

# Due modelli di popolazione in un ambiente periodico lento o veloce

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037  
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Unità di modellazione matematica e computerizzata di sistemi complessi  
Les Cordeliers, Parigi, Francia  
nicolas.bacaer@ird.fr

## riassunto

Affrontiamo due problemi nelle dinamiche della popolazione in un ambiente periodico lento o veloce. Innanzitutto, otteniamo un'approssimazione per la probabilità di non estinzione di un processo lineare di nascita e morte con coefficienti periodici, quando il periodo è grande o piccolo. Se il tasso di natalità è inferiore alla mortalità durante una parte del periodo e se il periodo tende all'infinito, allora la probabilità di non estinzione converge verso un limite discontinuo collegato a un'anatra in un sistema a velocità lenta. In secondo luogo, studiamo un modello epidemico non lineare di tipo SIR quando la frequenza di contatto oscilla rapidamente. La dimensione finale dell'epidemia è vicina a quella ottenuta sostituendo la velocità di contatto con la sua media.

## 1 Introduzione

In un'opera pubblicata qualche tempo fa (Bacaër, 2015), abbiamo studiato il limite di un modello di dinamica della popolazione, il modello stocastico SIS, in un ambiente periodico in cui il periodo tendeva a 0 o all'infinito. Proponiamo qui di studiare allo stesso modo due modelli apparentemente più semplici: un processo lineare di nascita e morte e un modello epidemico deterministico di tipo SIR. Questi due modelli possono essere visti come approssimazioni dello stesso modello SIR stocastico. Il processo di nascita e morte serve come approssimazione all'inizio dell'epidemia; le nuove infezioni hanno il ruolo delle nascite, le guarigioni sono quelle dei morti. Il modello deterministico viene utilizzato come approssimazione quando il numero di persone infette è già abbastanza grande.

Quindi consideriamo prima un processo lineare di nascita e morte in un ambiente variabile con un tasso di natalità  $a(t)$  e una mortalità  $b(t)$ . Il processo inizia alle  $t = t_0$  con un singolo individuo. La probabilità di non estinzione è

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

se l'integrale nel denominatore è finito o infinito (Gani, 1975, p. 220). Ciò vale in particolare nel caso in cui le funzioni  $a(t)$  e  $b(t)$  diciamo periodici dello stesso periodo  $T$ . Supponiamo che

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

dove  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$  sono funzioni periodiche del periodo 1. Considera i mezzi

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

Allora  $p(t_0)$  è identicamente uguale a 0 se  $\bar{a} \leq \bar{b}$ . È una funzione  $T$ -periodicamente strettamente positivo e rigorosamente inferiore a 1 se  $\bar{a} > \bar{b}$  (vedi (Bacaër, 2007, §5.2) e (Bacaër e Ait Dads, 2014)). Ora supponiamo che  $\bar{a} > \bar{b}$ . Questo è il caso supercritico.

La formula (1) è semplificata quando il periodo  $T$  è molto piccolo o molto grande, come recentemente notato (Carmona e Gandon, 2019). se  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  è fisso e se  $T \rightarrow 0$ , allora  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ . se  $t_0/T = \tau_0$  è fisso e se  $T \rightarrow +\infty$ , allora  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ , almeno per determinati valori di  $\tau_0$  dove  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ .

L'obiettivo di seguito è chiarire queste osservazioni proponendo un'approssimazione della probabilità di estinzione. Il limite  $T \rightarrow 0$  è il più semplice: abbiamo

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

se  $T \rightarrow +\infty$ , supponiamo che le funzioni  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$  sono regolari (diciamo differenziabili con un derivato continuo) e considerano due casi:

- $A(\tau) > B(\tau)$  per  $\tau \in [0, 1]$  (caso fortemente supercritico);
- $A(\tau) > B(\tau)$  per  $\tau \in [0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1]$  dove  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  e  $A(\tau) < B(\tau)$  per  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (caso debolmente supercritico).

Senza perdita di generalità, si può ipotizzare ulteriormente nel secondo caso  $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ . C'è quindi un unico  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  con

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Mostriamo nella sezione 2 che nel primo caso per  $\tau_0 \in [0, 1]$  e nel secondo caso per  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

Nel secondo caso con  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Quest'ultima probabilità converge esponenzialmente rapidamente a 0 quando  $T \rightarrow +\infty$ . In definitiva, vi è quindi una discontinuità in  $\tau_0 = \tau^*$ . Il limite è zero non solo in  $] \tau_1, \tau_2[$  ma anche in  $] \tau^*, \tau_2[$ . Ciò è correlato a un fenomeno di "anatra" in un sistema ad alta velocità, come spiegato nella sezione 2.6.

Quindi, prendere in considerazione il modello deterministico di epidemia SIR. Definiamo

- $N$  : la presunta dimensione costante di una popolazione,
- $S(t)$  : il numero di persone sane al momento  $t$ ,
- $I(t)$  : il numero di persone infette,
- $R(t)$  : il numero di persone rimosse dalla catena di trasmissione perché guarite e immunizzate,
- $a(t)$  : il tasso di contatto infettivo,
- $b$  : il tasso di guarigione.

In tal modo  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Si presume, come nel modello semplificato di Kermack e McKendrick (vedi ad esempio (Hillion, 1986, p. 75)) che

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Ogni individuo sano è quindi influenzato dalla proporzione  $I/N$  degli individui infetti nella popolazione totale, in altre parole dal "campo medio", e non dal suo vicinato in una particolare struttura di contatto.

In un recente lavoro (Bacaër, 2019), eravamo interessati all'influenza che un'oscillazione periodica di piccola ampiezza della velocità di contatto avrebbe sulla dimensione finale dell'epidemia. Ci concentreremo qui sul caso in cui l'ampiezza è arbitraria ma in cui il periodo delle oscillazioni è piccolo rispetto alla durata tipica dell'epidemia. Per un'epidemia che durerebbe alcune settimane, ciò rappresenterebbe, ad esempio, la rapida alternanza tra giorno e notte. Per un'epidemia che durerebbe alcuni mesi, ciò rappresenterebbe l'alternanza tra giorni lavorativi e fine settimana, specialmente per le epidemie nelle scuole. Per un'epidemia che durerebbe diversi anni o addirittura diversi decenni, ciò rappresenterebbe l'alternanza tra inverni ed estati;

Il periodo delle oscillazioni è  $T > 0$ . Questo parametro è destinato a convergere a 0. Supponiamo che

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

con

- $\bar{a} > 0$ ,
- $\phi$  : una funzione continua in pezzi con

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

In tal modo  $a(t)$  è una funzione periodica del periodo  $T$ , con una media  $\bar{a}$ . Prendi come condizioni iniziali all'inizio dell'epidemia

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

con  $0 < i < N$ .

La sezione 3.1 mostra le simulazioni di questo modello. Vediamo dagli esempi che la dimensione finale dell'epidemia è notevolmente vicina a quella ottenuta sostituendo la velocità di contatto con la sua media. Nella sezione 3.2, proponiamo una spiegazione di questa prossimità formulando alcune ipotesi aggiuntive sui parametri del modello, in particolare supponendo che la frazione iniziale di persone infette sia piccola e che la riproducibilità dell'epidemia rimanga prossima a 1. Otteniamo una formula approssimativa per la correzione da apportare alla dimensione finale dell'epidemia. Questa correzione è proporzionale sia al periodo delle oscillazioni sia alla frazione iniziale delle persone infette, da cui la sua piccolezza.

## 2 Un processo di nascita e morte

### 2.1 Calcolo preliminare

Diamo un'occhiata al processo lineare di nascita e morte. Consideriamo l'integrale con il denominatore di formula (1) e annotiamolo

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Per definizione, abbiamo

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Abbiamo  $t_0/T = \tau_0$ . Definiamo  $u = t/T$  e  $v = s/T$ . Quindi, usando la periodicità delle funzioni  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du.
\end{aligned}$$

In tal modo

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

## 2.2 Il limite $T \rightarrow 0$

Con l'approssimazione  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$  nel fattore prima dell'integrale, e più semplicemente  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  nell'integrale, otteniamo

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Lo notiamo

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Lo deduciamo

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

con  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , deduciamo la formula (2).

## 2.3 Il limite $T \rightarrow +\infty$ : il caso altamente supercritico

Ritorniamo alla formula (7). L'integrale è della forma

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

con

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

Abbiamo

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Supponiamo prima di tutto  $A(\tau) > B(\tau)$  per  $\tau \in [0, 1]$ . Allora  $F'(u) > 0$  per tutto  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u)$  al minimo in  $u = 0$  e  $F(0) = 0$ . Più,  $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  se  $u \rightarrow 0$ , con  $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  e

$\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ . Inoltre,  $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  se  $u \rightarrow 0$ , con  $\psi_0 = B(\tau_0)$  e  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ . Secondo un teorema di Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

con  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  e  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ . perché  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  è esponenzialmente piccolo, formula (7) dà

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

con  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , deduciamo la formula (4).

## 2.4 Il caso debolmente supercritico

Supponiamo ora che ci sia  $\tau_1$  e  $\tau_2$  con  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  e

$$\begin{aligned} A(\tau) < B(\tau) & \text{ per } \tau \in ]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) > B(\tau) & \text{ per } \tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

perché  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ , abbiamo due possibilità:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

Partiamo dal presupposto che la prima disuguaglianza è vera, anche se significa spostare le funzioni nel tempo  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$ .

C'è quindi un unico  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  con

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

Anzi, se

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

allora  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  per  $\tau \in [0, \tau_1]$ . Più,  $h(0) > 0$  secondo la prima disuguaglianza (9) e  $h(\tau_1) < 0$ . Quindi c'è un unico  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  con  $h(\tau^*) = 0$ .

Consideriamo innanzitutto il caso in cui  $0 < \tau_0 < \tau_1$ . La funzione  $F(u)$  sta aumentando per  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ . Sta diminuendo per  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ . Sta crescendo di nuovo per  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ . La funzione  $F(u)$  pertanto ha un minimo locale in  $\tau_2 - \tau_0$ . Ricordalo  $F(0) = 0$ .

se  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$ , allora  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ . pertanto  $u = 0$  rimane il minimo complessivo di  $F(u)$  sull'intervallo  $[0, 1]$ . Lo sviluppo asintotico (8) rimane valido e anche la formula (4).

Se, d'altra parte  $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$ , allora  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ . Il minimo complessivo di  $F(u)$  sull'intervallo  $[0, 1]$  è dentro  $u = \tau_2 - \tau_0$ ,  $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ ,  $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  e

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

se  $T \rightarrow +\infty$ , secondo il metodo Laplace (Ovaert e Verley, 1997). In tal modo

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

e  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  se  $T \rightarrow +\infty$ , che fornisce la formula (5).

Ora considera il caso in cui  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ . La funzione  $F(u)$  diminuisce nell'intervallo  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  quindi aumentando nell'intervallo  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ . Nel frattempo è minimo  $[0, 1]$  viene quindi raggiunto in  $u = \tau_2 - \tau_0$ , come nel caso precedente. Pertanto, la formula (5) è ancora valida.

Infine, considera il caso in cui  $\tau_2 < \tau_0 < 1$ . La funzione  $F(u)$  sta aumentando nell'intervallo  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ . Diminuisce nell'intervallo  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ . Sta aumentando nell'intervallo  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ . Ha quindi un minimo locale in  $1 + \tau_2 - \tau_0$  e

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

secondo la prima disuguaglianza (9). Il suo minimo complessivo in  $[0, 1]$  viene quindi raggiunto a  $u = 0$ . Pertanto, è la formula (4) che si applica.

## 2.5 Esempio

Prendiamo  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  costante e

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

con  $\bar{a} > \bar{b}$  e  $0 \leq k \leq 1$ . Il caso altamente supercritico corrisponde a  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . Se al contrario  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ , allora  $\tau_1 < \tau_2$  sono le due soluzioni in  $[0, 1]$  dell'equazione  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ , vale a dire

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

La soglia  $\tau^*$  è la soluzione in  $[0, \tau_1]$  dell'equazione

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

Formula (2) dà

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

se  $T \rightarrow 0$ . se  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$  o se  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  e  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ , quindi formula (4) dà

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{T A(\tau_0) [A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

se  $T \rightarrow +\infty$ . se  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  e  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ , Formula (5) dà

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp \left[ T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi} \right]$$

se  $T \rightarrow +\infty$ .

Prendiamo in particolare  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$  e  $k = 0,5$ . Allora  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . La Figura 1 mostra i risultati per due valori del periodo:  $T = 0,5$  e  $T = 50$ . La probabilità di non estinzione  $p(t_0)$ , dato dalla formula (1), è

stimato dall'integrazione numerica con il software Scilab. Possiamo vedere che le formule approssimative (2) e (4) forniscono approssimazioni migliori. Si noti tuttavia che per  $T \rightarrow +\infty$ , l'approssimazione (4) si discosta leggermente da  $p(t_0)$  nelle vicinanze del minimo di  $p(t_0)$ .

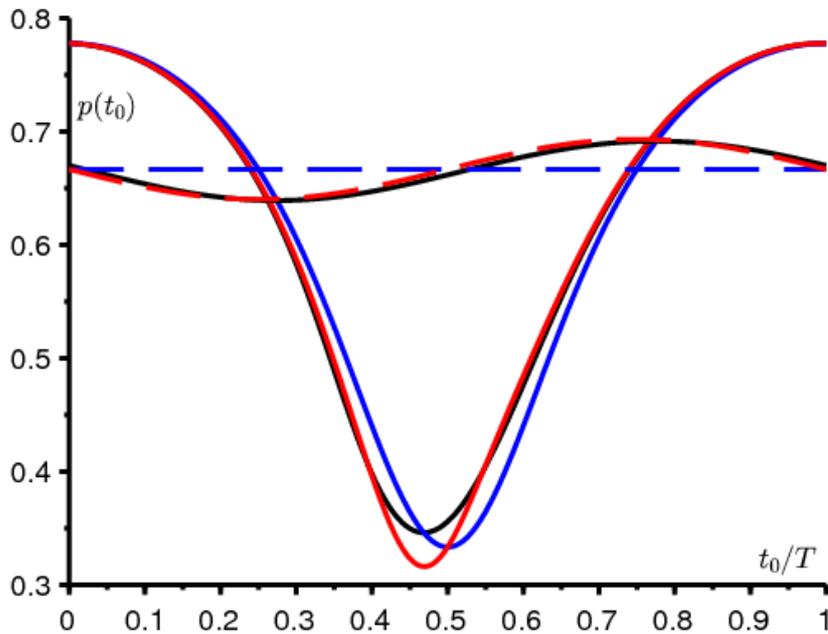


Figura 1. Due esempi:  $T = 0,5$  (punteggiato) e  $T = 50$  (linee continue). La probabilità di non estinzione  $p(t_0)$ , dato dalla formula (1), è in nero. Linea tratteggiata: la formula approssimativa (2) in rosso e l'approssimazione  $1 - \bar{b}/\bar{a}$  in blu. Linee continue: la formula approssimativa (4) in rosso e l'approssimazione  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  in blu.

Prendiamo ora  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$ ,  $k = 0,75$  e  $T = 100$ . Allora  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ,  $\tau^* \simeq 0,347$ ,  $\tau_1 \simeq 0,424$  e  $\tau_2 \simeq 0,576$ . Le varie formule approssimative sono rappresentate nella figura 2, in particolare la formula (5) in verde. La probabilità di non estinzione converge in un limite discontinuo. per  $\tau < \tau^*$  e  $\tau > \tau_2$ , il limite è blu. per  $\tau^* < \tau < \tau_2$ , il limite è uguale a 0. Vi è un piccolo problema di connessione delle approssimazioni a livello di  $\tau_0 = \tau_2$ , che ci porta a dare un'occhiata più da vicino a ciò che sta accadendo a questo punto.

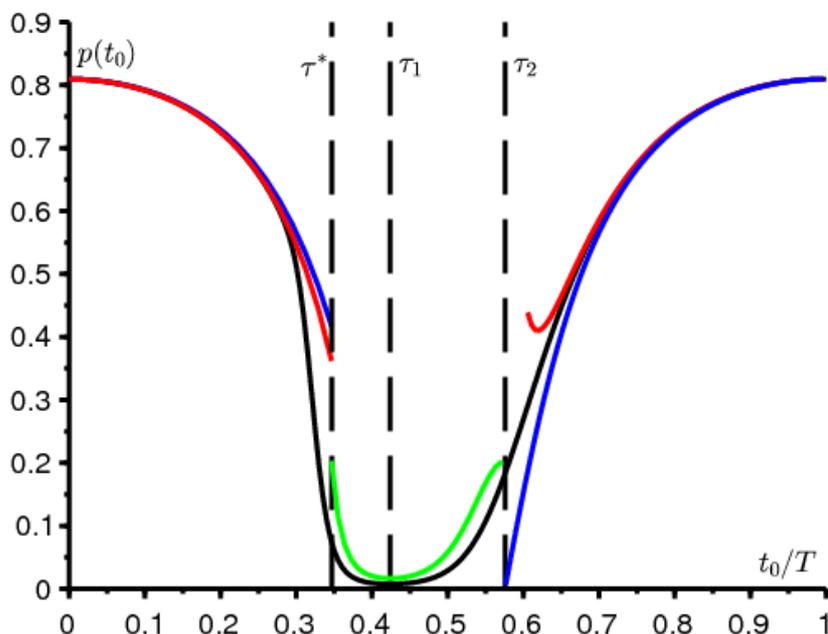


Figura 2. Come in Figura 1 ma con  $T = 100$  e  $k = 0,75$ . La formula approssimativa (5) è in verde.

Come nel caso in cui  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  nella sezione 4.2, vediamo nel caso speciale dove  $\tau_0 = \tau_2$  che  $F(u)$  al suo massimo globale in  $[0, 1]$  in  $u = 0$ . Ma questa volta  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ . Secondo lo stesso teorema di Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

così quello  $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  se  $T \rightarrow +\infty$ . La formula (5) rimane valida quando  $\tau_0 = \tau_2$ . Il decadimento esponenziale verso 0 quando  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  è sostituito da una diminuzione di  $1/\sqrt{T}$  al punto  $\tau_2$ .

## 2.6 Collegamento con "anatre"

Formula (1) per la probabilità di estinzione  $p(t_0)$  al momento  $t_0$  è effettivamente ottenuto come segue: if  $u > t_0$ , la probabilità di estinzione al momento  $u$  del processo che parte da un individuo alla volta  $t_0$  è  $z(u - t_0)$  con  $z(0) = 0$  e

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër e Ait Dads, 2014). È perché questa equazione di Riccati è esplicitamente risolvibile che otteniamo la formula (1) per la probabilità di non estinzione

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Prendiamo ad esempio  $u = t_0 + nT$  con  $n$  numeri interi assolutamente positivi. Viene quindi scritta l'equazione (10)

$$\frac{dz}{dt} = \left[ B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

se  $s = t/T$  e  $z(t) = x(s)$ , allora

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

sull'intervallo  $s \in [0, n]$ . Questo può essere scritto come un sistema autonomo lento-veloce:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

per  $s \in [0, n]$ , con  $x(0) = 0$  e  $y(0) = 0$ . infine

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

se  $T \rightarrow \infty$ , vediamo su questo sistema ad alta velocità che  $x(n) \rightarrow 1$  o  $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ . Il fatto che  $x(n)$  rimane sul ramo instabile 1 per  $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$  è quindi lo stesso fenomeno di quella che viene chiamata "anatra" nello studio dei sistemi a bassa velocità. Richiama la definizione (Lobry, 2018, p. 182):

"In un campo lento-veloce di  $\mathbb{R}^2$ , possono esserci traiettorie che rimangono infinitamente vicine alla curva lenta per un tempo significativo (non infinitamente piccolo) lungo un arco attraente, seguito da un tempo significativo trascorso lungo un arco repulsivo. Tale traiettoria è chiamata [...] anatra. "

Verhulst (2014) ha anche notato la comparsa di tali anatre in relazione a un'equazione logistica periodica. La relazione (3) che si lega  $\tau^*$  e  $\tau_2$  è la corrispondente "relazione input-output" (Benoît, 1981; De Maesschalck e Schecter, 2016).

Queste osservazioni si estendono senza dubbio nel caso dei processi di nascita e morte a diversi tipi (Bacaër e Ait Dads, 2014) con matrici di nascita  $\mathcal{A}(\tau)$  e matrici di transizione o morte  $\mathcal{B}(\tau)$ , che portano a un sistema di moduli lento-veloce

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

dove \* indica la matrice trasposta. In questo caso, la relazione input-output rimane da determinare.

## 3 Il modello SIR

### 3.1 Alcune simulazioni

Consideriamo ora il modello SIR (6). I parametri sono scelti per essere plausibili:

- la popolazione totale è  $N = 10\,000$  ;
- solo una persona è stata infettata all'inizio dell'epidemia ( $i = 1$ );
- ogni persona ha in media  $\bar{a} = 15$  contatti al mese;
- la durata media dell'infezione è  $1/b = 1/10$  mesi, circa 3 giorni;
- il periodo  $T$  è 1/4 di un mese, o circa 7 giorni;
- il fattore periodico è

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

dove  $\omega = 2\pi/T$  e  $|k| \leq 1$  ;

- lo sfasamento è  $\psi = -\pi/2$  così quello  $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$  e la velocità di contatto  $a(t)$  è in una fase crescente a  $t = 0$ .

La riproducibilità è quindi  $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ , che garantisce lo sviluppo di un'epidemia con una dimensione finale  $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$  (Bacaër and Gomes, 2009).

La Figura 3 mostra due simulazioni tipiche del modello: una con  $k = 0$  (la velocità di contatto è costante), l'altro con  $k = 1$  (la frequenza di contatto oscilla). Anche se le curve per  $k = 1$  differiscono in modo significativo da quelli per  $k = 0$  durante l'epidemia è notevole che le dimensioni finali  $R(\infty)$  in entrambe le simulazioni sono quasi indistinguibili graficamente. Questo sarà spiegato nella prossima sezione.

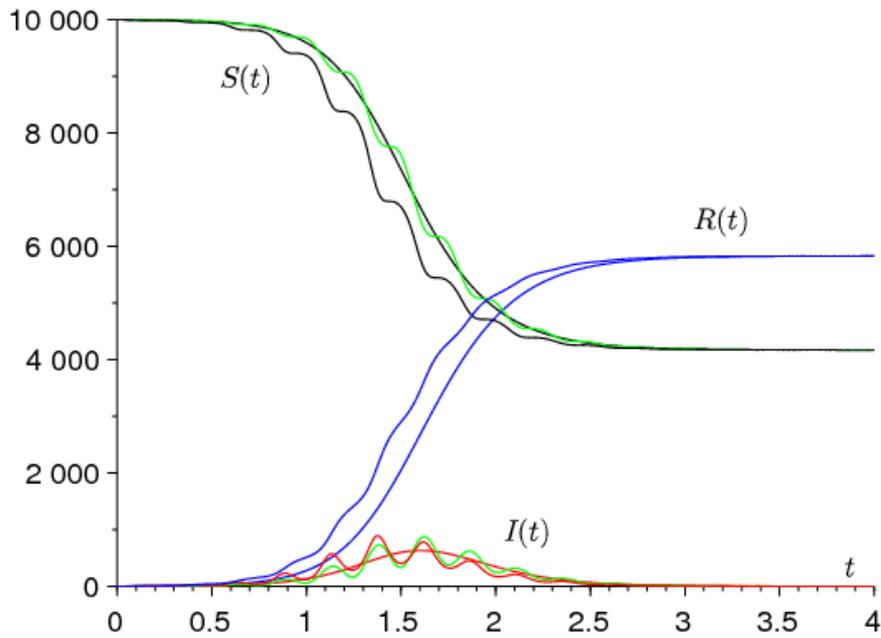


Figura 3. Simulazione di un'epidemia:  $S(t)$  in nero,  $I(t)$  in rosso e  $R(t)$  in blu in funzione del tempo  $t$  (in mesi). Le curve non ondulate corrispondono a  $k = 0$ , le curve ondulate a  $k = 1$ . Le curve verdi sono le approssimazioni del secondo ordine per  $S(t)$  e  $I(t)$ .

Riducendo il periodo delle oscillazioni (ad esempio con  $T = 1/8$  di mesi), vedremmo le curve  $(S(t), I(t), R(t))$  per  $k = 1$  mantenere le loro oscillazioni ma avvicinarsi alla soluzione con  $k = 0$ , che notiamo  $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$  perché corrisponde a  $a(t) = \bar{a}$ . Ciò è inoltre una conseguenza del teorema della media di Fatou (Françoise, 2005, teorema 42). Anzi, se  $\tau = t/T$ , il sistema è scritto

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

con  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ . Il teorema assicura che quando  $T \rightarrow 0$ ,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

per un po'  $\tau$  dell'ordine di  $1/T$ . In tal modo  $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$  per un po'  $t$  nell'ordine di 1. Più precisamente, ci sono costanti  $c_1, c_2, c_3$  e  $T_0$  tutto positivo, con per  $0 < T < T_0$  e per  $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Possiamo calcolare un'approssimazione del secondo ordine. Scriviamo il sistema (11) nel modulo  $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$ , dove  $Z = (S, I, R)$  e  $f(\tau, Z)$  è  $\tau$ -periodico del periodo 1. Quindi

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che l'espressione deve essere rimossa  $\sin(\psi)$  in modo che queste ultime funzioni siano di media zero. Secondo (François, 2005, teorema 44), abbiamo

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

e  $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$  per un intervallo di tempo  $\tau$  dell'ordine di  $1/T$ . In altre parole,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

e  $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$  per un intervallo di tempo  $t$  dell'ordine di 1. Queste approssimazioni di  $S(t)$  e  $I(t)$  sono mostrati in verde nella Figura 3.

Si noti che con un periodo della frequenza di contatto che è piccolo, non si osserva una curva epidemica con diverse onde grandi, a differenza delle simulazioni di (Bacaër e Gomes, 2009). Questo perché il sistema si sta avvicinando sempre di più al caso in cui il tasso di contatto è nella media, il che provoca solo un'onda epidemica.

### 3.2 Prossimità alle dimensioni finali delle epidemie

Scrivendo la prima equazione (6) nel modulo  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$ , integrando tra  $t = 0$  e  $t = +\infty$ , tenendo conto delle condizioni iniziali e di cosa  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ , si trova facilmente come in (Bacaër, 2019) che

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

L'integrale oscillante  $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$  probabilmente converge a 0 quando  $T \rightarrow 0$ . Anzi, lo sappiamo da un lato  $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ . D'altra parte, almeno quando  $\phi$  è un coseno, l'integrale  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  converge a 0 quando  $T \rightarrow 0$ . Anzi, la funzione  $\bar{I}(t)$  è positivo e integrabile perché  $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ . La trasformata di Fourier di una funzione integrabile converge a 0 all'infinito.

Ne segue quello  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  se  $T \rightarrow 0$ . La domanda è: quanto velocemente succede. Come prima approssimazione, l'equazione (12) fornisce

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

come in (Bacaër, 2019).

Quindi usiamo per  $\bar{I}(t)$  l'espressione analitica approssimativa sotto forma di campana simmetrica ottenuta da Kermack e McKendrick (vedi ad esempio (Bacaër, 2019) o (Gani, 1975)). se  $\bar{a}/b > 1$ , se  $\bar{a}/b \simeq 1$ , se  $i/N \ll 1$ , allora

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

dove  $\text{ch}(\cdot)$  denota il coseno iperbolico e

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

sotto il probabile presupposto aggiuntivo  $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ .  $W$  è un'approssimazione del tempo che trascorre prima del picco dell'epidemia in un ambiente costante.

Finalmente supponiamo che  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  come in figura 3. Notiamo  $\text{Re}(\cdot)$  la parte reale di un numero complesso e  $i$  il solito numero immaginario (da non confondere  $i$ , la popolazione inizialmente infetta). Abbiamo quindi, usando un risultato classico sul calcolo asintotico di integrali complessi con una fase che non è stazionaria, in modo che il termine principale provenga dal limite dell'intervallo di integrazione (Ovaert e Verley, 1997, Teorema 3)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

Con le approssimazioni (14), possiamo anche vederlo

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

che alla fine cede  $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

La dimensione finale  $\bar{R}(\infty)$  in un ambiente costante è l'unica soluzione strettamente positiva all'equazione

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

che si trova facilmente dall'equazione (12). con  $i \ll N$ , la dimensione finale  $\bar{R}(\infty)$  dipende molto poco dalla condizione iniziale  $i$ . Questa è approssimativamente la soluzione strettamente positiva di

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

Il termine di correzione nell'equazione (15) può essere positivo o negativo; dipende dal segno di  $\sin(\psi)$ . È sia proporzionale a  $1/\omega$ , cioè a  $T$  e alla frazione  $I/N$  delle persone inizialmente infette. Questo è il motivo per cui, come annunciato, la dimensione finale dell'epidemia è notevolmente vicina a quella ottenuta sostituendo la velocità di contatto con la sua media.

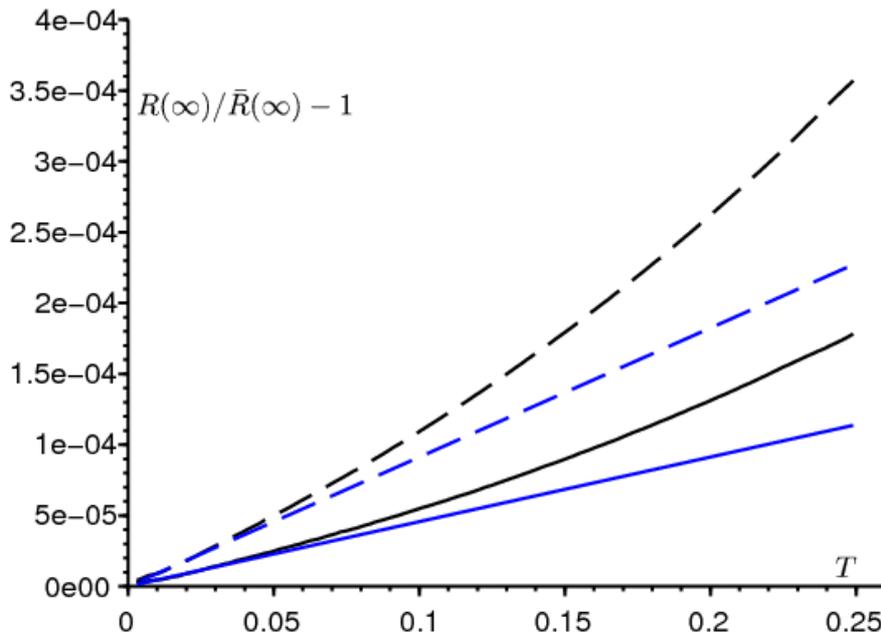


Figura 4. La differenza relativa  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  tra le dimensioni finali delle epidemie secondo il periodo  $T$ . In nero,  $R(\infty)$  viene stimato simulando il sistema di equazioni differenziali. L'approssimazione (15) è mostrata in blu. I parametri sono gli stessi della Figura 3 con  $k = 1$ , tranne che il periodo  $T$  varia tra 0 e 0,25 mese e quello  $i = 1$  (linee continue) o  $i = 2$  (Linea tratteggiata).

Questo è illustrato nella figura 4 con valori dei parametri identici a quelli della figura 3 per  $k = 1$ . Il periodo  $T$  varia. Abbiamo anche provato due condizioni iniziali:  $i = 1$  e  $i = 2$ . se  $T \rightarrow 0$ , la curva per  $R(\infty)$  sembra molto tangente all'approssimazione (15). Noteremo sulla scala verticale la piccolezza della differenza relativa  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ . Con  $N = 10\,000$ , questo si traduce per la dimensione finale dell'epidemia al massimo da una differenza di 1 o 2 persone (la dimensione dovrebbe in linea di principio essere un numero intero). con  $\bar{a}/b = 1,5$ , l'approssimazione (13) di Kermack e McKendrick è ancora relativamente buona (Gani, 1975, p. 240).

Se  $\psi$  è zero o un multiplo intero del numero  $\pi$ , il termine di correzione nell'equazione (15) è zero. Ma poiché si tratta di un caso eccezionale, potrebbe non essere utile trovare un nuovo equivalente per l'integrale  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  sopra.

In conclusione, possiamo dire che la vicinanza delle dimensioni finali  $R(\infty)$  e  $\bar{R}(\infty)$  giustifica in qualche modo il fatto che in molti modelli epidemici, le oscillazioni di breve periodo sono trascurate per considerare solo i tassi di contatto medi.

## riferimenti

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée-sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.

- Ph. Carmona, S. Gandon (2019)  
Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments,  
<https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016)  
The entry–exit function and geometric singular perturbation theory,  
*J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.),  
École d'été de probabilités de Saint–Flour IV–1974, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*,  
Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*,  
ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) *Calculs asymptotiques*,  
in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*,  
Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system,  
*Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.