

慢速或快速周期性环境中的两种人口模型

J. Math. Biol. 80 (2020) 1021-1037
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
复杂系统的数学和计算机建模单位
, 法国
巴黎莱斯科德利耶尔 nicolas.bacaer@ird.fr

总结

我们在缓慢或快速的周期性环境中解决人口动态中的两个问题。首先，当周期大小时，我们获得具有周期系数的生死线性过程不消灭的概率的近似值。如果在此期间的某个时期内出生率低于死亡率，并且该时期趋于无穷大，则非灭绝的可能性会收敛到与慢速系统中与“鸭子”相关的不连续极限。其次，当接触率快速振荡时，我们研究了一种SIR型非线性流行病模型。流行病的最终规模接近通过用平均接触率代替接触率获得的规模。

1引言

在一段时间前发表的工作中 (Bacaër, 2015年)，我们研究了当周期趋于0或无穷大的周期性环境中的种群动态模型 (随机SIS模型) 的极限。我们在这里建议以相同的方式研究两个明显更简单的模型：出生和死亡的线性过程和SIR类型的确定性流行病模型。这两个模型可以看作是相同的随机SIR模型的近似值。流行开始时，出生和死亡过程近似。新感染起着分娩的作用，愈合起着死者的作用。当感染人数已经足够大时，将确定性模型用作近似值。

因此，让我们首先考虑出生率可变的环境中出生和死亡的线性过程 $a(t)$ 和死亡率 $b(t)$ 。该过程开始于 $t = t_0$ 一个人。不灭绝的概率是

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

分母中的积分是有限的还是无限的 (Gani, 1975, 第220页)。这尤其适用于以下情况： $a(t)$ 和 $b(t)$ 假设是同一时期的周期性 T 。我们假设

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

在哪里 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 是周期1的周期性函数。考虑均值

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

所以 $p(t_0)$ 如果等于，则等于0 $\bar{a} \leq \bar{b}$ 。是功能 T -定期严格为正，如果小于1，则严格小于1 $\bar{a} > \bar{b}$ (请参阅 (Bacaër, 2007, §5.2) 和 (Bacaër和Ait Dads, 2014))。现在我们假设 $\bar{a} > \bar{b}$ 。这是超临界情况。

正如最近指出的那样，当周期 T 很小或很大时，公式 (1) 被简化 (Carmona和Gandon, 2019)。如果 $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ 是固定的，如果 $T \rightarrow 0$ ，然后 $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ 。如果 $t_0/T = \tau_0$ 是固定的，如果 $T \rightarrow +\infty$ ，然后 $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ ，至少对于 τ_0 在哪里 $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ 。

以下目的是通过提出灭绝概率的近似值来澄清这些观察结果。极限 $T \rightarrow 0$ 最简单：我们有

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

如果 $T \rightarrow +\infty$ ，我们假设函数 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 是正规的（例如与连续导数可微），并考虑两种情况：

- $A(\tau) > B(\tau)$ 为 $\tau \in [0, 1]$ （超临界情况）；
- $A(\tau) > B(\tau)$ 为 $\tau \in [0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1]$ 在哪里 $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ 和 $A(\tau) < B(\tau)$ 为 $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$ （弱超临界情况）。

不失一般性，在第二种情况下可以进一步假定 $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ 。然后有一个独特的 $\tau^* \in]0, \tau_1[$ 与

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

我们在第2节中表明，在第一种情况下 $\tau_0 \in [0, 1]$ ，在第二种情况下 $\tau_0 \notin]\tau^*, \tau_2[$ ，

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

在第二种情况下 $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ ，

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

当出现以下情况时，该最后一个概率迅速指数收敛至0 $T \rightarrow +\infty$ 。因此，最终， $\tau_0 = \tau^*$ 。该限制不仅为零 $]\tau_1, \tau_2[$ 而且在 $]\tau^*, \tau_2[$ 。如第2.6节所述，这与慢速系统中的“鸭子”现象有关。

接下来，考虑确定性SIR流行模型。我们定义

- N ：假设人口的恒定规模，
- $S(t)$ ：当时健康的人数 t ，
- $I(t)$ ：感染人数，
- $R(t)$ ：由于被治愈和接种了疫苗而从传播链中移出的人数，
- $a(t)$ ：传染性接触率，
- b ：治愈率。

所以 $N = S(t) + I(t) + R(t)$ 。假定在Kermack和McKendrick的简化模型中（例如，参见（Hillion, 1986, 第75页）），

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

因此，每个健康个体都受总人口中受感染个体的 I/N 比例的影响，换句话说，受“平均场”的影响，而不是受特定接触结构中其邻域的影响。

在最近的工作中（Bacaër, 2019年），我们对接触率小幅度的周期性振荡将对这一流行病的最终规模产生的影响感兴趣。在此，我们将集中讨论振幅是任意的，但振荡周期与典型的流行持续时间相比较小的情况。对于将持续数周的流行病，这将代表例如昼夜之间的快速交替。对于持续数月的流行病，这将代表工作日和周末之间的交替，尤其是对于学校中的流行病。对于将持续数年甚至数十年的流行病，这将代表冬季和夏季之间的交替。

振荡周期为 $T > 0$ 。此参数旨在收敛为0。我们假设

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

与

- $\bar{a} > 0$,
- ϕ : 具有连续功能

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

所以 $a(t)$ 是周期 T 的周期函数, 其平均值 \bar{a} 。流行开始时以初始条件为准

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

与 $0 < i < N$ 。

3.1节显示了此模型的仿真。从示例中我们可以看到, 该流行病的最终规模非常接近通过用其平均值代替接触率所获得的规模。在第3.2节中, 我们通过对模型的参数进行一些其他假设, 特别是通过假设感染人群的初始比例很小且该流行病的可再现性仍接近1, 来对这种接近性进行解释。用于对流行病的最终规模进行校正的近似公式。这种校正既与振荡周期成正比, 也与感染者的初始比例成正比, 因此很小。

2生与死的过程

2.1初步计算

首先让我们看一下出生与死亡的线性过程。让我们考虑公式 (1) 的分母的积分并加以注意

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

根据定义, 我们有

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

我们有 $t_0/T = \tau_0$ 。我们定义 $u = t/T$ 和 $v = s/T$ 。因此, 使用函数的周期性 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$, 我们得到

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

所以

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2极限 $T \rightarrow 0$

与近似 $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ 为 $x \rightarrow 0$ 在积分之前的因子中, 更简单地说 $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ 在积分中, 我们得到

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

我们注意到

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

我们推断

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

用 $p(t_0) = 1/(1 + J)$, 我们推导公式 (2)。

2.3 极限 $T \rightarrow +\infty$: 高度超临界的情况

让我们回到公式 (7)。积分形式为

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

与

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

我们有

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

我们首先假设 $A(\tau) > B(\tau)$ 为 $\tau \in [0, 1]$ 。所以 $F'(u) > 0$ 为了一切 $u \in [0, 1]$, $F(u)$ 至少在 $u = 0$ 和 $F(0) = 0$ 。另外, $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ 如果 $u \rightarrow 0$, 带有 $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ 和 $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ 。再说 $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ 如果 $u \rightarrow 0$, 带有 $\psi_0 = B(\tau_0)$ 和 $\psi_1 = B'(\tau_0)$ 。根据一个 Erdélyi 定理 (Olver, 1974年, 第85页),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

与 $c_0 = \psi_0/\phi_0$ 和 $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ 。因为 $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ 很小, 公式 (7) 给出

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

用 $p(t_0) = 1/(1 + J)$, 我们推导公式 (4)。

2.4 弱超临界情况

假设现在有 τ_1 和 τ_2 与 $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ 和

$$A(\tau) < B(\tau) \text{ 为 } \tau \in]\tau_1, \tau_2[,$$

$$A(\tau) > B(\tau) \text{ 为 } \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[.$$

因为 $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$, 我们两种可能性:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0, \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

我们假设第一个不等式是正确的, 即使这意味着随着时间的推移会改变功能 $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 。

然后有一个独特的 $\tau^* \in [0, \tau_1]$ 与

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

确实, 如果

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

所以 $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$ 为 $\tau \in [0, \tau_1]$ 。另外, $h(0) > 0$ 根据第一个不等式 (9) $h(\tau_1) < 0$ 。所以有一个独特的 $\tau^* \in [0, \tau_1]$ 与 $h(\tau^*) = 0$ 。

让我们首先考虑一下 $0 < \tau_0 < \tau_1$ 。功能 $F(u)$ 为增加 $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ 。为减少 $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ 。它再次增长 $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。功能 $F(u)$ 因此在 $\tau_2 - \tau_0$ 。请记住 $F(0) = 0$ 。

如果 $\tau_0 \in]0, \tau^*[$, 然后 $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ 。所以 $u = 0$ 仍然是 $F(u)$ 在间隔 $[0, 1]$ 。渐近展开 (8) 仍然有效, 公式 (4) 仍然有效。

另一方面, 如果 $\tau \in]\tau^*, \tau_1[$, 然后 $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ 。整体最低 $F(u)$ 在间隔 $[0, 1]$ 在 $u = \tau_2 - \tau_0$, $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$, $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$ 和

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

如果 $T \rightarrow +\infty$, 根据拉普拉斯方法 (Ovaert和Verley, 1997)。所以

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

和 $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ 如果 $T \rightarrow +\infty$, 得到公式 (5)。

现在考虑这种情况 $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ 。功能 $F(u)$ 在间隔内减少 $[0, \tau_2 - \tau_0]$ 然后在间隔内增加 $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。在此期间的最小值 $[0, 1]$ 因此到达 $u = \tau_2 - \tau_0$, 就像前面的情况一样。因此, 公式 (5) 仍然有效。

最后, 考虑以下情况 $\tau_2 < \tau_0 < 1$ 。功能 $F(u)$ 在间隔内增加 $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ 。在整个时间间隔内减少 $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ 。随着时间间隔的增加 $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ 。因此, 它在 $1 + \tau_2 - \tau_0$ 和

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

根据第一个不等式 (9)。其整体最小值 $[0, 1]$ 因此在 $u = 0$ 时达到。因此, 适用的是式 (4)。

2.5 范例

让我们来 $B(\tau) = \bar{b} > 0$ 常数和

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

与 $\bar{a} > \bar{b}$ 和 $0 \leq k \leq 1$ 。高度超临界情况对应于 $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。如果相反 $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$, 然后 $\tau_1 < \tau_2$ 是两个解决方案 $[0, 1]$ 等式的 $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$, 即

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

门槛 τ^* 是解决方案 $[0, \tau_1]$ 等式的

$$(\bar{a} - b)(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

公式 (2) 给出

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

如果 $T \rightarrow 0$ 。如果 $\bar{a}(1 - k) > b$ 或者如果 $\bar{a}(1 - k) < b$ 和 $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ ，则公式 (4) 给出

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

如果 $T \rightarrow +\infty$ 。如果 $\bar{a}(1 - k) < b$ 和 $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ ，公式 (5) 给出

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

如果 $T \rightarrow +\infty$ 。

让我们特别考虑 $\bar{b} = 1$ ， $\bar{a} = 3$ 和 $k = 0,5$ 。所以 $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。图1显示了该期间的两个值的结果： $T = 0,5$ 和 $T = 50$ 。不灭绝的可能性 $p(t_0)$ 通过与 Scilab 软件进行数值积分可以估算公式 (1) 给出的。我们可以看到近似公式 (2) 和 (4) 给出了更好的近似值。但是请注意 $T \rightarrow +\infty$ ，近似值 (4) 与 $p(t_0)$ 在最小的附近 $p(t_0)$ 。

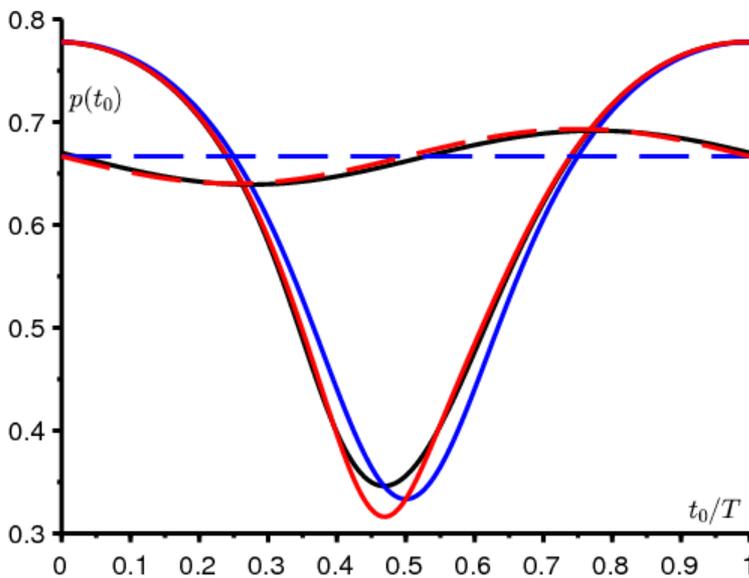


图1.两个示例： $T = 0,5$ （点）和 $T = 50$ （实线）。不灭绝的可能性 $p(t_0)$ 由公式 (1) 给出的黑色。虚线：红色的近似公式 (2) 及其近似值 $1 - \bar{b}/\bar{a}$ 在蓝色。实线：红色的近似公式 (4) 和近似值 $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 在蓝色。

现在开始 $\bar{b} = 1$ ， $\bar{a} = 3$ ， $k = 0,75$ 和 $T = 100$ 。所以 $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ， $\tau^* \simeq 0,347$ ， $\tau_1 \simeq 0,424$ 和 $\tau_2 \simeq 0,576$ 。各种近似公式在图2中表示，尤其是公式 (5) 以绿色表示。不灭绝的可能性收敛到不连续的极限。对于 $\tau < \tau^*$ 和 $\tau > \tau_2$ ，限制为蓝色。对于 $\tau^* < \tau < \tau_2$ ，极限等于0。存在一个近似值，将近似值连接到 $\tau_0 = \tau_2$ ，这使我们更仔细地了解了此时的情况。

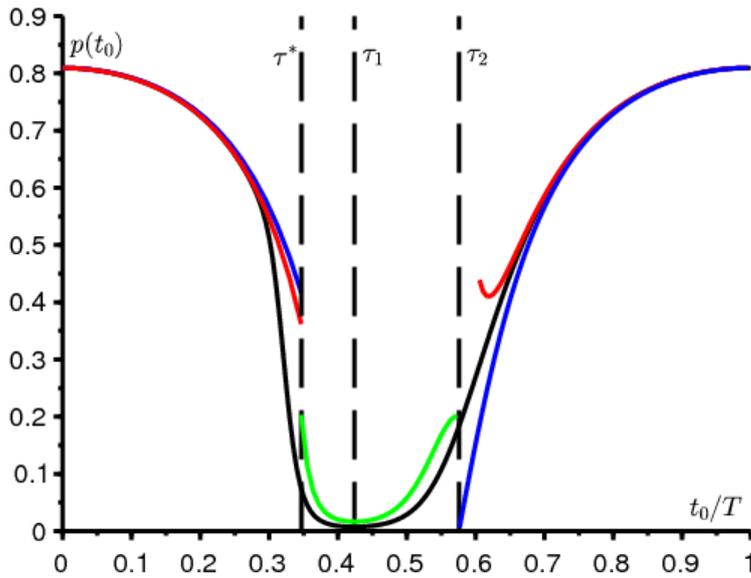


图2.与图1相同, 但是 $T = 100$ 和 $k = 0,75$ 。近似公式 (5) 为绿色。

就像在 $\tau_2 < \tau_0 < 1$ 在第4.2节中, 我们看到在特殊情况下 $\tau_0 = \tau_2$ 那 $F(u)$ 在全球最高 $[0, 1]$ 在 $u = 0$ 。但是这次 $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ 。根据同一个Erdélyi定理 (Olver, 1974年, 第85页),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

这样 $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ 如果 $T \rightarrow +\infty$ 。公式 (5) 在以下情况下仍然有效 $\tau_0 = \tau_2$ 。指数衰减到0时 $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ 取而代之的是减少 $1/\sqrt{T}$ 到这一点 τ_2 。

2.6与“鸭子”链接

公式 (1) 表示灭绝的可能性 $p(t_0)$ 当时 t_0 实际获得如下: $u > t_0$, 该过程在时间 u 处灭绝的概率, 该概率始于某个时间的个体 t_0 是 $z(u - t_0)$ 与 $z(0) = 0$ 和

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër和Ait Dads, 2014年)。因为这个Riccati方程是明确可解的, 所以我们获得了公式 (1) 的非灭绝概率

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

让我们举个例子 $u = t_0 + nT$ 有没有正整数。然后写等式 (10)

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

如果 $s = t/T$ 和 $z(t) = x(s)$, 然后

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

在间隔 $s \in [0, n]$ 。可以将其写为慢速自治系统:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1\end{aligned}$$

为 $s \in [0, n]$ ，带有 $x(0) = 0$ 和 $y(0) = 0$ 。终于

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

如果 $T \rightarrow \infty$ ，我们在这个慢速系统上看到 $x(n) \rightarrow 1$ 在哪里 $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 。事实 $x(n)$ 停留在不稳定的分支上 1 为 $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$ 因此，与慢速系统研究中所谓的“鸭子”现象相同。回顾一下定义（Lobry, 2018, p.182）：

“在一个慢速的领域 \mathbb{R}^2 ，沿着吸引弧可能会在相当长的时间内（而不是无限小的）无限地接近慢曲线，然后沿着排斥弧花费大量的时间。这种轨迹被称为鸭子。”

Verhulst（2014）还注意到这种鸭子的出现与周期性逻辑方程有关。绑定的关系（3） τ^* 和 τ_2 是相应的“投入产出关系”（Benoît, 1981；De Maesschalck和Schechter, 2016）。

这些言论无疑在涉及出生矩阵的生死过程中扩展为几种类型（Bacaër和Ait Dads, 2014年）。 $\mathcal{A}(\tau)$ 以及过渡或死亡矩阵 $\mathcal{B}(\tau)$ ，这导致表格系统运行缓慢

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1,\end{aligned}$$

在哪里 * 表示转置矩阵。在这种情况下，输入-输出关系仍有待确定。

3 SIR模型

3.1一些模拟

现在考虑SIR模型（6）。选择的参数是合理的：

- 总人口是 $N = 10\,000$ ；
- 流行开始时只有一个人被感染 ($i = 1$)；
- 每个人平均 $\bar{a} = 15$ 每月联系人；
- 平均感染时间为 $1/b = 1/10$ 月，大约3天；
- 期间 T 是一个月的1/4，或大约7天；
- 周期性因素是

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

在哪里 $\omega = 2\pi/T$ 和 $|k| \leq 1$ ；

- 相移是 $\psi = -\pi/2$ 这样 $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ 和接触率 $a(t)$ 处于增长阶段 $t = 0$ 。

然后重现性 $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ ，这保证了最终流行病的发展 $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ （Bacaër和Gomes, 2009年）。

图3显示了该模型的两个典型仿真： $k = 0$ （接触率是恒定的），另一个 $k = 1$ （接触率振荡）。虽然曲线为 $k = 1$ 明显不同于 $k = 0$ 在流行期间，最终的规模非常明显 $R(\infty)$ 在这两种模拟中，图形化几乎无法区分。下一节将对此进行解释。

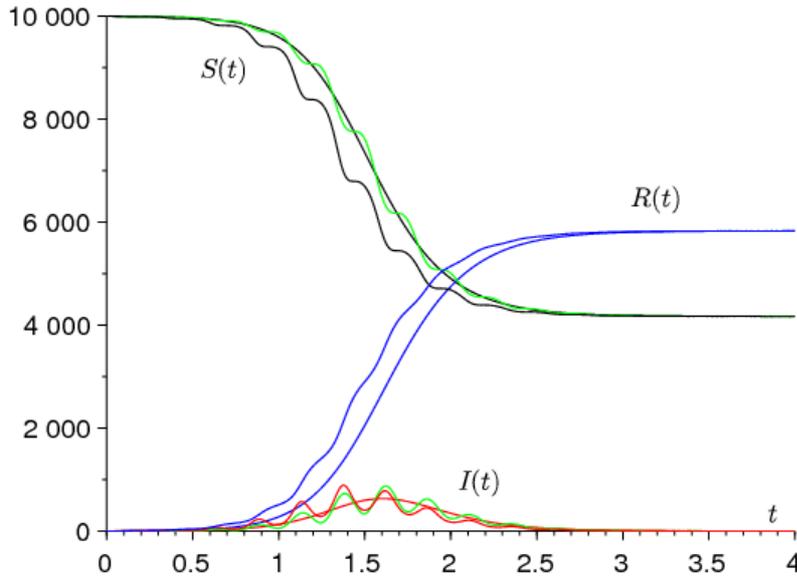


图3.流行病的模拟: $S(t)$ 黑色 $I(t)$ 用红色和 $R(t)$ 蓝色作为时间的函数 t (以月为单位)。非波浪曲线对应于 $k = 0$, 位于的波浪曲线 $k = 1$ 。绿色曲线是的二阶近似 $S(t)$ 和 $I(t)$ 。

通过减少振荡周期 (例如 $T = 1/8$ 的月份), 我们将看到曲线 $(S(t), I(t), R(t))$ 为 $k = 1$ 保持振荡, 但通过 $k = 0$, 我们注意到 $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ 因为它对应于 $a(t) = \bar{a}$ 。而且, 这是法图平均定理的结果 (Françoise, 2005, 定理42)。确实, 如果 $\tau = t/T$, 系统编写

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

与 $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ 。该定理确保 $T \rightarrow 0$,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

有一阵子 τ 的 $1/T$ 。所以 $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ 有一阵子 t 大约为1。更确切地说, 有常数 c_1, c_2, c_3 和 T_0 都积极, 与 $0 < T < T_0$ 和为 $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

我们可以计算出二阶近似值。让我们以以下形式编写系统 (11) : $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$, 在哪里 $Z = (S, I, R)$ 和 $f(\tau, Z)$ 是 τ -周期1的周期

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

请注意, 必须删除表达式 $\sin(\psi)$ 因此, 这些后面的函数的均值为零。根据 (弗朗索瓦, 2005年, 定理44), 我们有

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

和 $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ 在一段时间内 τ 的 $1/T$ 。换句话说,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

和 $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ 在一段时间内 t 的 $1/\omega$ 。这些近似值 $S(t)$ 和 $I(t)$ 在图3中以绿色显示。

请注意, 在较小的接触率周期内, 我们没有观察到具有几个大波浪的流行曲线, 这与 (Bacaër和Gomes, 2009) 的模拟不同。这是因为系统越来越接近平均接触率的情况, 后者仅产生一次流行病。

3.2 接近流行病的最终规模

通过将第一个方程式 (6) 编写为 $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$, 通过 $t = 0$ 和 $t = +\infty$ 并考虑了初始条件以及 $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$, 很容易在 (Bacaër, 2019) 中找到

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

振荡积分 $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ 大概会收敛到 0 $T \rightarrow 0$ 。的确, 我们一方面知道 $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ 。另一方面, 至少当 ϕ 是余弦, 积分 $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ 当收敛到 0 $T \rightarrow 0$ 。确实, 函数 $\bar{I}(t)$ 是积极的和可整合的, 因为 $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ 。可积函数的傅立叶变换在无穷大处收敛为 0 。

因此 $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ 如果 $T \rightarrow 0$ 。问题是这种情况发生的速度如何。作为一阶近似, 方程 (12) 给出

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

就像 (Bacaër, 2019)。

然后我们用于 $\bar{I}(t)$ 由Kermack和McKendrick获得的对称钟形形式的近似分析表达式 (例如参见 (Bacaër, 2019) 或 (Gani, 1975))。如果 $\bar{a}/b > 1$ 如果 $\bar{a}/b \simeq 1$ 如果 $i/N \ll 1$, 然后

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{NX}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

在哪里 $\text{ch}(\cdot)$ 表示双曲余弦, 并且

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

在可能的附加假设下 $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ 。 W 是在恒定环境下流行高峰之前经过的时间的近似值。

最后假设 $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ 如图3所示。 $\text{Re}(\cdot)$ 复数的实部和 i 通常的虚数 (不要与 i , 最初感染的人群)。然后, 我们使用经典结果对具有非平稳相位的复积分进行渐近计算, 从而使主要项来自积分区间的边缘 (Ovaert和Verley, 1997, 定理3),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t-W)]} dt \\
&= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t-W)]} dt \right) \\
&\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\
&= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}.
\end{aligned}$$

通过逼近 (14), 我们还可以看到

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

最终为 $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

最终尺寸 $\bar{R}(\infty)$ 在恒定环境中是方程的唯一严格的正解

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

从等式 (12) 很容易找到。用 $i \ll N$, 最终尺寸 $\bar{R}(\infty)$ 很少取决于初始条件 i 。这大概是

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

等式 (15) 中的校正项可以为正或为负。这取决于 $\sin(\psi)$ 。两者都与 $1/\omega$, 即 T 和最初感染者的 i/N 部分。这就是为什么, 如所宣布的那样, 该流行病的最终规模非常接近通过用平均接触率代替接触率所获得的规模。

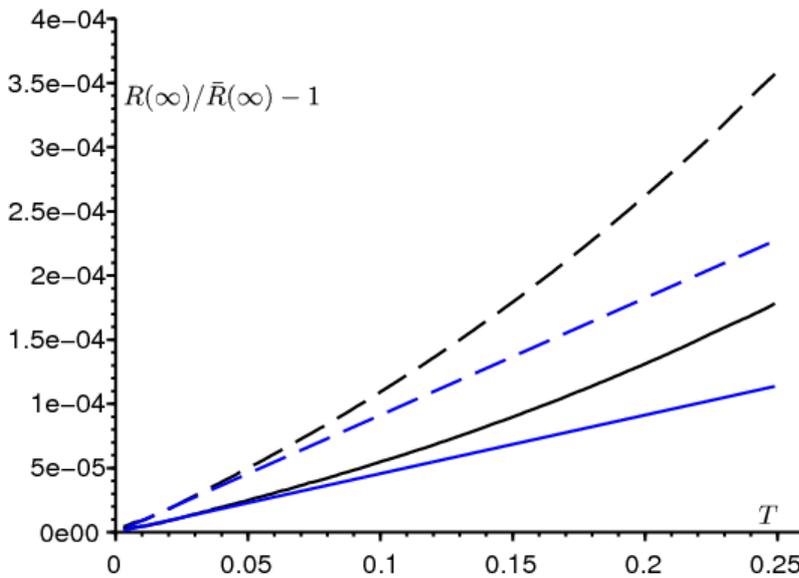


图4.相对差异 $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ 在不同时期之间流行的最终规模之间 T 。黑色 $R(\infty)$ 通过模拟微分方程组来估算。近似值 (15) 显示为蓝色。参数与图3相同, 其中 $k = 1$, 但期间 T 介于0和0,25 那个月 $i = 1$ (实线) 或 $i = 2$ (虚线)。

这在图4中用 $k = 1$ 的参数值与图3相同。周期 T 变化。我们还尝试了两个初始条件： $i = 1$ 和 $i = 2$ 。如果 $T \rightarrow 0$ ，曲线为 $R(\infty)$ 似乎与近似值很相切（15）。我们会在垂直尺度上注意到相对差异的微小程度 $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ 。在 $N = 10000$ 的情况下，这最终意味着该流行病的最终规模最多相差1或2个人（该尺寸原则上应为整数）。用 $a/b = 1,5$ ，Kermack和McKendrick的近似值（13）仍然相对较好（Gani, 1975, p. 240）。

如果 ψ 为零或 π 的整数倍，则等式（15）中的校正项为零。但是，由于这是例外情况，因此可能不值得为该积分找到一个新的等价物。 $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ 以上。

总之，我们可以说最终尺寸的接近度 $R(\infty)$ 和 $\bar{R}(\infty)$ 在某种程度上证明了以下事实：在许多流行病模型中，忽略了仅考虑平均接触率的短期振荡。

参考文献

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Françoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.