

Dois modelos populacionais em um ambiente periódico lento ou rápido

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Unidade de modelagem matemática e computacional de sistemas complexos
Les Cordeliers, Paris, França
nicolas.bacaer@ird.fr

Sumário

Enfrentamos dois problemas na dinâmica populacional em um ambiente periódico lento ou rápido. Primeiro, obtemos uma aproximação para a probabilidade de não extinção de um processo linear de nascimento e morte com coeficientes periódicos, quando o período é grande ou pequeno. Se a taxa de natalidade for menor que a mortalidade durante parte do período e se o período tender para o infinito, a probabilidade de não extinção converge para um limite descontínuo vinculado a um "pato" em um sistema lento-rápido. Segundo, estudamos um modelo epidêmico não linear do tipo SIR quando a taxa de contato oscila rapidamente. O tamanho final da epidemia é próximo ao obtido pela substituição da taxa de contato por sua média.

1 Introdução

Em um trabalho publicado há algum tempo (Bacaër, 2015), estudamos o limite de um modelo de dinâmica populacional, o modelo estocástico do SIS, em um ambiente periódico quando o período tendia a 0 ou ao infinito. Propomos aqui estudar da mesma maneira dois modelos aparentemente mais simples: um processo linear de nascimento e morte e um modelo epidêmico determinístico do tipo SIR. Esses dois modelos podem ser vistos como aproximações do mesmo modelo estocástico de SIR. O processo de nascimento e morte serve como uma aproximação no início da epidemia; novas infecções desempenham o papel dos nascimentos, as curas desempenham o papel dos mortos. O modelo determinístico é usado como uma aproximação quando o número de pessoas infectadas já é grande o suficiente.

Então, vamos primeiro considerar um processo linear de nascimento e morte em um ambiente variável com uma taxa de natalidade $a(t)$ e uma mortalidade $b(t)$. O processo começa em $t = t_0$ com um único indivíduo. A probabilidade de não extinção é

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp\left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds\right] dt}, \quad (1)$$

se a integral no denominador é finita ou infinita (Gani, 1975, p. 220). Isso se aplica principalmente ao caso em que as funções $a(t)$ e $b(t)$ são periódicos do mesmo período, digamos T . Assumimos que

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

onde $A(\tau)$ e $B(\tau)$ são funções periódicas do período 1. Considere os meios

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

Então $p(t_0)$ é idêntico a 0 se $\bar{a} \leq \bar{b}$. É uma função T -periodicamente estritamente positivo e estritamente menor que 1 se $\bar{a} > \bar{b}$ (ver (Bacaër, 2007, §5.2) e (Bacaër e Ait Dads, 2014)). Agora assumimos que $\bar{a} > \bar{b}$. Este é o caso supercrítico.

A fórmula (1) é simplificada quando o período T é muito pequeno ou muito grande, como observado recentemente (Carmona e Gandon, 2019). Se $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ é fixo e se $T \rightarrow 0$ então $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$. Se $t_0/T = \tau_0$ é fixo e se $T \rightarrow +\infty$ então $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$, pelo menos para certos valores de τ_0 onde $A(\tau_0) > B(\tau_0)$.

O objetivo abaixo é esclarecer essas observações, propondo uma aproximação da probabilidade de extinção. O limite $T \rightarrow 0$ é o mais simples: temos

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

Se $T \rightarrow +\infty$, assumimos que as funções $A(\tau)$ e $B(\tau)$ são regulares (digamos diferenciáveis com uma derivada contínua) e consideram dois casos:

- $A(\tau) > B(\tau)$ para $\tau \in [0, 1]$ (caso fortemente supercrítico);
- $A(\tau) > B(\tau)$ para $\tau \in [0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1]$ onde $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ e $A(\tau) < B(\tau)$ para $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$ (caso fracamente supercrítico).

Sem perda de generalidade, pode-se assumir ainda mais no segundo caso que $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$. Existe então um único $\tau^* \in]0, \tau_1[$ com

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Mostramos na seção 2 que, no primeiro caso para $\tau_0 \in [0, 1]$, e no segundo caso para $\tau_0 \notin]\tau^*, \tau_2[$,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

No segundo caso com $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Essa última probabilidade converge exponencialmente rapidamente para 0 quando $T \rightarrow +\infty$. Por fim, há, portanto, uma descontinuidade na $\tau_0 = \tau^*$. O limite é zero, não apenas em $]\tau_1, \tau_2[$ mas também em $]\tau^*, \tau_2[$. Isso está relacionado ao fenômeno "pato" em um sistema lento-rápido, conforme explicado na seção 2.6.

A seguir, considere o modelo determinístico da epidemia de SIR. Nós definimos

- N : o tamanho constante assumido de uma população,
- $S(t)$: o número de pessoas saudáveis no momento t ,
- $I(t)$: o número de pessoas infectadas,
- $R(t)$: o número de pessoas removidas da cadeia de transmissão porque são curadas e imunizadas,
- $a(t)$: a taxa de contato infeccioso,
- b : a taxa de cura.

Então $N = S(t) + I(t) + R(t)$. Supõe-se como no modelo simplificado de Kermack e McKendrick (ver, por exemplo (Hillion, 1986, p. 75)) que

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Cada indivíduo saudável é, portanto, influenciado pela proporção de E/N de indivíduos infectados na população total, ou seja, pelo "campo médio" e não por sua vizinhança em uma estrutura de contato específica.

Em um trabalho recente (Bacaër, 2019), estávamos interessados na influência que uma oscilação periódica de pequena amplitude da taxa de contato teria sobre o tamanho final da epidemia. Vamos nos concentrar aqui no caso em que a amplitude é arbitrária, mas em que o período das oscilações é pequeno comparado com a duração típica da epidemia. Para uma epidemia que duraria algumas semanas, isso representaria, por exemplo, a rápida alternância entre dia e noite. Para uma epidemia que duraria alguns meses, isso representaria a alternância entre dias úteis e fins de semana, especialmente para epidemias nas escolas. Para uma epidemia que duraria vários anos ou mesmo décadas, isso representaria a alternância entre invernos e verões;

O período das oscilações é $T > 0$. Este parâmetro pretende convergir para 0. Assumimos que

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

com

- $\bar{a} > 0$,
- ϕ : uma função contínua em peças com

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

Então $a(t)$ é uma função periódica do período T , com uma média \bar{a} . Tome como condições iniciais no início da epidemia

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

com $0 < i < N$.

A seção 3.1 mostra simulações deste modelo. Vimos a partir de exemplos que o tamanho final da epidemia é notavelmente próximo ao obtido pela substituição da taxa de contato por sua média. Na seção 3.2, propomos uma explicação dessa proximidade, fazendo algumas hipóteses adicionais sobre os parâmetros do modelo, em particular supondo que a fração inicial de pessoas infectadas seja pequena e que a reprodutibilidade da epidemia permaneça próxima de 1. Obtemos uma fórmula aproximada para a correção a ser feita no tamanho final da epidemia. Essa correção é proporcional ao período das oscilações e à fração inicial de pessoas infectadas, daí a sua pequenez.

2 Um processo de nascimento e morte

2.1 Cálculo preliminar

Vamos primeiro olhar para o processo linear de nascimento e morte. Vamos considerar a integral com o denominador da fórmula (1) e observe

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Por definição, temos

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Nós temos $t_0/T = \tau_0$. Nós definimos $u = t/T$ e $v = s/T$. Então, usando a periodicidade das funções $A(\tau)$ e $B(\tau)$, nós obtemos

$$\begin{aligned}
J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du.
\end{aligned}$$

Então

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2 O limite $T \rightarrow 0$

Com a aproximação $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ para $x \rightarrow 0$ no fator antes da integral e, mais simplesmente $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ na integral, obtemos

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Percebemos que

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Deduzimos que

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

Com $p(t_0) = 1/(1 + J)$, deduzimos a fórmula (2).

2.3 O limite $T \rightarrow +\infty$: o caso altamente supercrítico

Vamos voltar à fórmula (7). A integral é da forma

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

com

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

Nós temos

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Vamos primeiro assumir que $A(\tau) > B(\tau)$ para $\tau \in [0, 1]$. Então $F'(u) > 0$ por tudo $u \in [0, 1]$, $F(u)$ no mínimo em $u = 0$ e $F(0) = 0$. Além disso, $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ se $u \rightarrow 0$ com

$\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ e $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$. Além disso, $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ se $u \rightarrow 0$ com $\psi_0 = B(\tau_0)$ e $\psi_1 = B'(\tau_0)$. De acordo com o teorema de Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

com $c_0 = \psi_0/\phi_0$ e $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$. Porque $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ exponencialmente pequeno, a fórmula (7) fornece

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

Com $p(t_0) = 1/(1 + J)$, deduzimos a fórmula (4).

2.4 O caso fracamente supercrítico

Suponha agora que exista τ_1 e τ_2 com $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ e

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \text{ para } \tau \in]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \text{ para } \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Porque $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau))d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$, temos duas possibilidades:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau))d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau))d\tau > 0. \quad (9)$$

Assumimos que a primeira desigualdade é verdadeira, mesmo que isso signifique mudar as funções ao longo do tempo $A(\tau)$ e $B(\tau)$.

Existe então um único $\tau^* \in [0, \tau_1]$ com

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

De fato, se

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

tão $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$ para $\tau \in [0, \tau_1]$. Além disso, $h(0) > 0$ de acordo com a primeira desigualdade (9) e $h(\tau_1) < 0$. Portanto, há um único $\tau^* \in [0, \tau_1]$ com $h(\tau^*) = 0$.

Vamos primeiro considerar o caso em que $0 < \tau_0 < \tau_1$. A função $F(u)$ está aumentando para $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$. Está diminuindo para $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$. Está crescendo novamente para $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$. A função $F(u)$ portanto, tem um mínimo local em $\tau_2 - \tau_0$. Lembre-se disso $F(0) = 0$.

Se $\tau_0 \in]0, \tau^*[$ então $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$. Então $u = 0$ permanece o mínimo geral de $F(u)$ no intervalo $[0, 1]$. O desenvolvimento assintótico (8) permanece válido e a fórmula (4) também.

Se, por outro lado, $\tau \in]\tau^*, \tau_1[$ então $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$. O mínimo geral de $F(u)$ no intervalo $[0, 1]$ está em $u = \tau_2 - \tau_0$, $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$, $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$ e

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

se $T \rightarrow +\infty$, de acordo com o método de Laplace (Ovaert e Verley, 1997). Então

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

e $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ se $T \rightarrow +\infty$, que fornece a fórmula (5).

Agora considere o caso em que $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$. A função $F(u)$ diminui ao longo do intervalo $[0, \tau_2 - \tau_0]$ aumentando ao longo do intervalo $[\tau_2 - \tau_0, 1]$. Entretanto, o seu mínimo $[0, 1]$ é, portanto, alcançado em $u = \tau_2 - \tau_0$, como no caso anterior. Assim, a fórmula (5) ainda é válida.

Por fim, considere o caso em que $\tau_2 < \tau_0 < 1$. A função $F(u)$ está aumentando ao longo do intervalo $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$. Diminui ao longo do intervalo $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$. Está aumentando ao longo do intervalo $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$. Portanto, tem um mínimo local em $1 + \tau_2 - \tau_0$ e

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

de acordo com a primeira desigualdade (9). Seu mínimo geral em $[0, 1]$ é, portanto, atingido em $u = 0$. Assim, é a fórmula (4) que se aplica.

2.5 Exemplo

Vamos dar $B(\tau) = \bar{b} > 0$ constante e

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

com $\bar{a} > \bar{b}$ e $0 \leq k \leq 1$. O caso altamente supercrítico corresponde a $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. Se pelo contrário $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ então $\tau_1 < \tau_2$ são as duas soluções em $[0, 1]$ da equação $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$, nomeadamente

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

O limiar τ^* é a solução em $[0, \tau_1]$ da equação

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

A fórmula (2) fornece

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

se $T \rightarrow 0$. Se $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ ou se $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ e $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$, então a fórmula (4) fornece

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

se $T \rightarrow +\infty$. Se $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ e $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$, A fórmula (5) fornece

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

se $T \rightarrow +\infty$.

Vamos dar em particular $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$ e $k = 0,5$. Então $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. A Figura 1 mostra os resultados para dois valores do período: $T = 0,5$ e $T = 50$. A probabilidade de não extinção $p(t_0)$, dada pela fórmula

(1), é estimada por integração numérica com o software Scilab. Podemos ver que as fórmulas aproximadas (2) e (4) fornecem melhores aproximações. Observe, porém, que para $T \rightarrow +\infty$, a aproximação (4) se desvia um pouco da $p(t_0)$ nas proximidades do mínimo de $p(t_0)$.

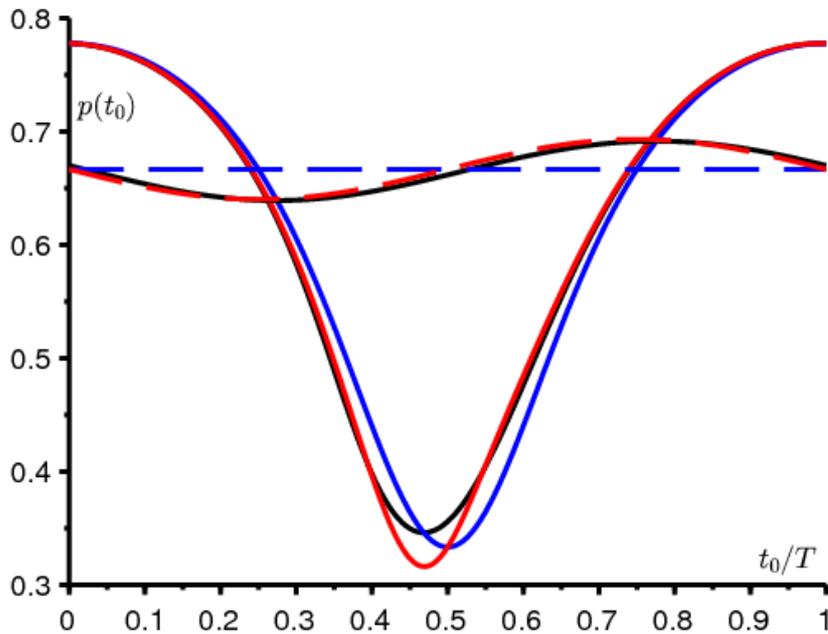


Figura 1. Dois exemplos: $T = 0,5$ (pontilhado) e $T = 50$ (linhas sólidas). A probabilidade de não extinção $p(t_0)$, dada pela fórmula (1), está em preto. Linha pontilhada: a fórmula aproximada (2) em vermelho e a aproximação $1 - \bar{b}/\bar{a}$ em azul. Linhas contínuas: a fórmula aproximada (4) em vermelho e a aproximação $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ em azul.

Vamos pegar agora $\bar{b} = 1$, $\bar{a} = 3$, $k = 0,75$ e $T = 100$. Então $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$, $\tau^* \simeq 0,347$, $\tau_1 \simeq 0,424$ e $\tau_2 \simeq 0,576$. As várias fórmulas aproximadas estão representadas na figura 2, em particular a fórmula (5) em verde. A probabilidade de não extinção converge para um limite descontínuo. Para $\tau < \tau^*$ e $\tau > \tau_2$, o limite é azul. Para $\tau^* < \tau < \tau_2$, o limite é igual a 0. Há um pequeno problema de conexão das aproximações no nível de $\tau_0 = \tau_2$, o que nos leva a olhar mais de perto o que está acontecendo neste momento.

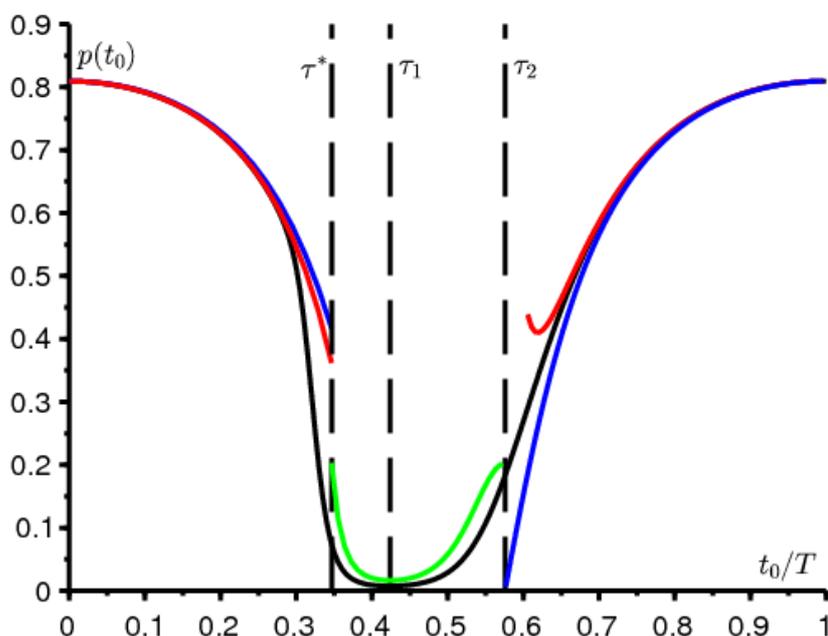


Figura 2. Como na Figura 1, mas com $T = 100$ e $k = 0,75$. A fórmula aproximada (5) está em verde.

Como no caso em que $\tau_2 < \tau_0 < 1$ na seção 4.2, vemos no caso especial em que $\tau_0 = \tau_2$ que $F(u)$ no seu máximo global em $[0, 1]$ em $u = 0$. Mas desta vez, $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$. De acordo com o mesmo teorema de Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

para que $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ se $T \rightarrow +\infty$. A fórmula (5) permanece válida quando $\tau_0 = \tau_2$. A decadência exponencial em direção a 0 quando $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ é substituído por uma diminuição no $1/\sqrt{T}$ direto ao ponto τ_2 .

2.6 Link com "patos"

Fórmula (1) para a probabilidade de extinção $p(t_0)$ no momento t_0 é realmente obtido da seguinte maneira: se $u > t_0$, a probabilidade de extinção no momento u do processo que começa de um indivíduo no momento t_0 é $z(u - t_0)$ com $z(0) = 0$ e

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër e Ait Dads, 2014). É porque esta equação de Riccati é explicitamente solucionável que obtemos a fórmula (1) para a probabilidade de não extinção

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Vamos pegar por exemplo $u = t_0 + nT$ com n inteiro estritamente positivo. A equação (10) é então escrita

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

Se $s = t/T$ e $z(t) = x(s)$ então

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

no intervalo $s \in [0, n]$. Isso pode ser escrito como um sistema autônomo lento-rápido:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

para $s \in [0, n]$ com $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Finalmente

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

Se $T \rightarrow \infty$, vemos neste sistema lento-rápido que $x(n) \rightarrow 1$ onde $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$. O fato de que $x(n)$ permanece no ramo instável 1 para $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$ é, portanto, o mesmo fenômeno que é chamado de "pato" no estudo de sistemas de velocidade lenta. Lembre-se da definição (Lobry, 2018, p. 182):

"Em um campo lento-rápido de \mathbb{R}^2 , pode haver trajetórias que permanecem infinitamente próximas à curva lenta por um tempo significativo (não infinitamente pequeno) ao longo de um arco atraente, seguido por um tempo significativo gasto ao longo de um arco repulsivo. Essa trajetória é chamada de [...] pato. "

Verhulst (2014) também observou o aparecimento de tais patos em conexão com uma equação logística periódica. A relação (3) que liga τ^* e τ_2 é a correspondente “relação de entrada e saída” (Benoît, 1981; De Maesschalck e Schecter, 2016).

Essas observações, sem dúvida, se estendem no caso de processos de nascimento e morte a vários tipos (Bacaër e Ait Dads, 2014) com matrizes de nascimento $\mathcal{A}(\tau)$ e matrizes de transição ou morte $\mathcal{B}(\tau)$, o que leva a um sistema de formulário lento e rápido

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

onde * denota a matriz transposta. Nesse caso, o relacionamento de entrada e saída ainda precisa ser determinado.

3 O modelo SIR

3.1 Algumas simulações

Agora considere o modelo SIR (6). Os parâmetros são escolhidos para serem plausíveis:

- a população total é $N = 10\,000$;
- apenas uma pessoa foi infectada no início da epidemia ($i = 1$);
- cada pessoa tem em média $\bar{a} = 15$ contatos por mês;
- a duração média da infecção é $1/b = 1/10$ meses, cerca de 3 dias;
- o período T é $1/4$ de um mês ou cerca de 7 dias;
- o fator periódico é

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

onde $\omega = 2\pi/T$ e $|k| \leq 1$;

- a mudança de fase é $\psi = -\pi/2$ para que $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ e a taxa de contato $a(t)$ está em uma fase crescente em $t = 0$.

A reprodutibilidade é então $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$, o que garante o desenvolvimento de uma epidemia de tamanho final $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ (Bacaër e Gomes, 2009).

A Figura 3 mostra duas simulações típicas do modelo: uma com $k = 0$ (a taxa de contato é constante), a outra com $k = 1$ (a taxa de contato oscila). Embora as curvas para $k = 1$ diferem significativamente daqueles para $k = 0$ durante a epidemia, é notável que os tamanhos finais $R(\infty)$ em ambas as simulações são quase indistinguíveis graficamente. Isso será explicado na próxima seção.

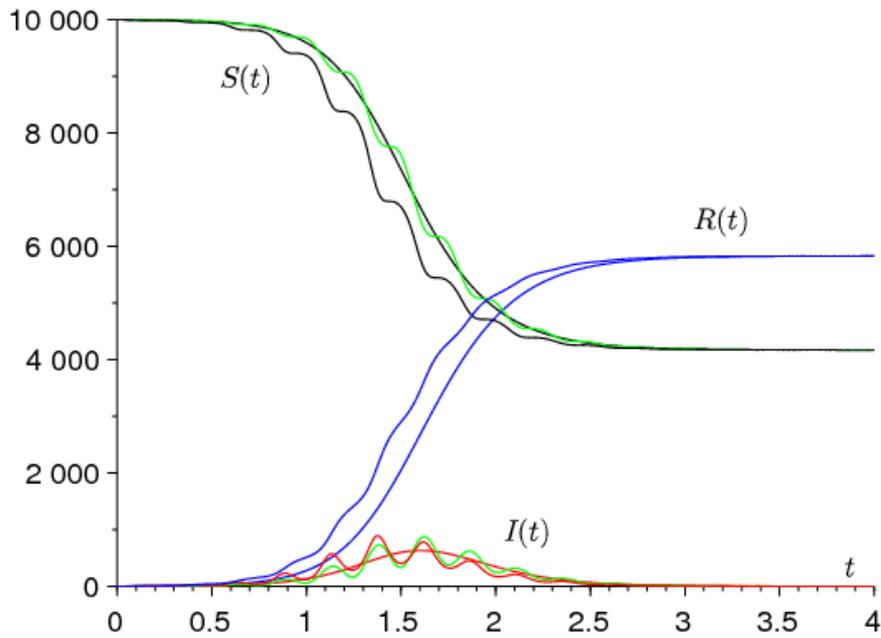


Figura 3. Simulação de uma epidemia: $S(t)$ em preto $I(t)$ em vermelho e $R(t)$ em azul em função do tempo t (em meses). As curvas não onduladas correspondem a $k = 0$, as curvas onduladas em $k = 1$. As curvas verdes são as aproximações de segunda ordem para $S(t)$ e $I(t)$.

Reduzindo o período das oscilações (por exemplo, com $T = 1/8$ meses), veríamos as curvas $(S(t), I(t), R(t))$ para $k = 1$ manter suas oscilações, mas se aproximar da solução com $k = 0$, que notamos $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ porque corresponde a $a(t) = \bar{a}$. Além disso, isso é consequência do teorema da média de Fatou (Françoise, 2005, teorema 42). De fato, se $\tau = t/T$, o sistema está escrito

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

com $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$. O teorema garante que quando $T \rightarrow 0$,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

por um tempo τ da ordem de $1/T$. Então $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ por um tempo t na ordem de 1. Mais precisamente, existem constantes c_1, c_2, c_3 e T_0 tudo positivo, com por $0 < T < T_0$ e para $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Podemos calcular uma aproximação de segunda ordem. Vamos escrever o sistema (11) na forma $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$ onde $Z = (S, I, R)$ e $f(\tau, Z)$ é τ -periódico do período 1. Então

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a expressão deve ser removida $\sin(\psi)$ de modo que essas últimas funções tenham média zero. De acordo com (Françoise, 2005, teorema 44), temos

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

e $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ ao longo de um intervalo de tempo τ da ordem de $1/T$. Em outras palavras,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

e $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ ao longo de um intervalo de tempo t da ordem de 1. Essas aproximações de $S(t)$ e $I(t)$ são mostrados em verde na Figura 3.

Observe que, com um período de taxa de contato pequeno, não observamos uma curva epidêmica com várias ondas grandes, diferentemente das simulações de (Bacaër e Gomes, 2009). Isso ocorre porque o sistema está se aproximando cada vez mais do caso em que a taxa de contato é média, o que gera apenas uma onda epidêmica.

3.2 Proximidade com o tamanho final das epidemias

Escrevendo a primeira equação (6) na forma $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$, integrando entre $t = 0$ e $t = +\infty$, levando em consideração as condições iniciais e quais $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$, é facilmente encontrado como em (Bacaër, 2019) que

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

A integral oscilante $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ provavelmente converge para 0 quando $T \rightarrow 0$. De fato, sabemos por um lado que $I(t) \simeq \bar{I}(t)$. Por outro lado, pelo menos quando ϕ é um cosseno, a integral $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ converge para 0 quando $T \rightarrow 0$. De fato, a função $\bar{I}(t)$ é positivo e integrável porque $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$. A transformação de Fourier de uma função integrável converge para 0 no infinito.

Segue-se que $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ se $T \rightarrow 0$. A questão é a rapidez com que isso acontece. Como primeira aproximação, a equação (12) fornece

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

como em (Bacaër, 2019).

Então usamos para $\bar{I}(t)$ a expressão analítica aproximada na forma de um sino simétrico obtido por Kermack e McKendrick (ver, por exemplo (Bacaër, 2019) ou (Gani, 1975)). Se $\bar{a}/b > 1$, se $\bar{a}/b \simeq 1$, se $i/N \ll 1$ então

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

onde $\text{ch}(\cdot)$ denota o cosseno hiperbólico e

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

sob a provável suposição adicional $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$. W é uma aproximação do tempo decorrido antes do pico da epidemia em um ambiente constante.

Por fim, suponha que $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ como na figura 3. Observe $\text{Re}(\cdot)$ a parte real de um número complexo e i o número imaginário usual (não deve ser confundido com i , a população inicialmente infectada). Temos, então, usando um resultado clássico no cálculo assintótico de integrais complexas com uma fase que não é estacionária, de modo que o termo principal venha da extremidade do intervalo de integração (Ovaert e Verley, 1997, Teorema 3.),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

Com as aproximações (14), também podemos ver que

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

o que acaba por dar $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

O tamanho final $\bar{R}(\infty)$ em um ambiente constante é a única solução estritamente positiva para a equação

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

o que é facilmente encontrado na equação (12). Com $i \ll N$, o tamanho final $\bar{R}(\infty)$ depende muito pouco da condição inicial i . Esta é aproximadamente a solução estritamente positiva de

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

O termo de correção na equação (15) pode ser positivo ou negativo; depende do sinal de $\sin(\psi)$. É proporcional a $1/\omega$, ou seja, para T e para a fração i/N de pessoas inicialmente infectadas. É por isso que, como anunciado, o tamanho final da epidemia é notavelmente próximo ao obtido pela substituição da taxa de contato por sua média.

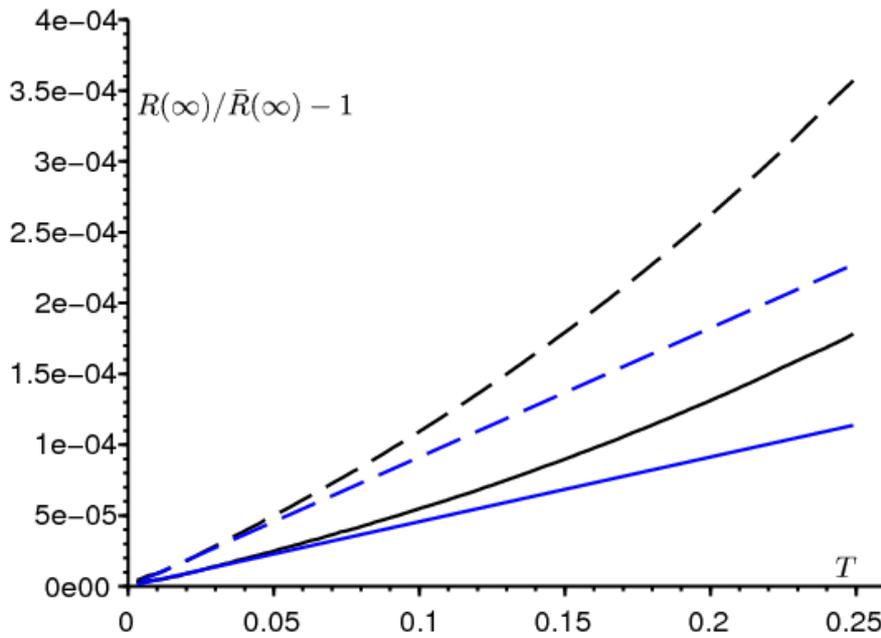


Figura 4. A diferença relativa $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ entre os tamanhos finais das epidemias de acordo com o período T . De preto, $R(\infty)$ é estimado simulando o sistema de equações diferenciais. A aproximação (15) é mostrada em azul. Os parâmetros são os mesmos da Figura 3 com $k = 1$, exceto que o período T varia entre 0 e 0,25 mês e que $i = 1$ (linhas sólidas) ou $i = 2$ (pontilhado).

Isso é ilustrado na figura 4 com valores dos parâmetros idênticos aos da figura 3 para $k = 1$. O período T varia. Também tentamos duas condições iniciais: $i = 1$ e $i = 2$. Se $T \rightarrow 0$, a curva para $R(\infty)$ parece muito tangente à aproximação (15). Vamos notar na escala vertical a pequenez da diferença relativa $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$. Com $N = 10.000$, isso se traduz no tamanho final da epidemia, no máximo, por uma diferença de 1 ou 2 pessoas (o tamanho deve, em princípio, ser um número inteiro). Com $\bar{a}/b = 1,5$, a aproximação (13) de Kermack e McKendrick ainda é relativamente boa (Gani, 1975, p. 240).

Se ψ for zero ou um múltiplo inteiro do número π , o termo de correção na equação (15) é zero. Mas, como esse é um caso excepcional, pode não valer a pena encontrar um novo equivalente para a integral $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ acima.

Em conclusão, podemos dizer que a proximidade dos tamanhos finais $R(\infty)$ e $\bar{R}(\infty)$ de alguma forma, justifica o fato de que em muitos modelos epidêmicos, as oscilações de curto período são negligenciadas para considerar apenas as taxas de contato médias.

Referências

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, Bull. Math. Biol. 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, J. Math. Biol. 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, C. R. Biol. 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, J. Math. Biol. 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, Bull. Math. Biol. 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée-sortie, C. R. Acad. Sci. Paris (série I) 293, 293–296.

- Ph. Carmona, S. Gandon (2019)
Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments,
<https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016)
The entry–exit function and geometric singular perturbation theory,
J. Diff. Eq. 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.),
École d'été de probabilités de Saint–Flour IV–1974, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*,
Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*,
ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*,
in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*,
Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system,
Int. J. Nonlin. Mech. 67, 371–377.