ、黒色で表示されます。点線：赤の近似式（2）と近似 $1 - \bar{b}/\bar{a}$ 青色の。実線：赤の近似式（4）と近似 $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 青色の。

とりあえず $\bar{b} = 1$ 、 $\bar{a} = 3$ 、 $k = 0,75$ そして $T = 100$ 。私たちは $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ 、 $\tau^* \simeq 0,347$ 、 $\tau_1 \simeq 0,424$ そして $\tau_2 \simeq 0,576$ 。様々な近似式が図2に、特に式（5）が緑色で表されている。非絶滅の確率は不連続な限界に収束します。ために $\tau < \tau^*$ そして $\tau > \tau_2$ 、制限は青です。ために $\tau^* < \tau < \tau_2$ 、制限は0に等しくなります。次のレベルで近似を接続するという小さな問題があります。 $\tau_0 = \tau_2$ 、この時点で何が起きているのかを詳しく見ていきます。

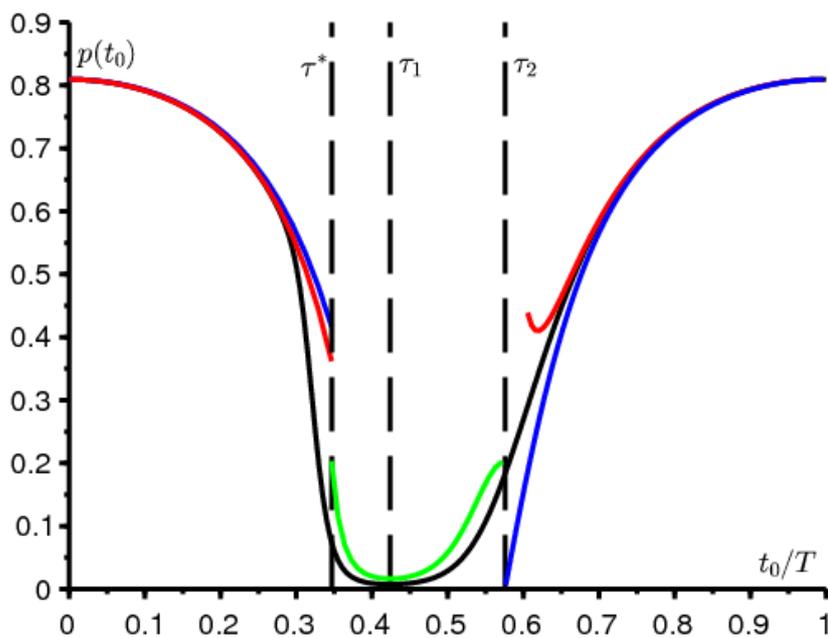


図2. 図1と同じですが、 $T = 100$ そして $k = 0,75$ 。近似式（5）は緑色です。

場合のように $\tau_2 < \tau_0 < 1$ セクション4.2 $F(u)$ 世界最大で $[0, 1]$ に $u = 0$ 特別な場合 $\tau_0 = \tau_2$ 。今回は $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ 。同じエルデリーの定理 (Olver, 1974, p. 85) によれば、

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_2)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

そのため $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ もし $T \rightarrow +\infty$ 。式 (5) は、 $\tau_0 = \tau_2$ 。次の場合の0への指数関数的減衰 $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ の減少に置き換えられます $1/\sqrt{T}$ その場で τ_2 。

2.6 「アヒル」とのリンク

絶滅確率の式 (1) $p(t_0)$ 当時の t_0 実際には次のように取得されます。 $u > t_0$ 、時間に個人から始まるプロセスの時間 u に絶滅する確率 t_0 によって与えられます $z(u - t_0)$ と $z(0) = 0$ そして

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(BacaerおよびAit Dads, 2014年)。このRiccati方程式が明確に解けるため、非消滅の確率について式 (1) が得られます

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

例を挙げましょう $u = t_0 + nT$ n は厳密に正の整数。次に、式 (10) が書き込まれます

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

と $s = t/T$ そして $z(t) = x(s)$ 、我々は持っています

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

間隔で $s \in [0, n]$ 。これは遅い高速の自律システムとして書くことができます： $\forall s \in [0, n]$ 、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

と $x(0) = 0$ そして $y(0) = 0$ 。最終的に

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

と $T \rightarrow \infty$ 、私たちはこの低速高速システムで $x(n) \rightarrow 1$ または $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 。事実 $x(n)$ 不安定なブランチにとどまる1のために $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$ したがって、低速高速システムの研究で「アヒル」と呼ばれるものと同じ現象です。定義を思い出してください (Lobry, 2018, p. 182) :

「の遅い速い分野で \mathbb{R}^2 、魅力的な弧に沿ってかなりの時間（無限に小さくはない）の間、ゆっくりと曲線に無限に近い軌道が続く場合があり、その後反発する弧に沿ってかなりの時間が費やされます。このような軌道は、[...]アヒルと呼ばれます。」

Verhulst (2014) は、周期的なロジスティック方程式に関連して、このようなアヒルの出現にも言及しました。結ばれる関係 (3) τ^* そして τ_2 は、対応する「入出力関係」です (Benoît, 1981; De MaesschalckおよびSchechter, 2016)。

これらの発言は、出生と死亡のプロセスの場合、間違いなく出生行列を含むいくつかのタイプ (BacaërおよびAit Dads, 2014) に拡張されます。 $\mathcal{A}(\tau)$ および遷移または死行列 $\mathcal{B}(\tau)$ 、低速で高速なフォームシステムにつながります

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1. \end{aligned}$$

* 転置行列を示します。この場合、入出力関係はまだ決定されていません。

3 SIRモデル

3.1いくつかのシミュレーション

ここで、SIRモデルを検討します (6)。パラメータはもっともらしいように選択されています：

- 総人口は $N = 10\,000$;
- 流行の始まりに一人だけが感染した ($i = 1$) ;
- 一人一人が平均して持っている $\bar{a} = 15$ 月あたりの連絡先;
- 感染の平均期間は $1/b = 1/10$ 数か月、約3日。
- 期間 T 月の1/4、つまり約7日です。
- 周期係数は

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

と $\omega = 2\pi/T$ そして $|k| \leq 1$;

- 位相シフトは $\psi = -\pi/2$ そのため $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ と接触率 $a(t)$ $t=0$ で増加フェーズにあります。

再現性は $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ 、最終的なサイズの伝染病の発症を保証します $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ (バカエルとゴメス, 2009)。

図3は、モデルの2つの典型的なシミュレーションを示しています。 $k = 0$ (接触率は一定です)、他の $k = 1$ (接触率は変動します)。カーブは $k = 1$ とは大きく異なります $k = 0$ 流行時には、最終的なサイズが $R(\infty)$ どちらのシミュレーションでも、グラフィックではほとんど区別できません。これについては、次のセクションで説明します。

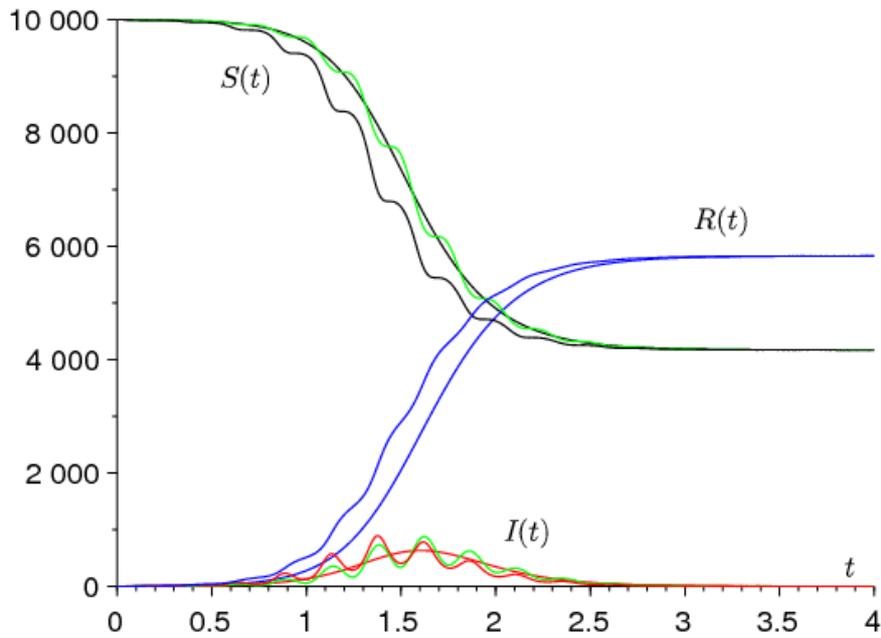


図3.流行のシミュレーション： $S(t)$ 黒で、 $I(t)$ 赤と $R(t)$ 時間 t の関数としての青色（月単位）。非波状曲線は $k=0$ に対応し、波状曲線は $k=1$ に対応します。緑の曲線は、2次近似です $S(t)$ そして $I(t)$ 。

振動の周期を減らすことにより（例えば、 $T = 1/8$ 数ヶ月）、私たちは曲線を見ます $(S(t), I(t), R(t))$ ために $k=1$ 振動を維持しますが、ソリューションに近づきます $k=0$ 、私たちは注意します $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ に対応するため $a(t) = \bar{a}$ 。さらに、これはFatouの平均化定理の結果です（Françoise、2005、定理42）。確かに $\tau = t/T$ 、システムが書き込まれます

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

と $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ 。定理は、 $T \rightarrow 0$ 、

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

しばらくの間 τ のオーダー $1/T$ 。このように $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ のオーダーの時間 t の間。より正確には、定数があります。 c_1 、 c_2 、 c_3 そして T_0 すべてが肯定的で $0 < T < T_0$ そしてのために $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

2次近似を計算できます。システム (11) を次の形式で記述しましょう $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$ 、 $Z = (S, I, R)$ 。 $f(\tau, Z)$ は、 τ に関する周期1の周期関数です。私たちは

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^T [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a} k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a} k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

式を削除する必要があります $\sin(\psi)$ したがって、これらの後者の関数はゼロ平均です。

(Françoise, 2005, theorem 44) によれば、

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

そして $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ 時間間隔で τ のオーダー $1/T$ 。言い換えると、

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

そして $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ 時間間隔で t のオーダー 1 。これらの近似 $S(t)$ そして $I(t)$ 図3では緑色で示されています。

(Bacaërand Gomes, 2009) のシミュレーションとは異なり、接触率が小さい期間では、いくつかの大きな波の流行曲線は観察されません。これは、接触率が平均的な場合にシステムがますます近づき、流行波が1つだけになるためです。

3.2 伝染病の最終的なサイズへの近さ

最初の式 (6) を次の形式で記述します。 $\frac{d}{dt} (\log S) = -a(t)I/N$ 、を統合することにより $t = 0$ そして $t = +\infty$ 、初期条件を考慮して $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ 、(BacaBr, 2019) のように簡単に見つけることができます

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

振動積分 $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ おそらく0に収束します $T \rightarrow 0$ 。確かに、私たちは一方では $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ 。一方、少なくとも ϕ コサイン、積分 $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ ときに0に収束します $T \rightarrow 0$ 。確かに、機能 $\bar{I}(t)$ ポジティブで統合可能です $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ 。可積分関数のフーリエ変換は、無限大で0に収束します。

その結果、 $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ もし $T \rightarrow 0$ 。問題は、これがどれだけ早く起こるかです。最初の近似として、方程式 (12) は

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

(Bacaër, 2019) のように。

次に使用します $\bar{I}(t)$ ケルマックとマッケンドリックによって得られた対称的なベルの形の近似分析式 (たとえば、(Bacaër, 2019) または (Gani, 1975) を参照)。と $\bar{a}/b > 1$ 、 $\bar{a}/b \simeq 1$ そして $i/N \ll 1$ 、我々は持っています

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t-W)]}. \quad (13)$$

$\text{ch}(\cdot)$ 双曲線余弦を示し、

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1-b/\bar{a})^2]}{\bar{a}-b}, \quad X \simeq \frac{(1-b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a}-b}{2} \quad (14)$$

おそらく追加の仮定の下で $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ 。 W 一定の環境における流行のピークの前に経過する時間の概算です。

最後に、 $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ 図3のように。 $\text{Re}(\cdot)$ 複素数の実部と i 通常の虚数 (混同しないでください) i 、最初に感染した集団)。次に、定常ではない位相を持つ複素積分の漸近計算の古典的な結果を使用して、主項が積分区間のエッジから来るようにします (Ovaert and Verley, 1997, Theorem 3) 、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t-W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t-W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

近似 (14) を使用すると、さらに

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1-b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

最終的には $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

最終的なサイズ $\bar{R}(\infty)$ 一定の環境では、方程式に対する唯一の厳密に正の解です

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

これは式 (12) から簡単に見つかります。と $i \ll N$ 、最終サイズ $\bar{R}(\infty)$ 初期状態にほとんど依存しない i 。これはおおよそ厳密に正の解決策です

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

式 (15) の補正項は、正または負にすることができます。それはの兆候に依存します $\sin(\psi)$ 。両方に比例します $1/\omega$ 、つまり T に、そして最初に感染した人々の i/N 部分に。これが、発表されたように、流行の最終的なサイズが接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに著しく近い理由です。

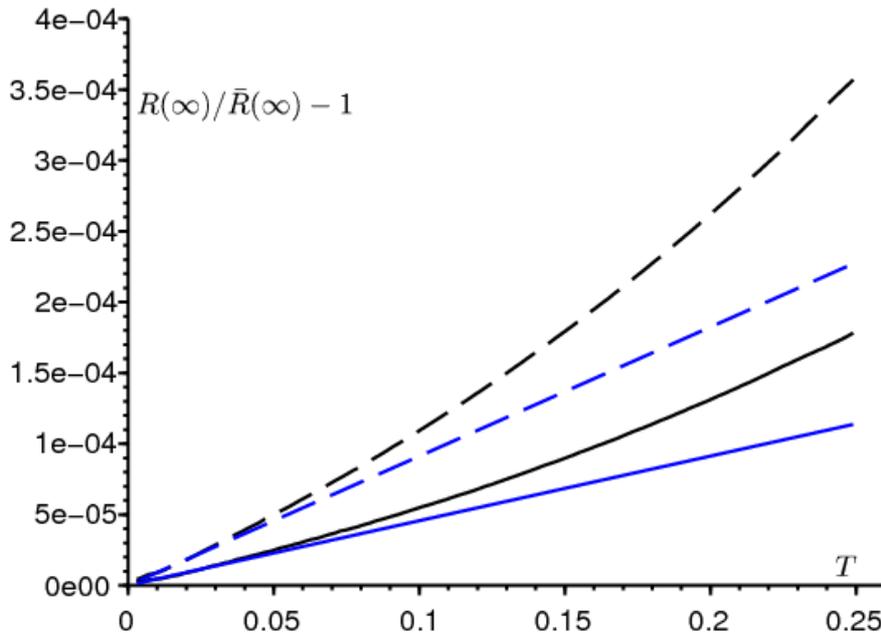


図4. 相対的な違い $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ 期間による伝染病の最終的なサイズの間 T 。黒で、 $R(\infty)$ 微分方程式系をシミュレーションすることにより推定されます。近似 (15) は青色で示されています。パラメータは図3と同じです。 $k = 1$ 、期間を除いて T から 0,25 月とあれ $i = 1$ (実線) または $i = 2$ (点線)。

これは、 $k = 1$ の場合の図3のパラメータと同一のパラメータの値とともに図4に示されている。期間 T は変動します。また、2つの初期条件を試しました。 $i = 1$ そして $i = 2$ 。の曲線 $R(\infty)$ 次の場合、近似 (15) に正接します $T \rightarrow 0$ 。垂直スケールで、相対的な差の小ささに注意してください $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ 。では $N = 10000$ 、これは1または2人 (サイズは原則的に整数でなければなりません) の違いにより、最大で流行の最終的なサイズのために変換されます。と $\bar{a}/b = 1,5$ 、KermackとMcKendrickの近似 (13) はまだ比較的良好です (Gani, 1975、p. 240)。

ψ がゼロまたは π の整数倍の場合、式 (15) の修正項はゼロです。しかし、これは例外的なケースであるため、積分の新しい同等物を見つけることは価値がないかもしれません $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ 上記。

結論として、最終的なサイズの近さは $R(\infty)$ そして $\bar{R}(\infty)$ 多くの流行モデルでは、短期間の振動が無視され、平均接触率のみが考慮されるという事実を正当化します。

参考文献

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoit (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) Calculs asymptotiques, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.