

# 遅いまたは速い周期的な環境での2つの母集団モデル

J. Math. Biol. 80 (2020) 1021-1037  
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット  
Les Cordeliers、パリ、フランス  
nicolas.bacaer@ird.fr

## まとめ

遅いまたは速い周期的な環境における人口動態の2つの問題に取り組みます。最初に、周期が大きい場合、周期が小さい場合に、周期的な係数を使用して出生と死亡の線形プロセスが消滅しない確率の近似値を取得します。出生率が期間の一部の死亡率よりも低く、期間が無限大になる傾向がある場合、非絶滅の確率は、低速高速システムの「カモ」に関連する不連続な制限に収束します。次に、接触率が急速に変動する場合のSIRタイプの非線形流行モデルを調査します。流行の最終的なサイズは、接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに近いです。

## 1はじめに

しばらく前に公開された研究 (Bacaër, 2015) では、周期が0または無限大に向かう傾向がある周期的な環境で、人口動態モデルの限界である確率論的SISモデルを調査しました。ここでは、明らかに単純な2つのモデル、つまり出生と死亡の線形プロセスとSIRタイプの確定的流行モデルを研究することを提案します。これらの2つのモデルは、同じ確率的SIRモデルの近似として見ることが出来ます。出生と死亡のプロセスは、流行の始まりの概算として機能します。新しい感染症は出産の役割を果たし、治癒は死者の役割を果たします。確定モデルは、感染者の数がすでに十分に多い場合の概算として使用されます。

まず、出生率が変動する環境での出生と死亡の線形プロセスを考えてみましょう  $a(t)$  そして死亡率  $b(t)$ 。プロセスは  $t = t_0$  一人で。絶滅しない確率は

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp\left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds\right] dt}, \quad (1)$$

分母の積分が有限か無限か (Gani, 1975, p. 220)。これは、特に関数が  $a(t)$  と  $b(t)$  同じ期間の定期的であるとしましょう  $T$ 。私たちは

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

どこに  $A(\tau)$  と  $B(\tau)$  は周期1の周期関数です。

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

だから  $p(t_0)$  が0に等しく等しい場合  $\bar{a} \leq \bar{b}$ 。機能です  $T$ -定期的に厳密に正、厳密に1未満の場合  $\bar{a} > \bar{b}$  (Bacaër, 2007, §5.2) および (Bacaër and Ait Dads, 2014) を参照)。今、 $\bar{a} > \bar{b}$ 。これは超臨界の場合です。

式 (1) は、最近指摘されたように (Carmona and Gandon, 2019)、期間  $T$  が非常に小さいか非常に大きい場合に簡略化されます。もし  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  修正され、 $T \rightarrow 0$ 、その後  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ 。もし  $t_0/T = \tau_0$  修正され、 $T \rightarrow +\infty$ 、その後  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 、少なくとも特定の値について  $\tau_0$  どこに  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ 。

以下の目的は、消滅の確率の概算を提案することにより、これらの観察を明確にすることです。限界  $T \rightarrow 0$  最も単純です：

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

もし  $T \rightarrow +\infty$ 、私たちは関数が  $A(\tau)$  と  $B(\tau)$  規則的であり (たとえば、連続微分で微分可能)、次の2つのケースを検討します。

- $A(\tau) > B(\tau)$  のために  $\tau \in [0, 1]$  (強く超臨界の場合) ;
- $A(\tau) > B(\tau)$  のために  $\tau \in [0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1]$  どこに  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  と  $A(\tau) < B(\tau)$  のために  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (弱超臨界状態) 。

一般性を失うことなく、2番目のケースでは、 $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ 。その後、ユニークです  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  と

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

セクション2で示します。  $\tau_0 \in [0, 1]$ 、および2番目のケースでは  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2[$ 、

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

2番目のケースでは  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ 、

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

この最後の確率は、指数関数的にすばやく0に収束します。  $T \rightarrow +\infty$ 。したがって、最終的には、 $\tau_0 = \tau^*$ 。限界はゼロだけでなく  $] \tau_1, \tau_2 [$  だけでなく  $] \tau^*, \tau_2 [$ 。これは、セクション2.6で説明されているように、低速システムでの「ダック」現象に関連しています。

次に、決定論的なSIR流行モデルについて検討します。私たちは定義します

- $N$  : 母集団の想定される一定のサイズ、

- $S(t)$  : 当時の健康な人の数  $t$ 、
- $I(t)$  : 感染した人の数、
- $R(t)$  : 治癒して免疫されたために感染の連鎖から外された人々の数、
- $a(t)$  : 感染性接触の割合、
- $b$  : 治癒率。

だから  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ 。カーマックとマッケンドリックの簡略化されたモデルのように (たとえば (Hillion, 1986, p. 75) を参照) 、

$$\frac{dS}{dt} = -a(t) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t) \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

したがって、各健康な個人は、特定の接触構造におけるその近傍ではなく、総人口における感染した個人の  $I/N$  比率、つまり「平均フィールド」の影響を受けます。

最近の研究 (Bacaër, 2019) では、接触率の小さな振幅の周期的な振動が流行の最終的なサイズに与える影響に興味を持っていました。ここでは、振幅が任意であるが、振動の周期が流行の典型的な期間と比較して小さい場合に焦点を当てます。数週間続く流行の場合、これは、たとえば、昼と夜の間の急速な交代を表します。数か月続く流行の場合、これは就業日と週末の交代を表し、特に学校での流行の場合はそうです。数年または数十年も続く流行の場合、これは冬と夏の交代を表します。

振動の周期は  $T > 0$ 。このパラメーターは0に収束することを目的としています。

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

と

- $\bar{a} > 0$ 、
- $\phi$  : の連続関数

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

だから  $a(t)T$  の周期関数であり、平均は  $\bar{a}$ 。流行開始時の初期条件とする

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

と  $0 < i < N$ 。

セクション3.1は、このモデルのシミュレーションを示しています。例からわかるように、流行の最終的なサイズは、接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに非常に近いです。セクション3.2では、特に感染した人々の最初の割合が小さく、流行の再現性が1に近いままであると仮定して、モデルのパラメーターにいくつかの追加の仮説を立てることにより、この近接性の説明を提案します。流行の最終的なサイズに対して行われる修正のおおよその式。この補正は、振動の周期と感染者の最初の割合の両方に比例するため、その大きさは小さくなります。

## 2誕生と死のプロセス

## 2.1 予備計算

最初に、誕生と死の線形プロセスを見てみましょう。式 (1) の分母との積分を考えてみます。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

定義により、

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

私たちは持っています  $t_0/T = \tau_0$ 。私たちは定義します  $u = t/T$  と  $v = s/T$ 。したがって、関数の周期性を使用して  $A(\tau)$  と  $B(\tau)$ 、私たちは

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

だから

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

## 2.2 限界 $T \rightarrow 0$

近似あり  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  のために  $x \rightarrow 0$  積分の前の因子で、より簡単に  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  積分では、

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

私たちはそれに気づきます

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

私たちはそれを推測します

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

と  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ 、式 (2) を推定します。

## 2.3 限界 $T \rightarrow +\infty$ : 非常に超臨界のケース

式 (7) に戻りましょう。積分は次の形式です

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

と

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

私たちは持っています

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

まず、 $A(\tau) > B(\tau)$  のために  $\tau \in [0, 1]$ 。だから  $F'(u) > 0$  すべてのために  $u \in [0, 1]$ 、 $F(u)$  最低でも  $u = 0$  と  $F(0) = 0$ 。また、 $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  もし  $u \rightarrow 0$ 、 $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  と  $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ 。それに、 $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  もし  $u \rightarrow 0$ 、 $\psi_0 = B(\tau_0)$  と  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ 。エルデリーの定理 (Olver, 1974, p. 85) によれば、

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du = e^{-T F(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

と  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  と  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ 。なぜなら  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  指数関数的に小さいので、式 (7) は

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

と  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ 、式 (4) を推定します。

## 2.4 弱い超臨界の場合

今あると仮定します  $\tau_1$  と  $\tau_2$  と  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  と

$A(\tau) < B(\tau)$  のために  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$ 、

$A(\tau) > B(\tau)$  のために  $\tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[$ 。

なぜなら  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ 、2つの可能性があります。

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0, \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

時間の経過とともに関数をシフトすることを意味する場合でも、最初の不等式は真であると想定します  $A(\tau)$  と  $B(\tau)$ 。

その後、ユニークです  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  と

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

確かに

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

そう  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  のために  $\tau \in [0, \tau_1]$ 。また、 $h(0) > 0$  最初の不等式 (9) および  $h(\tau_1) < 0$ 。だからユニークな  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  と  $h(\tau^*) = 0$ 。

最初に、 $0 < \tau_0 < \tau_1$ 。機能  $F(u)$  増加している  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ 。減少している  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ 。再び成長している  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。機能  $F(u)$  したがって、極小値が  $\tau_2 - \tau_0$ 。覚えて  $F(0) = 0$ 。

もし  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$ 、その後  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ 。だから  $u = 0$  全体の最小値のままです  $F(u)$  間隔で  $[0, 1]$ 。漸近展開 (8) は引き続き有効であり、式 (4) も有効です。

一方、 $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$ 、その後  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ 。全体の最小値  $F(u)$  間隔で  $[0, 1]$  にあります  $u = \tau_2 - \tau_0$ 、 $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ 、 $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  と

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

もし  $T \rightarrow +\infty$ 、ラプラス法によると (Ovaert and Verley, 1997)。だから

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

と  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  もし  $T \rightarrow +\infty$ 、これは式 (5) を与えます。

ここで、 $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ 。機能  $F(u)$  間隔で減少します  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  その後、間隔で増加します  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ 。その間のその最小値  $[0, 1]$  したがって、 $u = \tau_2 - \tau_0$ 、前の場合と同様に。したがって、式 (5) はまだ有効です。

最後に、 $\tau_2 < \tau_0 < 1$ 。機能  $F(u)$  間隔で増加しています  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ 。間隔を置いて減少します  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ 。間隔をおいて増加しています  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ 。したがって、極小値は  $1 + \tau_2 - \tau_0$  と

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1 + \tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

最初の不等式 (9) によると、その全体的な最小値  $[0, 1]$  したがって、 $u = 0$  で到達します。したがって、当てはまるのは式 (4) です。

## 2.5例

とりましょう  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  一定と

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

と  $\bar{a} > \bar{b}$  と  $0 \leq k \leq 1$ 。超臨界の場合は、 $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。逆の場合  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ 、その後  $\tau_1 < \tau_2$  の2つのソリューションは  $[0, 1]$  方程式の  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ 、つまり

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

しきい値  $\tau^*$  の解決策です  $[0, \tau_1]$  方程式の

$$(\bar{a} - b)(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

式 (2) は

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

もし  $T \rightarrow 0$ 。もし  $\bar{a}(1 - k) > b$  または  $\bar{a}(1 - k) < b$  と  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ 、次に式 (4) は

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi\bar{a}\bar{b}k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

もし  $T \rightarrow +\infty$ 。もし  $\bar{a}(1 - k) < b$  と  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ 、式 (5) は

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

もし  $T \rightarrow +\infty$ 。

特に取りましよう  $\bar{b} = 1$ 、 $\bar{a} = 3$  と  $k = 0,5$ 。だから  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ 。図1は、期間の2つの値の結果を示しています。  $T = 0,5$  と  $T = 50$ 。絶滅しない確率  $p(t_0)$  式 (1) で与えられるは、Scilabソフトウェアとの数値積分によって推定されます。近似式 (2) と (4) がより良い近似を与えることがわかります。ただし、 $T \rightarrow +\infty$ 、近似 (4) は、 $p(t_0)$  最小値付近  $p(t_0)$ 。

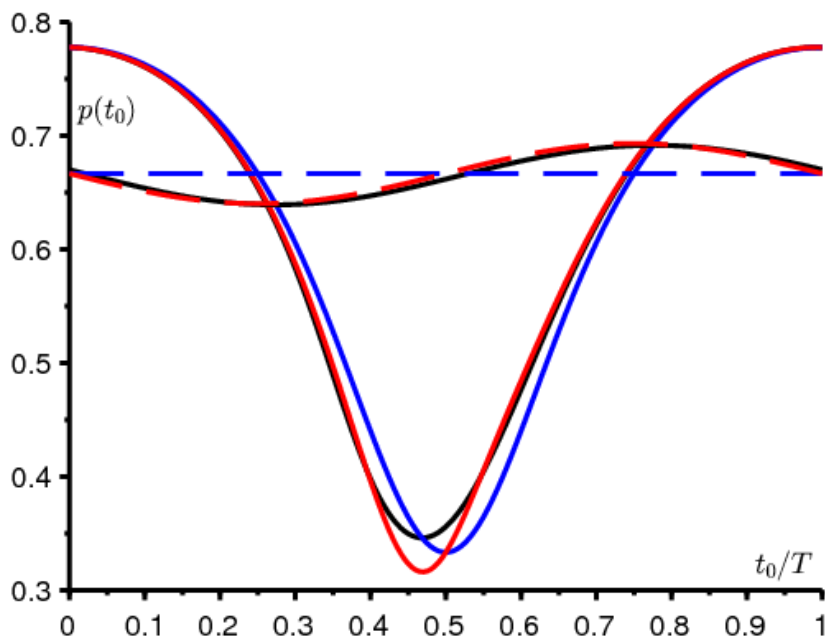


図1. 2つの例：  $T = 0,5$  (点線) および  $T = 50$  (実線)。絶滅しない確率  $p(t_0)$  は、式 (1) で与えられ、黒色で表示されます。点線：赤の近似式 (2) と近似  $1 - \bar{b}/\bar{a}$  青で。

実線：赤の近似式 (4) と近似  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  青で。

とりあえず  $\bar{b} = 1$ 、 $\bar{a} = 3$ 、 $k = 0,75$  と  $T = 100$ 。だから  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ 、 $\tau^* \simeq 0,347$ 、 $\tau_1 \simeq 0,424$  と  $\tau_2 \simeq 0,576$ 。様々な近似式が図2に、特に式 (5) が緑色で表されている。非絶滅の確率は不連続な限界に収束します。のために  $\tau < \tau^*$  と  $\tau > \tau_2$ 、制限は青です。のために  $\tau^* < \tau < \tau_2$ 、制限は0に等しいです。次のレベルで近似を接続する小さな問題があります。  $\tau_0 = \tau_2$ 、この時点で何が起きているのかを詳しく見ていきます。

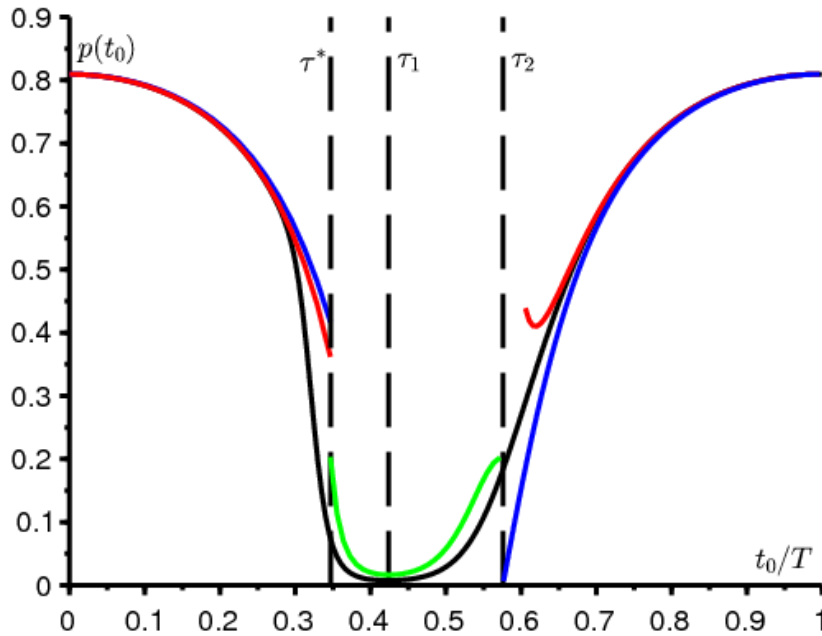


図2.図1と同じですが、 $T = 100$  と  $k = 0,75$ 。近似式 (5) は緑色です。

場合のように  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  セクション4.2では、特別なケースで  $\tau_0 = \tau_2$  あれ  $F(u)$  世界最大で  $[0, 1]$  で  $u = 0$ 。今回は  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ 。同じエルデリーの定理 (Olver、1974、p。85) によれば、

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

だから  $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  もし  $T \rightarrow +\infty$ 。式 (5) は、 $\tau_0 = \tau_2$ 。次の場合の0への指数関数的減衰  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  の減少に置き換えられます  $1/\sqrt{T}$  要点まで  $\tau_2$ 。

## 2.6 「アヒル」とのリンク

絶滅確率の式 (1)  $p(t_0)$  当時  $t_0$  実際には次のように取得されます。  $u > t_0$ 、時間に個人から始まるプロセスの時間  $u$  に消滅する確率  $t_0$  です  $z(u - t_0)$  と  $z(0) = 0$  と

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(BacaërおよびAit Dads、2014年)。このRiccati方程式が明確に解けるため、非消滅の確率について式 (1) が得られます



$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

例を挙げましょう  $u = t_0 + nT$  と  $n$  が正の整数。次に、式 (10) が書き込まれます

$$\frac{dz}{dt} = \left[ B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

もし  $s = t/T$  と  $z(t) = x(s)$ 、その後

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

間隔で  $s \in [0, n]$ 。これは遅い高速の自律システムとして書くことができます：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

のために  $s \in [0, n]$ 、 $x(0) = 0$  と  $y(0) = 0$ 。やっとな

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

もし  $T \rightarrow \infty$ 、私たちはこの低速高速システムで  $x(n) \rightarrow 1$  どこに  $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ 。という事実  $x(n)$  不安定なブランチにとどまる 1 のために  $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$  したがって、低速高速システムの研究で「アヒル」と呼ばれるものと同じ現象です。定義を思い出してください (Lobry、2018、p. 182)：

「の遅い速い分野で  $\mathbb{R}^2$ 、魅力的なアークに沿ってかなりの時間（無限に小さくはない）の間、ゆっくりと曲線に無限に近い軌道が存在し、その後反発的なアークに沿って費やされたかなりの時間が存在する場合があります。このような軌道は、アヒルと呼ばれます。」

Verhulst (2014) は、周期的ロジスティック方程式に関連して、このようなアヒルの出現にも言及しました。結ばれる関係 (3)  $\tau^*$  と  $\tau_2$  は、対応する「入出力関係」です (Benoît、1981; De Maesschalck および Schecter、2016)。

これらの発言は、出生と死のプロセスの場合、間違いなく出生行列を含むいくつかのタイプ (Bacaër および Ait Dads、2014) に拡張されます。 $\mathcal{A}(\tau)$  および遷移または死行列  $\mathcal{B}(\tau)$ 、遅い高速のフォームシステムにつながる

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

どこに \* 転置行列を示します。この場合、入出力関係はまだ決定されていません。

### 3 SIRモデル

### 3.1いくつかのシミュレーション

ここで、SIRモデルを検討します (6)。パラメータはもっともらしいものとして選択されます。

- 総人口は  $N = 10\,000$  ;
- 流行の開始時に一人だけが感染した ( $i = 1$ ) ;
- 一人一人が平均して持っている  $\bar{a} = 15$  月あたりの連絡先;
- 感染の平均期間は  $1/b = 1/10$  数か月、約3日。
- 期間  $T$  月の1/4、つまり約7日です。
- 周期係数は

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

どこに  $\omega = 2\pi/T$  と  $|k| \leq 1$  ;

- 位相シフトは  $\psi = -\pi/2$  だから  $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$  と接触率  $a(t)$  は増加段階にあります  $t = 0$ 。

再現性は  $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ 、最終的なサイズの伝染病の発症を保証します  $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$  (バカエルとゴメス、2009)。

図3は、モデルの2つの典型的なシミュレーションを示しています。  $k = 0$  (接触率は一定です)、他の  $k = 1$  (接触率は変動します)。曲線は  $k = 1$  とは大きく異なります  $k = 0$  流行時には、最終的なサイズが  $R(\infty)$  どちらのシミュレーションでも、グラフィックではほとんど区別が付きません。これについては、次のセクションで説明します。

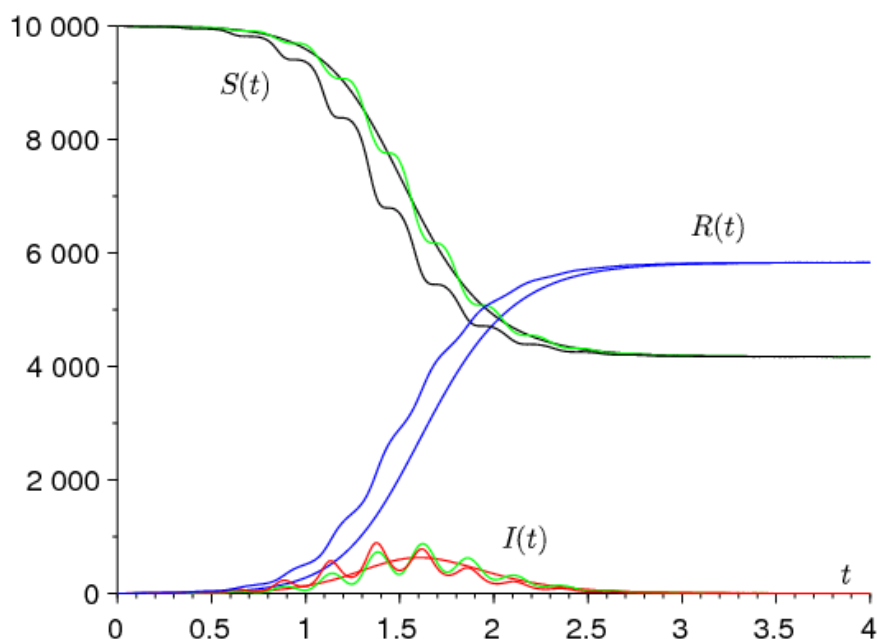


図3. 流行のシミュレーション:  $S(t)$  黒で  $I(t)$  赤と  $R(t)$  時間の関数として青で  $t$  (月単位)。非波状曲線は、 $k = 0$ 、の波状曲線  $k = 1$ 。緑の曲線は、2次近似です  $S(t)$  と  $I(t)$ 。

振動の周期を減らすことにより（例えば、 $T = 1/8$  数ヶ月）、私たちはカーブを見ます ( $S(t), I(t), R(t)$ ) のために  $k = 1$  それらの振動を維持しますが、ソリューションに近づきます  $k = 0$ 、私たちは注意します ( $\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t)$ ) に対応するため  $a(t) = \bar{a}$ 。さらに、これはFatouの平均化定理の結果です (Françoise, 2005、定理42)。確かに  $\tau = t/T$ 、システムが書き込まれます

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

と  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ 。定理は、 $T \rightarrow 0$ 、

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

しばらく  $\tau$  のオーダー  $1/T$ 。だから  $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$  しばらく  $t$  のオーダーです。より正確には、定数があります。  $c_1, c_2, c_3$  と  $T_0$  すべてが肯定的で  $0 < T < T_0$  そしてのために  $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

2次近似を計算できます。システム (11) を次の形式で記述しましょう  $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$ 、どこ  $Z = (S, I, R)$  と  $f(\tau, Z)$  です  $\tau$ -期間1の周期的。

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

式は削除する必要があることに注意してください  $\sin(\psi)$  したがって、これらの後者の関数はゼロ平均です。(Françoise, 2005、theorem 44) によれば、

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

と  $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$  時間間隔で  $\tau$  のオーダー  $1/T$ 。つまり、

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

と  $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$  時間間隔で  $t$  のオーダー  $1$ 。これらの近似  $S(t)$  と  $I(t)$  図3では緑色で示されています。

接触率の期間が小さい場合、(Bacaerand Gomes、2009) のシミュレーションとは異なり、いくつかの大きな波の流行曲線は観測されないことに注意してください。これは、接触率が平均的な場合にシステムがどんどん近づいており、流行波が1つしかないためです。

### 3.2 伝染病の最終的なサイズへの近さ

最初の式 (6) を次の形式で記述します。  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$  の間で統合することにより、  $t = 0$  と  $t = +\infty$ 、初期条件と何を考慮して  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ 、それは (Bacaer、2019) のように簡単に見つかります

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

振動積分  $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$  おそらく0に収束します  $T \rightarrow 0$ 。確かに、私たちは一方では  $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ 。一方、少なくとも  $\phi$  コサイン、積分  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  ときに0に収束します  $T \rightarrow 0$ 。確かに、機能  $\bar{I}(t)$  ポジティブで統合可能です  $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ 。可積分関数のフーリエ変換は、無限大で0に収束します。

その結果、  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  もし  $T \rightarrow 0$ 。問題は、これがどれだけ早く起こるかです。最初の近似として、方程式 (12) は

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

(Bacaer、2019) のように。

次に使用します  $\bar{I}(t)$  ケルマックとマッケンドリックによって得られた対称的なベルの形での近似分析式 (たとえば (Bacaer、2019) または (Gani、1975) を参照)。もし  $\bar{a}/b > 1$ 、  $\bar{a}/b \simeq 1$ 、  $i/N \ll 1$ 、その後

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{NX}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

どこに  $\text{ch}(\cdot)$  双曲線余弦を示し、

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

おそらく追加の仮定の下で  $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ 。  $W$  一定の環境での流行のピークの前に経過する時間の概算です。

最後に、  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  図3のように。  $\text{Re}(\cdot)$  複素数の実部と  $i$  通常の虚数 (混同しないでください)  $i$ 、最初に感染した人口)。次に、定常ではない位相を持つ複素積分の漸近計算の古典的な結果を使用して、主項が積分区間のエッジから来るようにします (Ovaert and Verley、1997、Theorem 3) 、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\
&= N X k \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\
&\simeq -N X k \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\
&= -\frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}.
\end{aligned}$$

近似 (14) を使用すると、

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

最終的には  $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

最終的なサイズ  $\bar{R}(\infty)$  一定の環境では、方程式の唯一の厳密に正の解です

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

これは式 (12) から簡単に見つかります。と  $i \ll N$ 、最終サイズ  $\bar{R}(\infty)$  初期状態にほとんど依存しない  $i$ 。これはおおよそ厳密に正の解決策です

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

式 (15) の修正項は、正または負にすることができます。それはの兆候に依存します  $\sin(\psi)$ 。両方に比例します  $1/\omega$ 、つまり  $T$ 、および最初に感染した人の  $i/N$  部分に。これが、発表されたように、流行の最終的なサイズが接触率をその平均で置き換えることによって得られるものに非常に近い理由です。

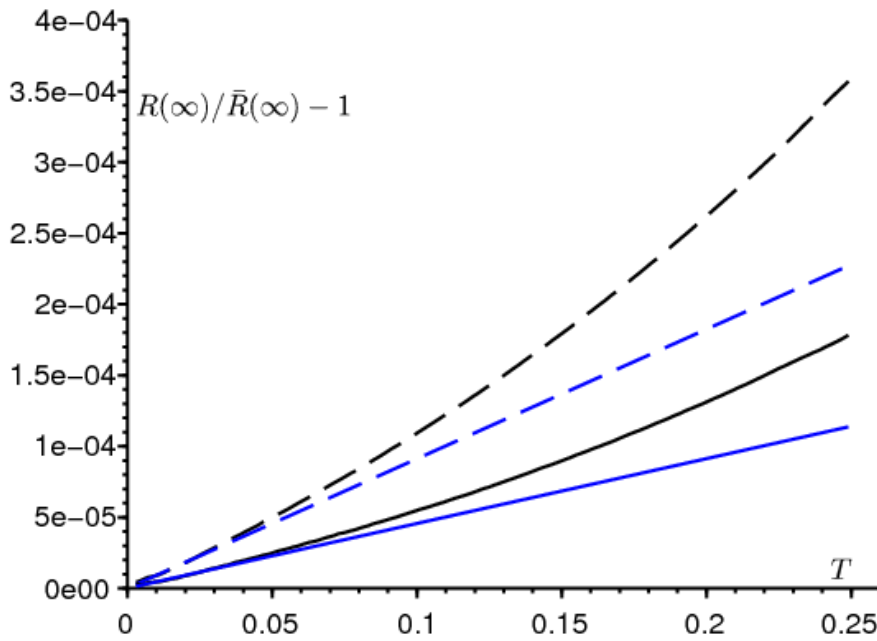


図4. 相対的な違い  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  期間による伝染病の最終的なサイズの間  $T$ 。黒で、 $R(\infty)$  微分方程式系をシミュレーションすることにより推定されます。近似 (15) は青色で示されています。パラメータは図3と同じです。  $k = 1$ 、期間を除いて  $T$  から 0,25 月とあれ  $i = 1$  (実線) または  $i = 2$  (点線)。

これを図4に示します。パラメーターの値は、 $k = 1$  の場合の図3と同じです。期間  $T$  は変動します。また、2つの初期条件を試しました。  $i = 1$  と  $i = 2$ 。もし  $T \rightarrow 0$ 、のカーブ  $R(\infty)$  近似に非常に接しているように見えます (15)。垂直スケールで、相対的な差の小ささに気づくでしょう  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ 。で  $N = 10,000$  これは、1又は2人の違いによる流行までの最終的なサイズ (サイズは整数であることが期待されている) に変換されます。と  $\bar{a}/b = 1,5$ 、Kermack と McKendrick の近似 (13) はまだ比較的良好です (Gani, 1975, p. 240)。

$\psi$  がゼロまたは  $\pi$  の整数倍の場合、式 (15) の修正項はゼロです。しかし、これは例外的なケースであるため、積分の新しい同等物を見つけることは価値がないかもしれません。

$\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  上記。

結論として、最終的なサイズの近接性は  $R(\infty)$  と  $\bar{R}(\infty)$  どのようなわけか、多くの流行モデルでは、短期間の振動は平均接触率のみを考慮に入れずに無視されているという事実を正当化します。

## 参考文献

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, Bull. Math. Biol. 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, J. Math. Biol. 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, C. R. Biol. 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, J. Math. Biol. 68, 533–548.

- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée– sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schecter (2016) The entry– exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J. –P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P. –L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource– consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J. –L. Ovaert, J. –L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.