

# Dos modelos de población en un entorno periódico lento o rápido.

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037  
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Unidad de modelado matemático e informático de sistemas complejos  
Les Cordeliers, París, Francia  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Resumen

Abordamos dos problemas en la dinámica de la población en un entorno periódico lento o rápido. Primero, obtenemos una aproximación para la probabilidad de no extinción de un proceso lineal de nacimiento y muerte con coeficientes periódicos, cuando el período es grande o pequeño. Si la tasa de natalidad es menor que la mortalidad durante parte del período y si el período tiende hacia el infinito, entonces la probabilidad de no extinción converge hacia un límite discontinuo vinculado a un "pato" en un sistema lento-rápido. En segundo lugar, estudiamos un modelo epidémico no lineal del tipo SIR cuando la velocidad de contacto oscila rápidamente. El tamaño final de la epidemia es cercano al obtenido al reemplazar la tasa de contacto con su promedio.

## 1 Introducción

En un trabajo publicado hace algún tiempo (Bacaër, 2015), estudiamos el límite de un modelo de dinámica de población, el modelo estocástico SIS, en un entorno periódico cuando el período tendía hacia 0 o infinito. Aquí proponemos estudiar de la misma manera dos modelos aparentemente más simples: un proceso lineal de nacimiento y muerte y un modelo epidémico determinista del tipo SIR. Estos dos modelos pueden verse como aproximaciones del mismo modelo SIR estocástico. El proceso de nacimiento y muerte sirve como una aproximación al comienzo de la epidemia; las nuevas infecciones juegan el papel de los nacimientos, las curaciones juegan el de los muertos. El modelo determinista se usa como una aproximación cuando el número de personas infectadas ya es lo suficientemente grande.

Consideremos primero un proceso lineal de nacimiento y muerte en un entorno variable con una tasa de natalidad  $a(t)$  y una mortalidad  $b(t)$ . El proceso comienza a las  $t = t_0$  con un solo individuo. La probabilidad de no extinción es

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

si la integral en el denominador es finita o infinita (Gani, 1975, p. 220). Esto se aplica en particular al caso donde las funciones  $a(t)$  y  $b(t)$  son periódicas del mismo período, digamos  $T$ . Suponemos que

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

donde  $A(\tau)$  y  $B(\tau)$  son funciones periódicas del período 1. Considere los medios

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

Entonces  $p(t_0)$  es idénticamente igual a 0 si  $\bar{a} \leq \bar{b}$ . Es una función  $T$ -periódicamente estrictamente positivo y estrictamente menos de 1 si  $\bar{a} > \bar{b}$  (ver (Bacaër, 2007, §5.2) y (Bacaër y Ait Dads, 2014)). Ahora asumimos que  $\bar{a} > \bar{b}$ . Este es el caso supercrítico.

La fórmula (1) se simplifica cuando el período  $T$  es muy pequeño o muy grande, como se señaló recientemente (Carmona y Gandon, 2019). Si  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  es fijo y si  $T \rightarrow 0$ , entonces  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ . Si  $t_0/T = \tau_0$  es fijo y si  $T \rightarrow +\infty$ , entonces  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ , al menos para ciertos valores de  $\tau_0$  donde  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ .

El objetivo a continuación es aclarar estas observaciones proponiendo una aproximación de la probabilidad de extinción. El límite  $T \rightarrow 0$  es el más simple: tenemos

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

Si  $T \rightarrow +\infty$ , asumimos que las funciones  $A(\tau)$  y  $B(\tau)$  son regulares (digamos diferenciables con una derivada continua) y consideramos dos casos:

- $A(\tau) > B(\tau)$  para  $\tau \in [0, 1]$  (caso fuertemente supercrítico);
- $A(\tau) > B(\tau)$  para  $\tau \in [0, \tau_1 \cup ]\tau_2, 1]$  donde  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  y  $A(\tau) < B(\tau)$  para  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (caso débilmente supercrítico).

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer en el segundo caso que  $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ . Entonces hay un único  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  con

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Mostramos en la sección 2 que en el primer caso para  $\tau_0 \in [0, 1]$ , y en el segundo caso para  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

En el segundo caso con  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ ,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Esta última probabilidad converge exponencialmente rápido a 0 cuando  $T \rightarrow +\infty$ . Finalmente, hay una discontinuidad en  $\tau_0 = \tau^*$ . El límite es cero no solo en  $] \tau_1, \tau_2[$  pero también en  $] \tau^*, \tau_2[$ . Esto está relacionado con un fenómeno de "pato" en un sistema lento-rápido, como se explica en la sección 2.6.

A continuación, considere el modelo de epidemia SIR determinista. Definimos

- $N$ : el tamaño constante asumido de una población,
- $S(t)$ : la cantidad de personas sanas en ese momento  $t$ ,
- $I(t)$ : el número de personas infectadas,
- $R(t)$ : el número de personas retiradas de la cadena de transmisión porque están curadas e inmunizadas,
- $a(t)$ : la tasa de contacto infeccioso,
- $b$ : la tasa de curación.

Entonces  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Se supone, como en el modelo simplificado de Kermack y McKendrick (ver por ejemplo (Hillion, 1986, p. 75)) que

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Por lo tanto, cada individuo sano está influenciado por la proporción  $I/N$  de individuos infectados en la población total, en otras palabras, por el "campo medio", y no por su vecindario en una estructura de contacto particular.

En un trabajo reciente (Bacaër, 2019), estábamos interesados en la influencia que tendría una oscilación periódica de pequeña amplitud de la velocidad de contacto en el tamaño final de la epidemia. Nos centraremos aquí en el caso donde la amplitud es arbitraria pero donde el período de las oscilaciones es pequeño en comparación con la duración típica de la epidemia. Para una epidemia que duraría unas pocas semanas, esto representaría, por ejemplo, la rápida alternancia entre el día y la noche. Para una epidemia que duraría unos pocos meses, esto representaría la alternancia entre días laborables y fines de semana, especialmente para epidemias en las escuelas. Para una epidemia que duraría varios años o incluso varias décadas, esto representaría la alternancia entre inviernos y veranos;

El periodo de las oscilaciones es  $T > 0$ . Este parámetro está destinado a converger a 0. Suponemos que

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

con

- $\bar{a} > 0$ ,
- $\phi$  : una función continua en piezas con

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

Entonces  $a(t)$  es una función periódica del período  $T$ , con un promedio  $\bar{a}$ . Tomar como condiciones iniciales al comienzo de la epidemia.

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

con  $0 < i < N$ .

La sección 3.1 muestra simulaciones de este modelo. Vemos de los ejemplos que el tamaño final de la epidemia es notablemente cercano al obtenido al reemplazar la tasa de contacto con su promedio. En la sección 3.2, proponemos una explicación de esta proximidad haciendo algunas hipótesis adicionales sobre los parámetros del modelo, en particular suponiendo que la fracción inicial de personas infectadas es pequeña y que la reproducibilidad de la epidemia sigue siendo cercana a 1. Obtenemos una fórmula aproximada para corregir el tamaño final de la epidemia. Esta corrección es proporcional tanto al período de las oscilaciones como a la fracción inicial de personas infectadas, de ahí su pequeñez.

## 2 Un proceso de nacimiento y muerte.

### 2.1 Cálculo preliminar

Veamos primero el proceso lineal de nacimiento y muerte. Consideremos la integral con el denominador de fórmula (1) y anótelo

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Por definición, tenemos

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Se tiene  $t_0/T = \tau_0$ . Definimos  $u = t/T$  y  $v = s/T$ . Entonces, usando la periodicidad de las funciones  $A(\tau)$  y  $B(\tau)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\
&= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du.
\end{aligned}$$

Entonces

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

## 2.2 El límite $T \rightarrow 0$

Con la aproximación  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  para  $x \rightarrow 0$  en el factor antes de la integral, y más simplemente  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  en la integral, obtenemos

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Observamos que

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Deducimos que

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

Con  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , deducimos la fórmula (2).

## 2.3 El límite $T \rightarrow +\infty$ : el caso altamente supercrítico

Volvamos a la fórmula (7). La integral es de la forma

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

con

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

Se tiene

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Primero supongamos que  $A(\tau) > B(\tau)$  para  $\tau \in [0, 1]$ . Entonces  $F'(u) > 0$  por todo  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u)$  como mínimo en  $u = 0$  y  $F(0) = 0$ . De más,  $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  si  $u \rightarrow 0$ , con

$\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  y  $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ . Por otro lado,  $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  si  $u \rightarrow 0$ , con  $\psi_0 = B(\tau_0)$  y  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ . Según un teorema de Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du = e^{-T F(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

con  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  y  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ . Porque  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  es exponencialmente pequeño, la fórmula (7) da

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

Con  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , deducimos la fórmula (4).

## 2.4 El caso débilmente supercrítico

Supongamos ahora que hay  $\tau_1$  y  $\tau_2$  con  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  y

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \text{ para } \tau \in ]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \text{ para } \tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Porque  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ , tenemos dos posibilidades:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

Suponemos que la primera desigualdad es verdadera, incluso si eso significa cambiar las funciones con el tiempo.  $A(\tau)$  y  $B(\tau)$ .

Entonces hay un único  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  con

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

De hecho, si

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

entonces  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  para  $\tau \in [0, \tau_1]$ . De más,  $h(0) > 0$  de acuerdo con la primera desigualdad (9) y  $h(\tau_1) < 0$ . Entonces hay un único  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  con  $h(\tau^*) = 0$ .

Consideremos primero el caso donde  $0 < \tau_0 < \tau_1$ . La función  $F(u)$  está aumentando para  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ . Está disminuyendo para  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ . Está creciendo de nuevo por  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ . La función  $F(u)$  por lo tanto tiene un mínimo local en  $\tau_2 - \tau_0$ . Recordemos que  $F(0) = 0$ .

Si  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$ , entonces  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ . Entonces  $u = 0$  sigue siendo el mínimo general de  $F(u)$  en el intervalo  $[0, 1]$ . El desarrollo asintótico (8) sigue siendo válido y la fórmula (4) también.

Si, por otro lado  $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$ , entonces  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ . El mínimo general de  $F(u)$  en el intervalo  $[0, 1]$  esta en  $u = \tau_2 - \tau_0$ ,  $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ ,  $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  y

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T F(\tau_2 - \tau_0)}$$

si  $T \rightarrow +\infty$ , según el método de Laplace (Ovaert y Verley, 1997). Entonces

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

y  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  si  $T \rightarrow +\infty$ , que da la fórmula (5).

Ahora considere el caso donde  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ . La función  $F(u)$  disminuye durante el intervalo  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  luego aumentando durante el intervalo  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ . Su mínimo mientras tanto  $[0, 1]$  se alcanza por lo tanto en  $u = \tau_2 - \tau_0$ , como en el caso anterior. Por lo tanto, la fórmula (5) sigue siendo válida.

Finalmente, considere el caso donde  $\tau_2 < \tau_0 < 1$ . La función  $F(u)$  está aumentando a lo largo del intervalo  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ . Disminuye durante el intervalo  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ . Está aumentando a lo largo del intervalo  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ . Por lo tanto, tiene un mínimo local en  $1 + \tau_2 - \tau_0$  y

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

según la primera desigualdad (9). Su mínimo general en  $[0, 1]$  por lo tanto se alcanza en  $u = 0$ . Por lo tanto, es la fórmula (4) la que se aplica.

## 2.5 Ejemplo

Vamos a tomar  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  constante y

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

con  $\bar{a} > \bar{b}$  y  $0 \leq k \leq 1$ . El caso altamente supercrítico corresponde a  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . Si por el contrario  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ , entonces  $\tau_1 < \tau_2$  son las dos soluciones en  $[0, 1]$  de la ecuación  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ , a saber

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

El umbral  $\tau^*$  es la solución en  $[0, \tau_1]$  de la ecuación

$$(\bar{a} - \bar{b})(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

La fórmula (2) da

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

si  $T \rightarrow 0$ . Si  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$  o si  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  y  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ , entonces la fórmula (4) da

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi\bar{a}\bar{b}k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

si  $T \rightarrow +\infty$ . Si  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$  y  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ , La fórmula (5) da

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

si  $T \rightarrow +\infty$ .

Tomemos en particular  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$  y  $k = 0,5$ . Entonces  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . La Figura 1 muestra los resultados para dos valores del período:  $T = 0,5$  y  $T = 50$ . La probabilidad de no extinción.  $p(t_0)$ , dada por

la fórmula (1), se estima mediante integración numérica con el software Scilab. Podemos ver que las fórmulas aproximadas (2) y (4) dan mejores aproximaciones. Sin embargo, tenga en cuenta que para  $T \rightarrow +\infty$ , la aproximación (4) se desvía un poco de  $p(t_0)$  en las proximidades del mínimo de  $p(t_0)$ .

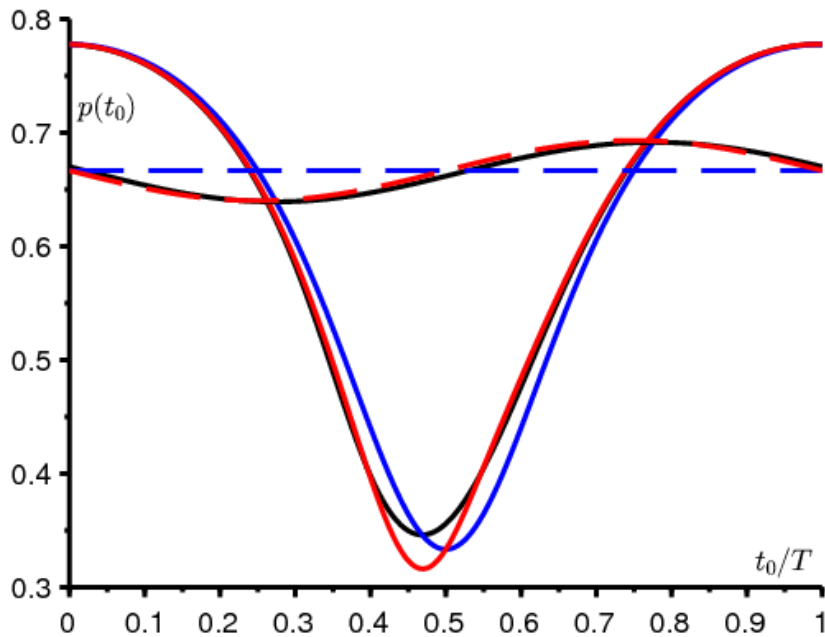


Figura 1. Dos ejemplos:  $T = 0,5$  (punteado) y  $T = 50$  (líneas continuas). La probabilidad de no extinción  $p(t_0)$ , dada por la fórmula (1), está en negro. Línea punteada: la fórmula aproximada (2) en rojo y la aproximación  $1 - \bar{b}/\bar{a}$  en azul. Líneas continuas: la fórmula aproximada (4) en rojo y la aproximación  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  en azul.

Tomemos ahora  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$ ,  $k = 0,75$  y  $T = 100$ . Entonces  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ,  $\tau^* \simeq 0,347$ ,  $\tau_1 \simeq 0,424$  y  $\tau_2 \simeq 0,576$ . Las diversas fórmulas aproximadas se representan en la figura 2, en particular la fórmula (5) en verde. La probabilidad de no extinción converge a un límite discontinuo. Para  $\tau < \tau^*$  y  $\tau > \tau_2$ , el límite es azul. Para  $\tau^* < \tau < \tau_2$ , el límite es igual a 0. Hay un pequeño problema de conectar las aproximaciones al nivel de  $\tau_0 = \tau_2$ , lo que nos lleva a mirar más de cerca lo que está sucediendo en este momento.

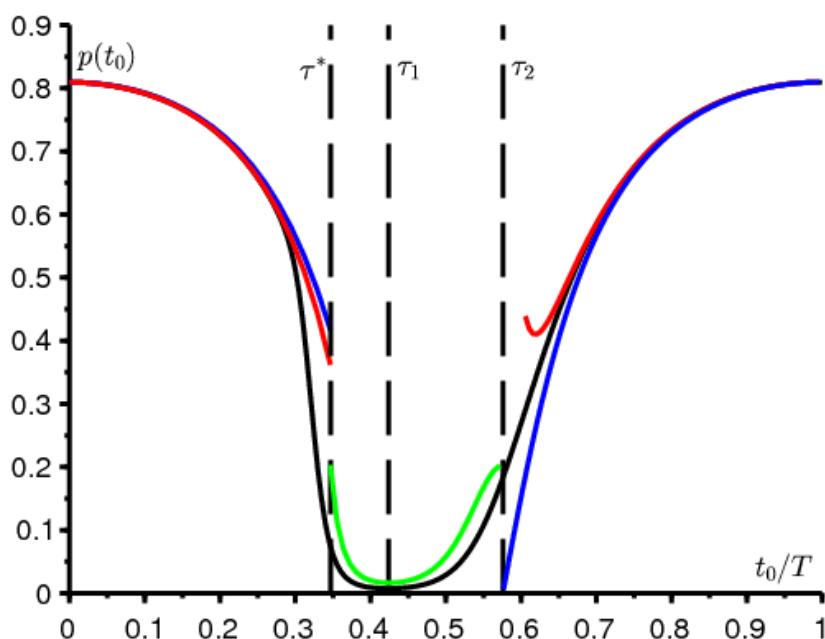


Figura 2. Como en la Figura 1 pero con  $T = 100$  y  $k = 0,75$ . La fórmula aproximada (5) está en verde.

Como en el caso donde  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  en la sección 4.2, vemos en el caso especial donde  $\tau_0 = \tau_2$  eso  $F(u)$  en su máximo global en  $[0, 1]$  en  $u = 0$ . Pero esta vez  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ . Según el mismo teorema de Erdélyi (Olver, 1974, p. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

de manera que  $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  si  $T \rightarrow +\infty$ . La fórmula (5) sigue siendo válida cuando  $\tau_0 = \tau_2$ . La disminución exponencial hacia 0 cuando  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  se reemplaza por una disminución en  $1/\sqrt{T}$  al punto  $\tau_2$ .

## 2.6 Enlace con "patos"

Fórmula (1) para la probabilidad de extinción  $p(t_0)$  a tiempo  $t_0$  en realidad se obtiene de la siguiente manera: si  $u > t_0$ , la probabilidad de extinción en el momento  $u$  del proceso que comienza desde un individuo en el momento  $t_0$  es  $z(u - t_0)$  con  $z(0) = 0$  y

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër y Ait Dads, 2014). Debido a que esta ecuación de Riccati es explícitamente solucionable, obtenemos la fórmula (1) para la probabilidad de no extinción

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Tomemos por ejemplo  $u = t_0 + nT$  con  $n$  entero estrictamente positivo. Entonces se escribe la ecuación (10)

$$\frac{dz}{dt} = \left[ B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

Si  $s = t/T$  y  $z(t) = x(s)$ , entonces

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

en el intervalo  $s \in [0, n]$ . Esto se puede escribir como un sistema autónomo lento-rápido:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

para  $s \in [0, n]$ , con  $x(0) = 0$  y  $y(0) = 0$ . Finalmente

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

Si  $T \rightarrow \infty$ , vemos en este sistema lento-rápido que  $x(n) \rightarrow 1$  donde  $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ . El hecho que  $x(n)$  permanece en la rama inestable 1 para  $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$  Por lo tanto, es el mismo fenómeno que lo que se llama "pato" en el estudio de los sistemas de lento-rápido. Recordemos la definición (Lobry, 2018, p. 182):

"En un campo lento-rápido de  $\mathbb{R}^2$ , puede haber trayectorias que permanecen infinitamente cercanas a la curva lenta durante un tiempo significativo (no infinitamente pequeño) a lo largo de un arco atractivo, seguido de un tiempo significativo pasado a lo largo de un arco repulsivo. Tal trayectoria se llama [...] pato. "



Verhulst (2014) también notó la aparición de tales patos en relación con una ecuación logística periódica. La relación (3) que une  $\tau^*$  y  $\tau_2$  es la correspondiente "relación entrada-salida" (Benoît, 1981; De Maesschalck y Schecter, 2016).

Estas observaciones, sin duda, se extienden en el caso de los procesos de nacimiento y muerte a varios tipos (Bacaër y Ait Dads, 2014) con matrices de nacimiento  $\mathcal{A}(\tau)$  y matrices de transición o muerte  $\mathcal{B}(\tau)$ , que conducen a un sistema de forma lento-rápido

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

donde  $*$  denota la matriz transpuesta. En este caso, la relación entrada-salida queda por determinar.

## 3 El modelo SIR

### 3.1 Algunas simulaciones

Ahora considere el modelo SIR (6). Los parámetros se eligen para que sean plausibles:

- la población total es  $N = 10\,000$  ;
- solo una persona estaba infectada al comienzo de la epidemia ( $i = 1$ );
- cada persona tiene en promedio  $\bar{a} = 15$  contactos por mes;
- la duración promedio de la infección es  $1/b = 1/10$  meses, aproximadamente 3 días;
- el periodo  $T$  es  $1/4$  de un mes, o aproximadamente 7 días;
- el factor periódico es

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

donde  $\omega = 2\pi/T$  y  $|k| \leq 1$  ;

- el cambio de fase es  $\psi = -\pi/2$  de manera que  $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$  y la tasa de contacto  $a(t)$  está en una fase creciente en  $t = 0$ .

La reproducibilidad es entonces  $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ , que garantiza el desarrollo de una epidemia con un tamaño final  $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$  (Bacaër y Gomes, 2009).

La Figura 3 muestra dos simulaciones típicas del modelo: una con  $k = 0$  (la velocidad de contacto es constante), la otra con  $k = 1$  (la velocidad de contacto oscila). Aunque las curvas para  $k = 1$  difieren significativamente de los de  $k = 0$  durante la epidemia es notable que los tamaños finales  $R(\infty)$  en ambas simulaciones son casi indistinguibles gráficamente. Esto se explicará en la siguiente sección.

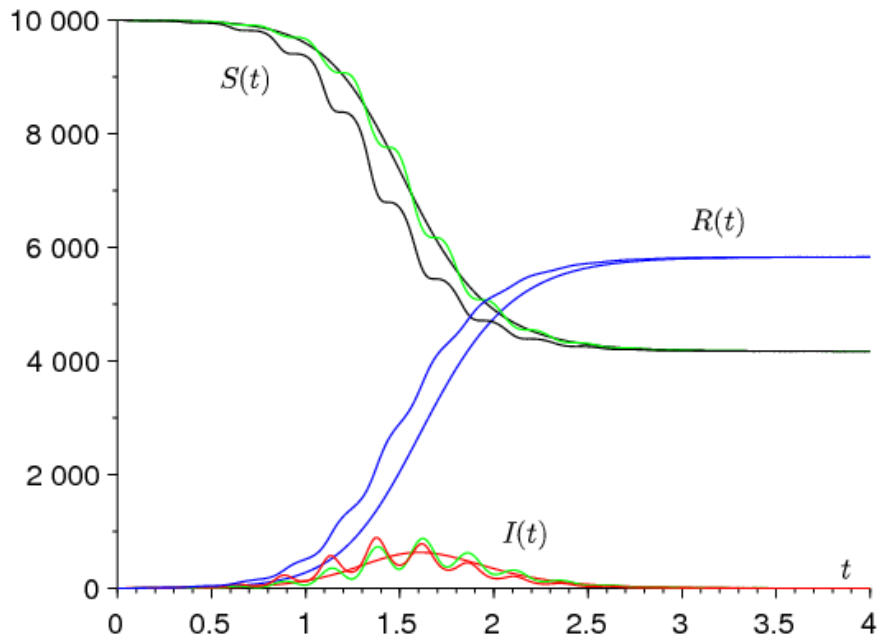


Figura 3. Simulación de una epidemia:  $S(t)$  en negro  $I(t)$  en rojo y  $R(t)$  en azul en función del tiempo  $t$  (en meses) Las curvas no onduladas corresponden a  $k = 0$ , las curvas onduladas en  $k = 1$ . Las curvas verdes son las aproximaciones de segundo orden para  $S(t)$  y  $I(t)$ .

Al reducir el período de las oscilaciones (por ejemplo, con  $T = 1/8$  de meses), veríamos las curvas  $(S(t), I(t), R(t))$  para  $k = 1$  mantener sus oscilaciones pero acercarse a la solución con  $k = 0$ , que observamos  $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$  porque corresponde a  $a(t) = \bar{a}$ . Esto es, además, una consecuencia del teorema del promedio de Fatou (François, 2005, teorema 42). De hecho, si  $\tau = t/T$ , el sistema está escrito

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

con  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ . El teorema asegura que cuando  $T \rightarrow 0$ ,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

por un rato  $\tau$  del orden de  $1/T$ . Entonces  $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$  por un rato  $t$  del orden de 1. Más precisamente, hay constantes  $c_1, c_2, c_3$  y  $T_0$  todo positivo, con para  $0 < T < T_0$  y para  $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Podemos calcular una aproximación de segundo orden. Escribamos el sistema (11) en la forma  $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$  donde  $Z = (S, I, R)$  y  $f(\tau, Z)$  es  $\tau$ -período del período 1. Entonces

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenga en cuenta que la expresión debe eliminarse  $\sin(\psi)$  para que estas últimas funciones sean de media cero. Según (Françoise, 2005, teorema 44), tenemos

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

y  $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$  durante un intervalo de tiempo  $\tau$  del orden de  $1/T$ . Dicho de otro modo,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

y  $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$  durante un intervalo de tiempo  $t$  del orden de 1. Estas aproximaciones de  $S(t)$  y  $I(t)$  se muestran en verde en la Figura 3.

Tenga en cuenta que con un período de la tasa de contacto que es pequeño, no observamos una curva epidémica con varias olas grandes, a diferencia de las simulaciones de (Bacaër y Gomes, 2009). Esto se debe a que el sistema se está acercando cada vez más al caso en el que la tasa de contacto es promedio, lo que genera solo una ola epidémica.

### 3.2 Proximidad a los tamaños finales de epidemias

Al escribir la primera ecuación (6) en la forma  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$ , integrando entre  $t = 0$  y  $t = +\infty$ , teniendo en cuenta las condiciones iniciales y que  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ , se encuentra fácilmente como en (Bacaër, 2019) que

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

La integral oscilante  $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$  probablemente converge a 0 cuando  $T \rightarrow 0$ . De hecho, sabemos por un lado que  $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ . Por otro lado, al menos cuando  $\phi$  es un coseno, la integral  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  converge a 0 cuando  $T \rightarrow 0$ . De hecho, la función  $\bar{I}(t)$  es positivo e integrable porque  $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ . La transformada de Fourier de una función integrable converge a 0 en el infinito.

Se sigue que  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  si  $T \rightarrow 0$ . La pregunta es qué tan rápido sucede esto. Como primera aproximación, la ecuación (12) da

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

como en (Bacaër, 2019).

Luego usamos para  $\bar{I}(t)$  la expresión analítica aproximada en forma de campana simétrica obtenida por Kermack y McKendrick (ver por ejemplo (Bacaër, 2019) o (Gani, 1975)). Si  $\bar{a}/b > 1$  si  $\bar{a}/b \simeq 1$  si  $i/N \ll 1$ , entonces

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

donde  $\text{ch}(\cdot)$  denota el coseno hiperbólico y

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

bajo la probable suposición adicional  $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ .  $W$  es una aproximación del tiempo que transcurre antes del pico de la epidemia en un entorno constante.

Finalmente supongamos que  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  como en la figura 3. Observemos  $\text{Re}(\cdot)$  la parte real de un número complejo y  $i$  El número imaginario habitual (no debe confundirse con  $i$ , la población inicialmente infectada). Luego tenemos, utilizando un resultado clásico en el cálculo asintótico de integrales complejas con una fase que no es estacionaria, de modo que el término principal proviene del borde del intervalo de integración (Ovaert y Verley, 1997, Teorema 3 ),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

Con las aproximaciones (14), también podemos ver que

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

que finalmente da por  $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

El tamaño final  $\bar{R}(\infty)$  en un entorno constante es la única solución estrictamente positiva a la ecuación

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right),$$

que se encuentra fácilmente en la ecuación (12). Con  $i \ll N$ , el tamaño final  $\bar{R}(\infty)$  depende muy poco de la condición inicial  $i$ . Esta es más o menos la solución estrictamente positiva de

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

El término de corrección en la ecuación (15) puede ser positivo o negativo; depende del signo de  $\sin(\psi)$ . Es a la vez proporcional a  $1/\omega$ , es decir, a  $T$ , y a la fracción  $i/N$  de personas inicialmente infectadas. Esta es la razón por la cual, como se anunció, el tamaño final de la epidemia es notablemente cercano al obtenido al reemplazar la tasa de contacto con su promedio.

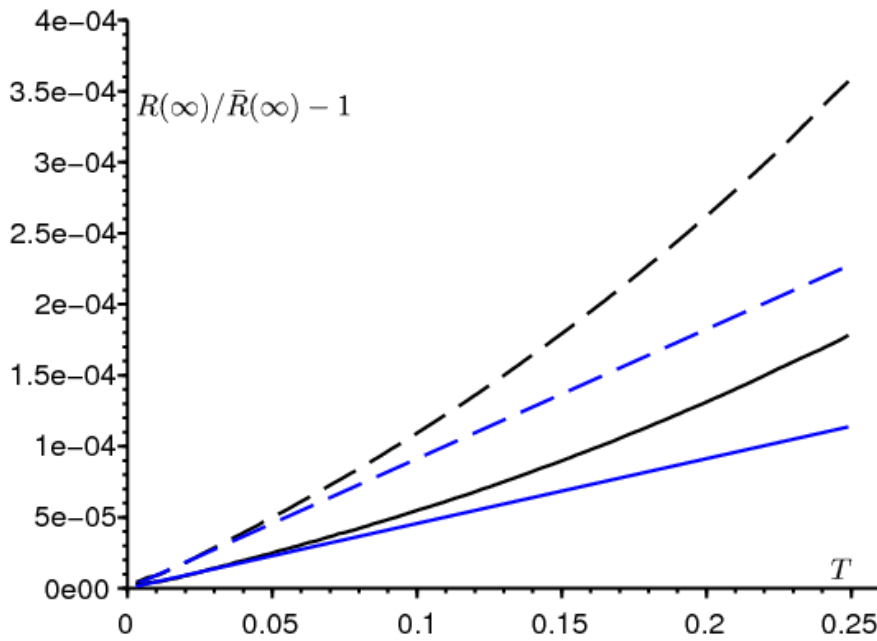


Figura 4. La diferencia relativa  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  entre los tamaños finales de epidemias según el período  $T$ . En negro  $R(\infty)$  se estima simulando el sistema de ecuaciones diferenciales. La aproximación (15) se muestra en azul. Los parámetros son los mismos que en la Figura 3 con  $k = 1$ , excepto que el período  $T$  varía entre 0 y 0,25 mes y que  $i = 1$  (líneas continuas) o  $i = 2$  (punteado)

Esto se ilustra en la figura 4 con valores de los parámetros idénticos a los de la figura 3 para  $k = 1$ . El período  $T$  varía. También probamos dos condiciones iniciales:  $i = 1$  y  $i = 2$ . Si  $T \rightarrow 0$ , la curva para  $R(\infty)$  parece muy tangente a la aproximación (15). Notaremos en la escala vertical la pequeñez de la diferencia relativa  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ . Con  $N = 10,000$ , esto se traduce para el tamaño final de la epidemia como máximo por una diferencia de 1 o 2 personas (el tamaño debería ser, en principio, un número entero). Con  $\bar{a}/b = 1,5$ , la aproximación (13) de Kermack y McKendrick sigue siendo relativamente buena (Gani, 1975, p. 240).

Si  $\psi$  es cero o un múltiplo entero del número  $\pi$ , el término de corrección en la ecuación (15) es cero. Pero dado que este es un caso excepcional, puede que no valga la pena encontrar un nuevo equivalente para la integral  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  arriba

En conclusión, podemos decir que la proximidad de los tamaños finales  $R(\infty)$  y  $\bar{R}(\infty)$  de alguna manera justifica el hecho de que en muchos modelos epidémicos, las oscilaciones de períodos cortos se descuidan para considerar solo las tasas de contacto promedio.

## Referencias

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, Bull. Math. Biol. 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, J. Math. Biol. 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, C. R. Biol. 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, J. Math. Biol. 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, Bull. Math. Biol. 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée-sortie, C. R. Acad. Sci. Paris (série I) 293, 293–296.

- Ph. Carmona, S. Gandon (2019)  
Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments,  
<https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016)  
The entry–exit function and geometric singular perturbation theory,  
J. Diff. Eq. 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) Oscillations en biologie, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.),  
École d'été de probabilités de Saint–Flour IV–1974, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) Les Théories mathématiques des populations,  
Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique,  
ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) Asymptotics and Special Functions, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) Calculs asymptotiques,  
in : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie,  
Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system,  
Int. J. Nonlin. Mech. 67, 371–377.