

# Две популяции модели в медленной или быстрой периодической среде

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037  
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем  
Les Cordeliers, Париж, Франция  
nicolas.bacaer@ird.fr

## резюме

Мы решаем две проблемы в динамике населения в медленной или быстрой периодической среде. Сначала мы получаем аппроксимацию вероятности не исчезновения линейного процесса рождения и смерти с периодическими коэффициентами, когда период большой или маленький. Если уровень рождаемости ниже, чем смертность в течение части периода, и если период стремится к бесконечности, то вероятность не исчезновения сходится к разрывному пределу, связанному с «уткой» в медленно-быстрой системе. Во-вторых, мы изучаем нелинейную эпидемическую модель типа SIR, когда скорость контакта быстро колеблется. Окончательный размер эпидемии близок к тому, который был получен путем замены частоты контакта на ее среднее значение.

## 1 Введение

В работе, опубликованной некоторое время назад (Bacaër, 2015), мы изучили предел модели динамики популяции, стохастической модели SIS, в периодической среде, когда период стремится к 0 или бесконечности. Здесь мы предлагаем аналогичным образом изучить две, по-видимому, более простые модели: линейный процесс рождения и смерти и детерминистическую эпидемическую модель типа SIR. Эти две модели можно рассматривать как приближения одной и той же стохастической модели SIR. Процесс рождения и смерти служит приближением в начале эпидемии; новые инфекции играют роль рождений, исцеления играют роль мертвых. Детерминированная модель используется в качестве приближения, когда число инфицированных людей уже достаточно велико.

Итак, давайте сначала рассмотрим линейный процесс рождения и смерти в переменной среде с уровнем рождаемости  $a(t)$  и смертность  $b(t)$ , Процесс начинается в  $t = t_0$  одним человеком. Вероятность не исчезновения

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

Является ли интеграл в знаменателе конечным или бесконечным (Гани, 1975, стр. 220). Это относится, в частности, к случаю, когда функции  $a(t)$  и  $b(t)$  периодичны того же периода, скажем,  $T$ , Мы предполагаем, что

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

где  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  являются периодическими функциями периода 1. Рассмотрим средства

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

то  $p(t_0)$  тождественно равен 0, если  $\bar{a} \leq \bar{b}$ , Это функция  $T$ -периодически строго положительно и строго менее 1, если  $\bar{a} > \bar{b}$  (см. (Bacaër, 2007, §5.2) и (Bacaër and Ait Dads, 2014)). Теперь мы предполагаем, что  $\bar{a} > \bar{b}$ , Это сверхкритический случай.

Формула (1) упрощается, когда период  $T$  либо очень маленький, либо очень большой, как недавно отмечалось (Carmona and Gandon, 2019). если  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  фиксируется и если  $T \rightarrow 0$  тогда  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ , если  $t_0/T = \tau_0$  фиксируется и если  $T \rightarrow +\infty$  тогда  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  по крайней мере для определенных значений  $\tau_0$  где  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ ,

Цель ниже состоит в том, чтобы уточнить эти наблюдения, предложив приближение вероятности вымирания. Предел  $T \rightarrow 0$  самое простое: у нас есть

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

если  $T \rightarrow +\infty$ , мы предполагаем, что функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  являются регулярными (скажем, дифференцируемыми с непрерывной производной) и рассмотрим два случая:

- $A(\tau) > B(\tau)$  для  $\tau \in [0, 1]$  (сильно сверхкритический случай);
- $A(\tau) > B(\tau)$  для  $\tau \in [0, \tau_1 \cup ]\tau_2, 1]$  где  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  и  $A(\tau) < B(\tau)$  для  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (слабо сверхкритический случай).

Без ограничения общности можно далее предположить, что во втором случае  $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ , Существует тогда уникальный  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  с

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Мы показываем в разделе 2, что в первом случае для  $\tau_0 \in [0, 1]$  и во втором случае для  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

Во втором случае с  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ ,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Эта последняя вероятность экспоненциально быстро сходится к 0, когда  $T \rightarrow +\infty$ , В конечном счете, поэтому существует разрыв в  $\tau_0 = \tau^*$ , Предел равен нулю не только в  $] \tau_1, \tau_2[$  но и в  $] \tau^*, \tau_2[$ , Это связано с феноменом «утки» в медленно-быстрой системе, как описано в разделе 2.6.

Далее рассмотрим детерминированную модель эпидемии SIR. Мы определяем

- $N$  : предполагаемый постоянный размер населения,
- $S(t)$  : количество здоровых людей в то время  $t$ ,
- $I(t)$  : количество людей, зараженных,
- $R(t)$  количество людей, удаленных из цепи передачи, потому что они исцелены и иммунизированы,
- $a(t)$  : скорость инфекционного контакта,
- $b$  : скорость излечения.

таким образом  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ , Предполагается, как и в упрощенной модели Кермака и МакКендрика (см., Например, (Hillion, 1986, p. 75)), что

$$\frac{dS}{dt} = -a(t) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t) \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Таким образом, на каждого здорового человека влияет соотношение  $I/N$  инфицированных людей в общей популяции, другими словами, «среднее поле», а не его соседство в конкретной структуре контактов.

В недавней работе (Васаёр, 2019) нас интересовало влияние периодических колебаний малой амплитуды скорости контакта на конечный размер эпидемии. Мы сосредоточимся здесь на случае, когда амплитуда произвольна, но когда период колебаний мал по сравнению с типичной продолжительностью эпидемии. Для эпидемии, которая будет длиться несколько недель, это будет означать, например, быстрое чередование дня и ночи. Для эпидемии, которая будет длиться несколько месяцев, это будет представлять собой чередование рабочих дней и выходных, особенно в случае эпидемий в школах. Для эпидемии, которая будет длиться несколько лет или даже несколько десятилетий, это будет представлять собой чередование зим и лет;

Период колебаний составляет  $T > 0$ , Этот параметр должен сходиться к 0. Мы предполагаем, что

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

с

- $\bar{a} > 0$ ,
- $\phi$  : непрерывная функция по частям с

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

таким образом  $a(t)$  является периодической функцией периода  $T$ , со средним  $\bar{a}$ , Возьмите в качестве начальных условий в начале эпидемии

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

с  $0 < i < N$ ,

Раздел 3.1 показывает моделирование этой модели. Из примеров видно, что окончательный размер эпидемии удивительно близок к тому, который был получен при замене уровня контакта на его среднее значение. В разделе 3.2 мы предлагаем объяснение этой близости, выдвигая некоторые дополнительные гипотезы о параметрах модели, в частности, предполагая, что первоначальная доля инфицированных людей мала и что воспроизводимость эпидемии остается близкой к 1. Мы получаем приближенная формула для корректировки к окончательному размеру эпидемии. Эта поправка пропорциональна как периоду колебаний, так и первоначальной доле зараженных людей, следовательно, ее малости.

## 2 Процесс рождения и смерти

### 2.1 Предварительный расчет

Давайте сначала посмотрим на линейный процесс рождения и смерти. Рассмотрим интеграл со знаменателем формулы (1) и отметим его

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

По определению имеем

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

У нас есть  $t_0/T = \tau_0$ , Мы определяем  $u = t/T$  и  $v = s/T$ , Итак, используя периодичность функций  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  мы получаем

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

таким образом

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

### 2.2 Предел $T \rightarrow 0$

С приближением  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  для  $x \rightarrow 0$  в фактор перед интегралом, а проще  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  в интеграле получаем

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Мы замечаем, что

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Мы выводим, что

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

с  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , выводим формулу (2).

## 2.3 Предел $T \rightarrow +\infty$ : сверхкритический случай

Вернемся к формуле (7). Интеграл имеет вид

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

с

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

У нас есть

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Давайте сначала предположим, что  $A(\tau) > B(\tau)$  для  $\tau \in [0, 1]$ , то  $F'(u) > 0$  для всего  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u)$  как минимум в  $u = 0$  и  $F(0) = 0$ , Кроме того,  $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  если  $u \rightarrow 0$  с  $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  и  $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ , Кроме того,  $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  если  $u \rightarrow 0$  с  $\psi_0 = B(\tau_0)$  и  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ , Согласно теореме Эрдели (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

с  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  и  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ , потому что  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  экспоненциально мала, формула (7) дает

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

с  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , выводим формулу (4).

## 2.4 Слабокритический случай

Предположим теперь, что есть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  с  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  и

$$\begin{aligned} A(\tau) < B(\tau) & \text{ для } \tau \in ]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) > B(\tau) & \text{ для } \tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[, \end{aligned}$$

потому что  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$  У нас есть две возможности:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

Мы предполагаем, что первое неравенство верно, даже если оно означает смещение функций во времени  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$ ,

Существует тогда уникальный  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  с

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

Действительно, если

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

то  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  для  $\tau \in [0, \tau_1]$ , Кроме того,  $h(0) > 0$  согласно первому неравенству (9) и  $h(\tau_1) < 0$ , Так что есть уникальный  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  с  $h(\tau^*) = 0$ ,

Давайте сначала рассмотрим случай, когда  $0 < \tau_0 < \tau_1$ , Функция  $F(u)$  увеличивается для  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ , Это уменьшается для  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ , Это снова растет для  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ , Функция  $F(u)$  поэтому имеет локальный минимум в  $\tau_2 - \tau_0$ , Помни что  $F(0) = 0$ ,

если  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$  тогда  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ , поэтому  $u = 0$  остается общий минимум  $F(u)$  на интервале  $[0, 1]$ , Асимптотическое развитие (8) остается в силе и формула (4) также.

Если, с другой стороны  $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$  тогда  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ , Общий минимум  $F(u)$  на интервале  $[0, 1]$  находится в  $u = \tau_2 - \tau_0$ ,  $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ ,  $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  и

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

если  $T \rightarrow +\infty$  по методу Лапласа (Ovaert and Verley, 1997). таким образом

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

и  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  если  $T \rightarrow +\infty$ , что дает формулу (5).

Теперь рассмотрим случай, когда  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ , Функция  $F(u)$  уменьшается в течение интервала  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  затем увеличивается в течение интервала  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ , Его минимум в то же время  $[0, 1]$  поэтому достигается в  $u = \tau_2 - \tau_0$ , как и в предыдущем случае. Таким образом, формула (5) остается в силе.

Наконец, рассмотрим случай, когда  $\tau_2 < \tau_0 < 1$ , Функция  $F(u)$  увеличивается в течение интервала  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ , Уменьшается в течение интервала  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ , Это увеличивается в течение интервала  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ , Поэтому он имеет локальный минимум в  $1 + \tau_2 - \tau_0$  и

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

согласно первому неравенству (9). Общий минимум в  $[0, 1]$  следовательно, достигается при  $u = 0$ . Таким образом, применяется формула (4).

## 2.5 Пример

Давайте возьмем  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  постоянная и

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

с  $\bar{a} > \bar{b}$  и  $0 \leq k \leq 1$ , Сверхкритический случай соответствует  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ , Если наоборот  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  тогда  $\tau_1 < \tau_2$  два решения в  $[0, 1]$  уравнения  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$  а именно

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

Порог  $\tau^*$  это решение в  $[0, \tau_1]$  уравнения

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

Формула (2) дает

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

если  $T \rightarrow 0$ , если  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$  или если  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  и  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$  тогда формула (4) дает

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

если  $T \rightarrow +\infty$ , если  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  и  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  [Формула (5) дает

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

если  $T \rightarrow +\infty$ ,

Давайте возьмем, в частности,  $\bar{b} = 1, \bar{a} = 3$  и  $k = 0,5$ , то  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . На рисунке 1 показаны результаты для двух значений периода:  $T = 0,5$  и  $T = 50$ . Вероятность не исчезновения  $p(t_0)$ , определяемый формулой (1), оценивается путем численного интегрирования с программным обеспечением Scilab. Мы видим, что приближенные формулы (2) и (4) дают лучшие приближения. Обратите внимание, что для  $T \rightarrow +\infty$ , приближение (4) немного отклоняется от  $p(t_0)$  в окрестности минимума  $p(t_0)$ ,

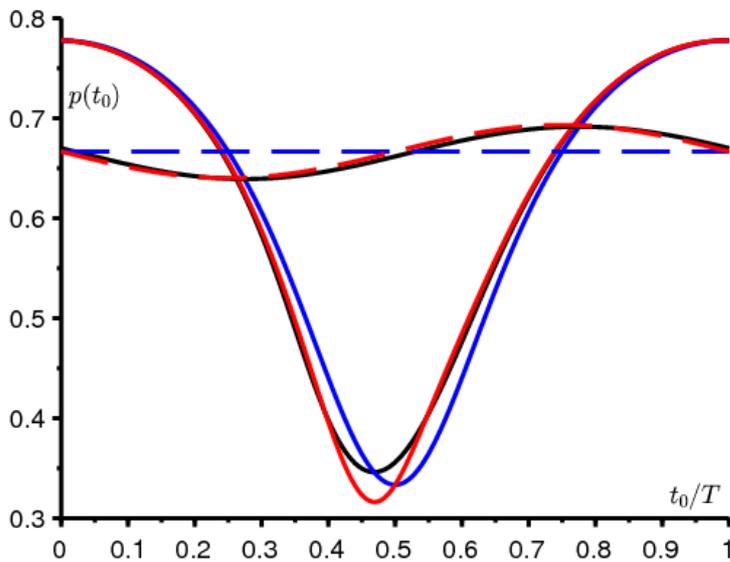


Рисунок 1. Два примера:  $T = 0,5$  (пунктир) и  $T = 50$  (сплошные линии). Вероятность не исчезновения  $p(t_0)$ , заданный формулой (1), выделен черным. Пунктирная линия: приближительная формула (2) красного цвета и аппроксимация  $1 - \bar{b}/\bar{a}$  в голубом. Сплошные линии: приближенная формула (4) красного цвета и приближение  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  в голубом.

Давайте возьмем сейчас  $\bar{b} = 1, \bar{a} = 3, k = 0,75$  и  $T = 100$ , то  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ,  $\tau^* \simeq 0,347, \tau_1 \simeq 0,424$  и  $\tau_2 \simeq 0,576$ . Различные приближительные формулы представлены на фиг.2, в частности формула (5) зеленого цвета. Вероятность не исчезновения сходится к разрывному пределу. для  $\tau < \tau^*$  и  $\tau > \tau_2$ , предел синий. для  $\tau^* < \tau < \tau_2$ , предел равен 0. Существует небольшая проблема подключения аппроксимаций на уровне  $\tau_0 = \tau_2$ , что побуждает нас поближе взглянуть на то, что происходит в данный момент.

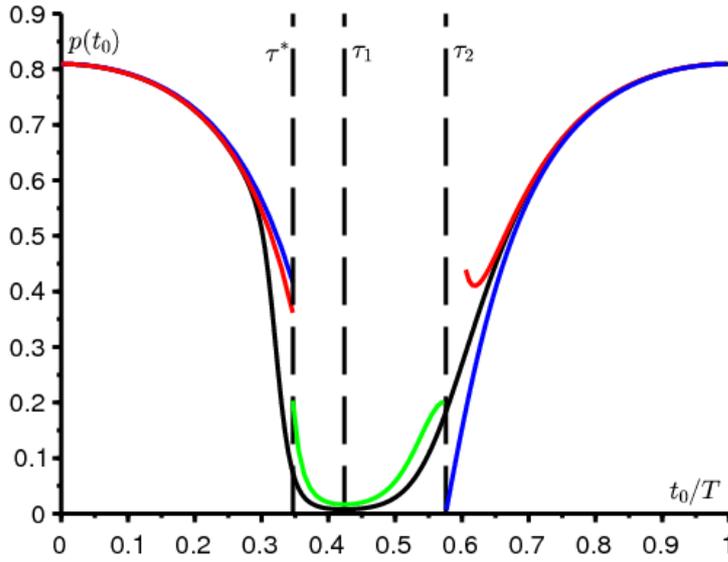


Рисунок 2. Как на рисунке 1, но с  $T = 100$  и  $k = 0,75$ , Примерная формула (5) выделена зеленым цветом.

Как и в случае, когда  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  в разделе 4.2 мы видим в особом случае, когда  $\tau_0 = \tau_2$  что  $F(u)$  на глобальном максимуме в  $[0, 1]$  в  $u = 0$ , Но на этот раз,  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ , Согласно той же теореме Эрдели (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

так что  $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  если  $T \rightarrow +\infty$ , Формула (5) остается в силе, когда  $\tau_0 = \tau_2$ , Экспоненциальный спад к 0, когда  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  заменяется уменьшением  $1/\sqrt{T}$  в точку  $\tau_2$ ,

## 2.6 Ссылка с "утками"

Формула (1) для вероятности вымирания  $p(t_0)$  в то время  $t_0$  фактически получается следующим образом: если  $u > t_0$ , вероятность исчезновения в момент времени  $u$  процесса, который начинается с человека в момент времени  $t_0$  является  $z(u - t_0)$  с  $z(0) = 0$  и

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Васаёр and Ait Dads, 2014). Именно потому, что это уравнение Риккати явно разрешимо, мы получаем формулу (1) для вероятности не исчезновения

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Давайте возьмем для примера  $u = t_0 + nT$  с  $n$  строго положительным целым числом. Уравнение (10) затем записывается

$$\frac{dz}{dt} = \left[ B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

если  $s = t/T$  и  $z(t) = x(s)$  тогда

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

на интервале  $s \in [0, n]$ , Это может быть записано как медленная быстрая автономная система:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

для  $s \in [0, n]$  с  $x(0) = 0$  и  $y(0) = 0$ , в конце концов

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

если  $T \rightarrow \infty$  мы видим на этой медленной-быстрой системе  $x(n) \rightarrow 1$  или  $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ . Тот факт, что  $x(n)$  остается на нестабильной ветке 1 для  $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$  следовательно, это то же явление, что и «утка» при изучении быстродействующих систем. Напомним определение (Лобри, 2018, стр. 182):

«В медленном быстром поле  $\mathbb{R}^2$ , могут существовать траектории, которые остаются бесконечно близко к медленной кривой в течение значительного времени (не бесконечно малого) вдоль привлекательной дуги, за которым следует значительное время, проведенное вдоль отталкивающей дуги. Такая траектория называется [...] уткой. »

Verhulst (2014) также отметил появление таких уток в связи с периодическим логистическим уравнением. Соотношение (3), которое связывает  $\tau^*$  и  $\tau_2$  это соответствующее «отношение ввода-вывода» (Benoît, 1981; De Maesschalck and Schecter, 2016).

Эти замечания, несомненно, распространяются в случае процессов рождения и смерти на несколько типов (Васаёр and Ait Dads, 2014) с матрицами рождения  $\mathcal{A}(\tau)$  и матрицы перехода или смерти  $\mathcal{B}(\tau)$ , которые приводят к медленной-быстрой системе форм

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

где  $*$  обозначает транспонированную матрицу. В этом случае отношение ввода-вывода еще предстоит определить.

## 3 Модель SIR

### 3.1 Некоторые симуляции

Теперь рассмотрим модель SIR (6). Параметры выбраны, чтобы быть правдоподобными:

- общая численность населения  $N = 10\,000$  ;
- только один человек был заражен в начале эпидемии ( $i = 1$ );
- каждый человек имеет в среднем  $\bar{a} = 15$  контакты в месяц;
- средняя продолжительность инфекции  $1/b = 1/10$  месяцы, около 3 дней;
- период  $T$  составляет 1/4 месяца или около 7 дней;
- периодический фактор

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

где  $\omega = 2\pi/T$  и  $|k| \leq 1$  ;

- фазовый сдвиг  $\psi = -\pi/2$  так что  $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$  и скорость контакта  $a(t)$  находится в возрастающей фазе в  $t = 0$ ,

Воспроизводимость тогда  $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ , что гарантирует развитие эпидемии с окончательным размером  $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$  (Васаёр and Gomes, 2009).

На рисунке 3 показаны два типичных моделирования модели: один с  $k = 0$  (скорость контакта постоянна), другой с  $k = 1$  (скорость контакта колеблется). Хотя кривые для  $k = 1$  значительно отличаются от тех, для  $k = 0$  во время эпидемии примечательно, что окончательные размеры  $R(\infty)$  в обеих симуляциях графически практически неразличимы. Это будет объяснено в следующем разделе.

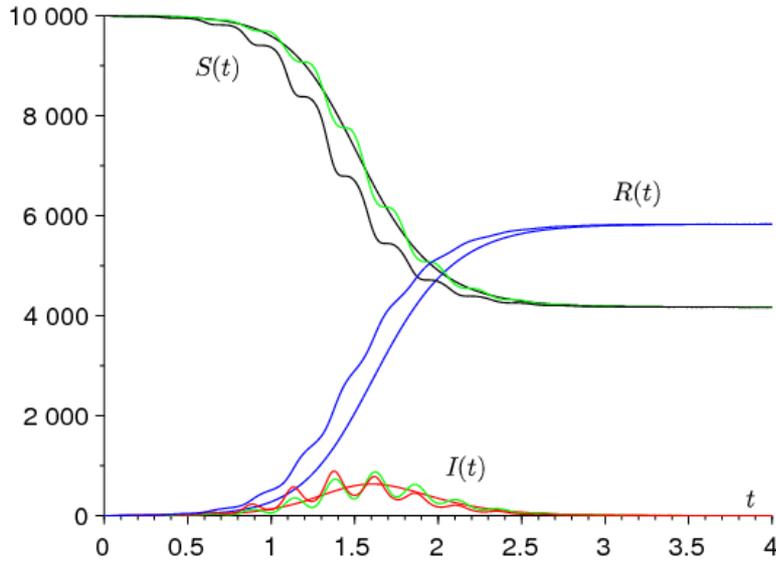


Рисунок 3. Моделирование эпидемии:  $S(t)$  в черном,  $I(t)$  в красном и  $R(t)$  синим цветом как функция времени  $t$  (в месяцах). Неволнистые кривые соответствуют  $k = 0$  волнистые кривые на  $k = 1$ , Зеленые кривые являются приближениями второго порядка для  $S(t)$  и  $I(t)$ ,

За счет уменьшения периода колебаний (например, с  $T = 1/8$  месяцев), мы бы увидели кривые  $(S(t), I(t), R(t))$  для  $k = 1$  держать их колебания, но стать ближе к решению с  $k = 0$ , который мы отмечаем  $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$  потому что это соответствует  $a(t) = \bar{a}$ . Более того, это является следствием теоремы Фату об усреднении (Франсуаза, 2005, теорема 42). Действительно, если  $\tau = t/T$  Система написана

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

с  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ , Теорема гарантирует, что когда  $T \rightarrow 0$ ,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

на некоторое время  $\tau$  порядка  $1/T$ , таким образом  $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$  на некоторое время  $t$  порядка 1. Точнее, есть константы  $c_1, c_2, c_3$  и  $T_0$  все положительное, с для  $0 < T < T_0$  и для  $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Мы можем вычислить приближение второго порядка. Запишем систему (11) в виде  $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$  где  $Z = (S, I, R)$  и  $f(\tau, Z)$  является  $\tau$  период 1 периода. Тогда

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что выражение должно быть удалено  $\sin(\psi)$  так что эти последние функции имеют нулевое среднее. Согласно (Франсуаза, 2005, теорема 44), мы имеем

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

и  $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$  через промежуток времени  $\tau$  порядка  $1/T$ , Другими словами,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

и  $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$  через промежуток времени  $t$  порядка 1, Эти приближения  $S(t)$  и  $I(t)$  показаны зеленым цветом на рисунке 3.

Обратите внимание, что при малом периоде контакта мы не наблюдаем эпидемическую кривую с несколькими большими волнами, в отличие от моделирования (Васаёр and Gomes, 2009). Это происходит потому, что система становится все ближе и ближе к случаю, когда частота контактов является средней, что дает только одну эпидемическую волну.

### 3.2 Близость к конечным размерам эпидемий

Записав первое уравнение (6) в виде  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$  путем интеграции между  $t = 0$  и  $t = +\infty$  с учетом начальных условий и того, что  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$  легко найти, как в (Васаёр, 2019), что

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

Колеблющийся интеграл  $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$  вероятно, сходится к 0, когда  $T \rightarrow 0$ , Действительно, мы знаем, с одной стороны, что  $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ , С другой стороны, по крайней мере, когда  $\phi$  это косинус, интеграл  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  сходится к 0, когда  $T \rightarrow 0$ , Действительно, функция  $\bar{I}(t)$  является положительным и интегрируемым, потому что  $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ , Преобразование Фурье интегрируемой функции сходится к 0 на бесконечности.

Отсюда следует, что  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  если  $T \rightarrow 0$ , Вопрос в том, как быстро это происходит. В первом приближении уравнение (12) дает

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

как в (Васаёр, 2019).

Тогда мы используем для  $\bar{I}(t)$  приближительное аналитическое выражение в форме симметричного колокола, полученное Кермаком и МакКендриком (см., например, (Васаёр, 2019) или (Gani, 1975)). если  $\bar{a}/b > 1$  если  $\bar{a}/b \simeq 1$  если  $i/N \ll 1$  тогда

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

где  $\text{ch}(\cdot)$  обозначает гиперболический косинус и

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

при вероятном дополнительном допущении  $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ ,  $W$  представляет собой приближительное время, которое проходит до пика эпидемии в постоянной среде.

Наконец предположим, что  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  как на рисунке 3. Отметим  $\text{Re}(\cdot)$  действительная часть комплексного числа и  $i$  обычное воображаемое число (не путать с  $i$  население изначально заражено). Затем мы имеем, используя классический результат об асимптотическом вычислении комплексных интегралов с фазой, которая не является стационарной, так что основной член исходит от края интервала интегрирования (Ovaert and Verley, 1997, теорема 3 )

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\
&= N X k \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\
&\simeq - N X k \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\
&= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}.
\end{aligned}$$

С помощью приближений (14) мы также видим, что

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

что в конечном итоге дает для  $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

Окончательный размер  $\bar{R}(\infty)$  в постоянной среде является единственным строго положительным решением уравнения

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

что легко найти из уравнения (12).  $ci \ll N$ , окончательный размер  $\bar{R}(\infty)$  очень мало зависит от начального условия  $i$ , Это примерно строго положительное решение

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

Корректирующий член в уравнении (15) может быть положительным или отрицательным; это зависит от знака  $\sin(\psi)$ , Это пропорционально  $1/\omega$ , т. е. к  $T/I/N$  фракции людей, изначально инфицированных. Вот почему, как было объявлено, окончательный размер эпидемии удивительно близок к тому, который был получен при замене частоты контакта на ее среднее значение.

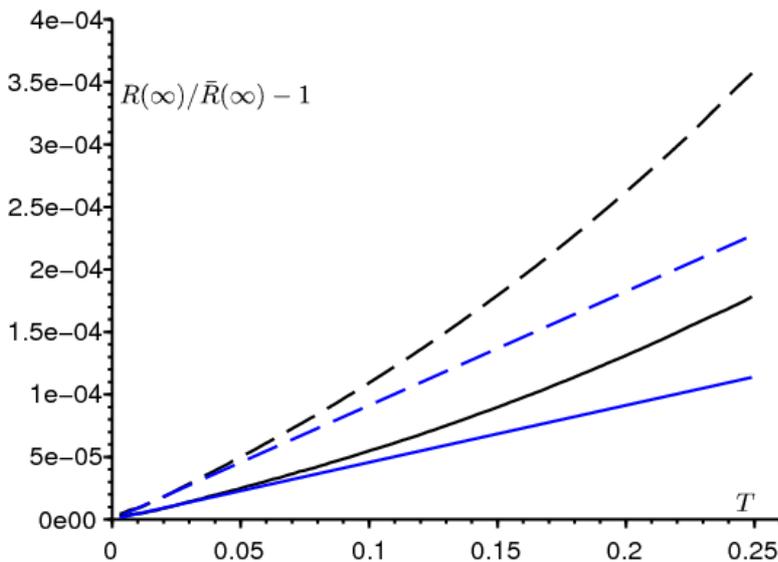


Рисунок 4. Относительная разница  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  между окончательными размерами эпидемий в зависимости от периода  $T$ . В черном,  $R(\infty)$  оценивается путем моделирования системы дифференциальных уравнений. Аппроксимация (15) показана синим цветом. Параметры такие же, как на рисунке 3 с  $k = 1$ , за исключением того периода  $T$  варьируется от 0 до 0,25 месяц и что  $i = 1$  (сплошные линии) или  $i = 2$  (Пунктирная линия).

Это показано на фиг.4 со значениями параметров, идентичными значениям на фиг.3 для  $k = 1$ . Период  $T$  меняется. Мы также попробовали два начальных условия:  $i = 1$  и  $i = 2$ , если  $T \rightarrow \infty$  кривая для  $R(\infty)$  кажется очень касательным к приближению (15). По вертикальной шкале мы заметим малость относительной разности  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ , При  $N = 10\,000$  это означает, что для конечного размера эпидемии самое большое различие составляет 1 или 2 человека (размер в принципе должен быть целым числом). с  $\bar{a}/b = 1,5$  аппроксимация (13) по Кермаку и Маккендрику все еще относительно хороша (Gani, 1975, p. 240).

Если  $\psi$  равно нулю или кратно числу  $\pi$ , корректирующий член в уравнении (15) равен нулю. Но так как это исключительный случай, возможно, не стоит искать новый эквивалент для интеграла  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  выше.

В заключение можно сказать, что близость конечных размеров  $R(\infty)$  и  $\bar{R}(\infty)$  каким-то образом оправдывается тот факт, что во многих эпидемических моделях короткопериодические колебания не учитываются при рассмотрении только средних скоростей контакта.

## ССЫЛКИ

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J. – P. Françoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P. – L. Hennequin (éd.), *École d'été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J. – L. Ovaert, J. – L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.