

# Zwei Populationsmodelle in einer langsamen oder schnellen periodischen Umgebung

J. Math. Biol. **80** (2020) 1021-1037  
<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Mathematische und Computermodellierungseinheit komplexer Systeme  
Les Cordeliers, Paris, Frankreich  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Zusammenfassung

Wir befassen uns mit zwei Problemen der Bevölkerungsdynamik in einem langsamen oder schnellen periodischen Umfeld. Zunächst erhalten wir eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit der Nichtauslöschung eines linearen Prozesses von Geburt und Tod mit periodischen Koeffizienten, wenn die Periode groß oder klein ist. Wenn die Geburtenrate während eines Teils des Zeitraums niedriger ist als die Sterblichkeit und wenn der Zeitraum gegen unendlich tendiert, konvergiert die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens gegen eine diskontinuierliche Grenze, die mit einer "Ente" in einem langsam-schnellen System verbunden ist. Zweitens untersuchen wir ein nichtlineares Epidemiemodell vom Typ SIR, wenn die Kontaktrate schnell schwankt. Die endgültige Größe der Epidemie liegt nahe an der, die durch Ersetzen der Kontaktrate durch ihren Durchschnitt erhalten wird.

## 1 Einleitung

In einer vor einiger Zeit veröffentlichten Arbeit (Bacaër, 2015) haben wir die Grenze eines Populationsdynamikmodells, des stochastischen SIS-Modells, in einer periodischen Umgebung untersucht, in der die Periode gegen 0 oder unendlich tendierte. Wir schlagen hier vor, zwei scheinbar einfachere Modelle auf dieselbe Weise zu untersuchen: einen linearen Prozess von Geburt und Tod und ein deterministisches Epidemiemodell vom Typ SIR. Diese beiden Modelle können als Annäherungen an dasselbe stochastische SIR-Modell angesehen werden. Der Geburts- und Todesprozess dient als Annäherung zu Beginn der Epidemie; Neuinfektionen spielen die Rolle von Geburten, Heilungen spielen die der Toten. Das deterministische Modell wird als Annäherung verwendet, wenn die Anzahl der infizierten Personen bereits groß genug ist.

Betrachten wir zunächst einen linearen Prozess von Geburt und Tod in einer variablen Umgebung mit einer Geburtenrate  $a(t)$  und eine Sterblichkeit  $b(t)$ . Der Prozess beginnt um  $t = t_0$  mit einer einzelnen Person. Die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens beträgt

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

ob das Integral im Nenner endlich oder unendlich ist (Gani, 1975, S. 220). Dies gilt insbesondere für den Fall, dass die Funktionen  $a(t)$  und  $b(t)$  sind periodisch von der gleichen Periode, sagen wir mal  $T$ . Wir gehen davon aus

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

wo  $A(\tau)$  und  $B(\tau)$  sind periodische Funktionen der Periode 1. Betrachten Sie die Mittel

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

Also  $p(t_0)$  ist identisch gleich 0 wenn  $\bar{a} \leq \bar{b}$ . Es ist eine Funktion  $T$ -periodisch streng positiv und streng weniger als 1 wenn  $\bar{a} > \bar{b}$  (siehe (Bacaër, 2007, §5.2) und (Bacaër und Ait Dads, 2014)). Das nehmen wir jetzt an  $\bar{a} > \bar{b}$ . Dies ist der überkritische Fall.

Die Formel (1) wird vereinfacht, wenn die Periode  $T$  entweder sehr klein oder sehr groß ist, wie kürzlich festgestellt wurde (Carmona und Gandon, 2019). Wenn  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  ist fest und wenn  $T \rightarrow 0$  dann  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ . Wenn  $t_0/T = \tau_0$  ist fest und wenn  $T \rightarrow +\infty$  dann  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  zumindest für bestimmte Werte von  $\tau_0$  wo  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ .

Das folgende Ziel besteht darin, diese Beobachtungen zu verdeutlichen, indem eine Annäherung an die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens vorgeschlagen wird. Die Grenze  $T \rightarrow 0$  ist das einfachste: wir haben

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

Wenn  $T \rightarrow +\infty$  nehmen wir an, dass die Funktionen  $A(\tau)$  und  $B(\tau)$  sind regelmäßig (sagen wir differenzierbar mit einer kontinuierlichen Ableitung) und betrachten zwei Fälle:

- $A(\tau) > B(\tau)$  für  $\tau \in [0, 1]$  (stark überkritischer Fall);
- $A(\tau) > B(\tau)$  für  $\tau \in [0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1]$  wo  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  und  $A(\tau) < B(\tau)$  für  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (schwach überkritischer Fall).

Ohne Verlust der Allgemeinheit kann im zweiten Fall weiter davon ausgegangen werden, dass  $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ . Es gibt dann eine einzigartige  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  mit

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

Wir zeigen in Abschnitt 2, dass im ersten Fall für  $\tau_0 \in [0, 1]$  und im zweiten Fall für  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2[$ ,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

Im zweiten Fall mit  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ ,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

Diese letzte Wahrscheinlichkeit konvergiert exponentiell schnell gegen 0, wenn  $T \rightarrow +\infty$ . Letztendlich gibt es daher eine Diskontinuität in  $\tau_0 = \tau^*$ . Die Grenze ist nicht nur in Null  $] \tau_1, \tau_2 [$  aber auch in  $] \tau^*, \tau_2 [$ . Dies hängt mit einem Entenphänomen in einem langsam-schnellen System zusammen, wie in Abschnitt 2.6 erläutert.

Betrachten Sie als nächstes das deterministische SIR-Epidemiemodell. Wir definieren

- $N$  : die angenommene konstante Größe einer Population,
- $S(t)$  : die Anzahl der gesunden Menschen zu der Zeit  $t$ ,
- $I(t)$  : die Anzahl der infizierten Personen,
- $R(t)$  : die Anzahl der Personen, die aus der Übertragungskette entfernt wurden, weil sie geheilt und immunisiert sind,
- $a(t)$  : die Rate des infektiösen Kontakts,
- $b$  : die Heilungsrate.

Also  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Es wird wie im vereinfachten Modell von Kermack und McKendrick (siehe zum Beispiel (Hillion, 1986, S. 75)) angenommen, dass

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

Jedes gesunde Individuum wird daher durch den  $I/N$ - Anteil infizierter Individuen an der Gesamtbevölkerung beeinflusst, dh durch das "mittlere Feld" und nicht durch seine Nachbarschaft in einer bestimmten Kontaktstruktur.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit (Bacaër, 2019) waren wir an dem Einfluss interessiert, den eine periodische Schwingung mit kleiner Amplitude der Kontaktrate auf die endgültige Größe der Epidemie haben würde. Wir werden uns hier auf den Fall konzentrieren, in dem die Amplitude willkürlich ist, die Periode der Schwingungen jedoch im Vergleich zur typischen Dauer der Epidemie klein ist. Für eine Epidemie, die einige Wochen dauern würde, würde dies zum Beispiel den schnellen Wechsel zwischen Tag und Nacht darstellen. Für eine Epidemie, die einige Monate dauern würde, würde dies den Wechsel zwischen Arbeitstagen und Wochenenden darstellen, insbesondere für Epidemien in Schulen. Für eine Epidemie, die mehrere Jahre oder sogar mehrere Jahrzehnte dauern würde, würde dies den Wechsel zwischen Winter und Sommer darstellen;

Die Periode der Schwingungen ist  $T > 0$ . Dieser Parameter soll gegen 0 konvergieren. Wir nehmen das an

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

mit

- $\bar{a} > 0$ ,
- $\phi$  : eine kontinuierliche Funktion in Stücken mit

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

Also  $a(t)$  ist eine periodische Funktion der Periode  $T$  mit einem Durchschnitt  $\bar{a}$ . Nehmen Sie als Ausgangsbedingungen zu Beginn der Epidemie

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

mit  $0 < i < N$ .

Abschnitt 3.1 zeigt Simulationen dieses Modells. Wir sehen anhand von Beispielen, dass die endgültige Größe der Epidemie bemerkenswert nahe an der liegt, die durch Ersetzen der Kontaktrate durch ihren Durchschnitt erhalten wird. In Abschnitt 3.2 schlagen wir eine Erklärung dieser Nähe vor, indem wir einige zusätzliche Hypothesen zu den Parametern des Modells aufstellen, insbesondere indem wir annehmen, dass der anfängliche Anteil infizierter Menschen gering ist und die Reproduzierbarkeit der Epidemie nahe bei 1 bleibt eine ungefähre Formel für die Korrektur der endgültigen Größe der Epidemie. Diese Korrektur ist sowohl proportional zur Periode der Schwingungen als auch zum anfänglichen Anteil infizierter Personen, daher ihre Kleinheit.

## 2 Ein Prozess von Geburt und Tod

### 2.1 Vorbereitung

Betrachten wir zunächst den linearen Prozess von Geburt und Tod. Betrachten wir das Integral mit dem Nenner der Formel (1) und notieren Sie es

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Per Definition haben wir

$$J = \int_0^\infty B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Wir haben  $t_0/T = \tau_0$ . Wir definieren  $u = t/T$  und  $v = s/T$ . Verwenden Sie also die Periodizität der Funktionen  $A(\tau)$  und  $B(\tau)$  bekommen wir

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

Also

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

## 2.2 Die Grenze $T \rightarrow 0$

Mit der Annäherung  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  für  $x \rightarrow 0$  im Faktor vor dem Integral und einfacher  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  im Integral bekommen wir

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

Das merken wir

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

Daraus schließen wir

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

Mit  $p(t_0) = 1/(1 + J)$  leiten wir die Formel (2) ab.

## 2.3 Die Grenze $T \rightarrow +\infty$ : der höchst überkritische Fall

Kehren wir zu Formel (7) zurück. Das Integral hat die Form

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

mit

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

Wir haben

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

Nehmen wir zunächst an, dass  $A(\tau) > B(\tau)$  für  $\tau \in [0, 1]$ . Also  $F'(u) > 0$  für alles  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u)$  an seinem Minimum in  $u = 0$  und  $F(0) = 0$ . Darüber hinaus  $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  wenn  $u \rightarrow 0$  mit  $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  und  $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ . Außerdem  $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  wenn  $u \rightarrow 0$  mit  $\psi_0 = B(\tau_0)$  und  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ . Nach einem Erdélyi-Theorem (Olver, 1974, S. 85),

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

mit  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  und  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ . Weil  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  ist exponentiell klein, ergibt Formel (7)

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

Mit  $p(t_0) = 1/(1 + J)$  leiten wir die Formel (4) ab.

## 2.4 Der schwach überkritische Fall

Nehmen wir jetzt an, dass es gibt  $\tau_1$  und  $\tau_2$  mit  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  und

$$\begin{aligned} A(\tau) < B(\tau) & \text{ für } \tau \in ]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) > B(\tau) & \text{ für } \tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Weil  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$  Wir haben zwei Möglichkeiten:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

Wir gehen davon aus, dass die erste Ungleichung wahr ist, auch wenn dies bedeutet, dass die Funktionen im Laufe der Zeit verschoben werden  $A(\tau)$  und  $B(\tau)$ .

Es gibt dann eine einzigartige  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  mit

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

In der Tat, wenn

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

so  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  für  $\tau \in [0, \tau_1]$ . Darüber hinaus  $h(0) > 0$  nach der ersten Ungleichung (9) und  $h(\tau_1) < 0$ . Es gibt also eine einzigartige  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  mit  $h(\tau^*) = 0$ .

Betrachten wir zunächst den Fall, in dem  $0 < \tau_0 < \tau_1$ . Die Funktion  $F(u)$  steigt für  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ . Es nimmt ab für  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$ . Es wächst wieder für  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ . Die Funktion  $F(u)$  hat daher ein lokales Minimum in  $\tau_2 - \tau_0$ . Denken Sie daran  $F(0) = 0$ .

Wenn  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$  dann  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ . Also  $u = 0$  bleibt das Gesamtminimum von  $F(u)$  auf das Intervall  $[0, 1]$ . Die asymptotische Entwicklung (8) bleibt gültig und die Formel (4) auch.

Wenn auf der anderen Seite  $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$  dann  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ . Das Gesamtminimum von  $F(u)$  auf das Intervall  $[0, 1]$  ist in  $u = \tau_2 - \tau_0$ ,  $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ ,  $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  und

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

wenn  $T \rightarrow +\infty$  nach der Laplace-Methode (Ovaert und Verley, 1997). Also

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

und  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  wenn  $T \rightarrow +\infty$ , was die Formel (5) ergibt.

Betrachten Sie nun den Fall, in dem  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ . Die Funktion  $F(u)$  nimmt über das Intervall ab  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  dann über das Intervall erhöhen  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ . Sein Minimum in der Zwischenzeit  $[0, 1]$  wird daher in erreicht  $u = \tau_2 - \tau_0$  wie im vorherigen Fall. Somit ist Formel (5) weiterhin gültig.

Betrachten Sie abschließend den Fall, in dem  $\tau_2 < \tau_0 < 1$ . Die Funktion  $F(u)$  nimmt über das Intervall zu  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ . Sie nimmt über das Intervall ab  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$ . Sie nimmt über das Intervall zu  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ . Es hat daher ein lokales Minimum in  $1 + \tau_2 - \tau_0$  und

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

nach der ersten Ungleichung (9). Sein Gesamtminimum in  $[0, 1]$  wird daher bei  $u = 0$  erreicht. Somit gilt die Formel (4).

## 2.5 Beispiel

Lass uns nehmen  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  konstant und

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

mit  $\bar{a} > \bar{b}$  und  $0 \leq k \leq 1$ . Der hoch überkritische Fall entspricht  $\bar{a}(1 - k) > b$ . Wenn im Gegenteil  $\bar{a}(1 - k) < b$  dann  $\tau_1 < \tau_2$  sind die beiden Lösungen in  $[0, 1]$  der Gleichung  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$  nämlich

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

Die Schwelle  $\tau^*$  ist die Lösung in  $[0, \tau_1]$  der Gleichung

$$(\bar{a} - b)(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

Formel (2) gibt

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

wenn  $T \rightarrow 0$ . Wenn  $\bar{a}(1 - k) > b$  oder wenn  $\bar{a}(1 - k) < b$  und  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$  dann ergibt Formel (4)

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi \bar{a} \bar{b} k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

wenn  $T \rightarrow +\infty$ . Wenn  $\bar{a}(1 - k) < b$  und  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  Formel (5) gibt

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

wenn  $T \rightarrow +\infty$ .

Nehmen wir insbesondere  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$  und  $k = 0,5$ . Also  $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$ . Abbildung 1 zeigt die Ergebnisse für zwei Werte des Zeitraums:  $T = 0,5$  und  $T = 50$ . Die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens  $p(t_0)$ , gegeben durch Formel (1), wird durch numerische Integration mit der Scilab-Software geschätzt. Wir können sehen, dass die ungefähren Formeln (2) und (4) bessere Annäherungen ergeben. Beachten Sie jedoch, dass für  $T \rightarrow +\infty$  weicht die Näherung (4) etwas von ab  $p(t_0)$  in der Nähe des Minimums von  $p(t_0)$ .

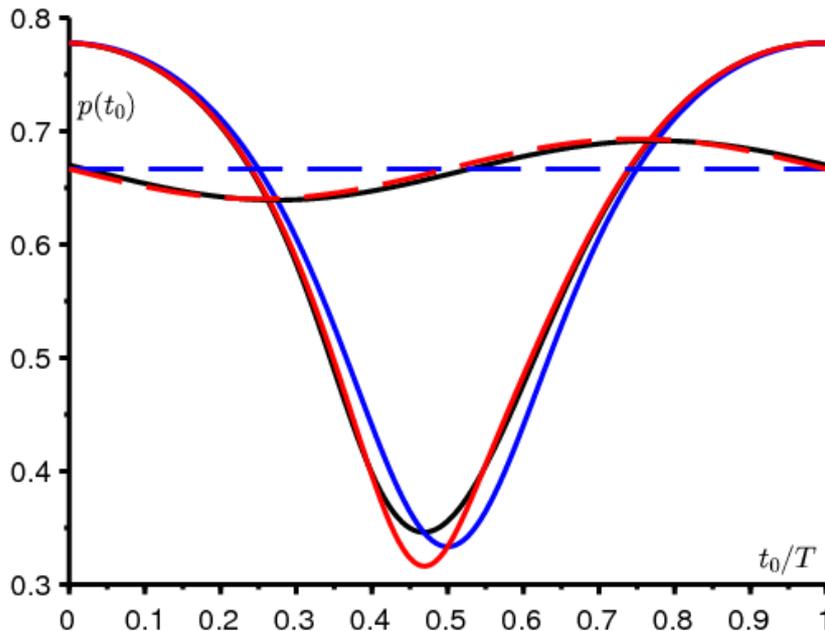


Abbildung 1. Zwei Beispiele:  $T = 0,5$  (gepunktet) und  $T = 50$  (durchgezogene Linien). Die Wahrscheinlichkeit des Nichtsterbens  $p(t_0)$ , gegeben durch Formel (1), ist in schwarz. Gepunktete Linie: die ungefähre Formel (2) in Rot und die Näherung  $1 - \bar{b}/\bar{a}$  in blau. Durchgezogene Linien: die ungefähre Formel (4) in Rot und die Näherung  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$  in blau.

Nehmen wir jetzt  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$ ,  $k = 0,75$  und  $T = 100$ . Also  $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ,  $\tau^* \simeq 0,347$ ,  $\tau_1 \simeq 0,424$  und  $\tau_2 \simeq 0,576$ . Die verschiedenen ungefähren Formeln sind in Fig. 2 dargestellt, insbesondere die Formel (5) in grün. Die Wahrscheinlichkeit der Nichtauslöschung konvergiert gegen eine diskontinuierliche Grenze. Für  $\tau < \tau^*$  und  $\tau > \tau_2$  ist die Grenze blau. Für  $\tau^* < \tau < \tau_2$  ist die Grenze gleich 0. Es gibt ein kleines Problem beim Verbinden der Näherungen auf der Ebene von  $\tau_0 = \tau_2$ , was uns dazu bringt, genauer zu betrachten, was an diesem Punkt passiert.

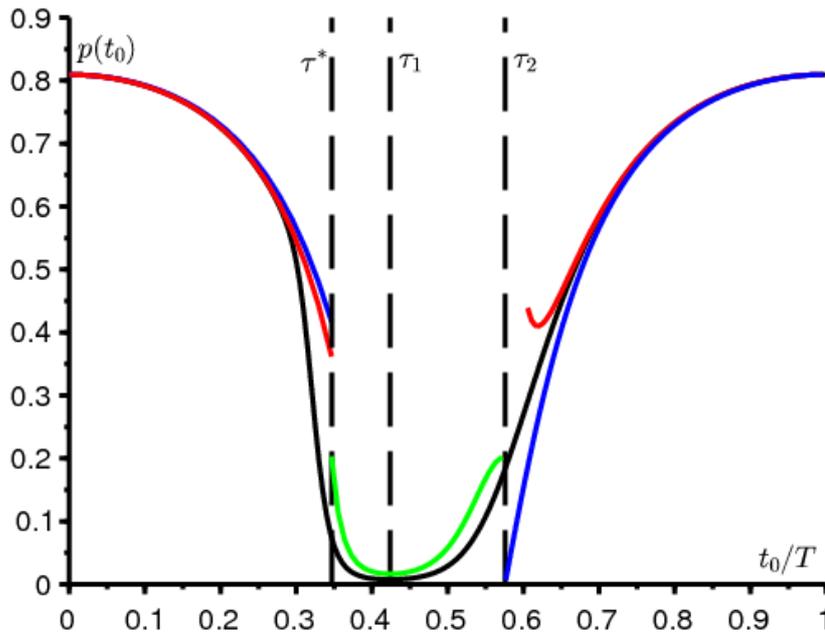


Abbildung 2. Wie in Abbildung 1, jedoch mit  $T = 100$  und  $k = 0,75$ . Die ungefähre Formel (5) ist grün.

Wie im Fall wo  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  In Abschnitt 4.2 sehen wir im Sonderfall wo  $\tau_0 = \tau_2$  das  $F(u)$  an seinem globalen Maximum in  $[0, 1]$  in  $u = 0$ . Aber diesmal  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ . Nach demselben Erdélyi-Theorem (Olver, 1974, S. 85),

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

so dass  $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  wenn  $T \rightarrow +\infty$ . Formel (5) bleibt gültig, wenn  $\tau_0 = \tau_2$ . Der exponentielle Abfall gegen 0 wenn  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  wird durch eine Abnahme in ersetzt  $1/\sqrt{T}$  auf den Punkt  $\tau_2$ .

## 2.6 Link mit "Enten"

Formel (1) für die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens  $p(t_0)$  zu der Zeit  $t_0$  wird tatsächlich wie folgt erhalten: wenn  $u > t_0$  die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens zum Zeitpunkt  $u$  des Prozesses, der von einem Individuum zum Zeitpunkt ausgeht  $t_0$  ist  $z(u - t_0)$  mit  $z(0) = 0$  und

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(Bacaër und Ait Dads, 2014). Weil diese Riccati-Gleichung explizit lösbar ist, erhalten wir die Formel (1) für die Wahrscheinlichkeit der Nichtauslöschung

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

Nehmen wir zum Beispiel  $u = t_0 + nT$  mit  $n$  streng positiver Ganzzahl. Gleichung (10) wird dann geschrieben

$$\frac{dz}{dt} = \left[ B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

Wenn  $s = t/T$  und  $z(t) = x(s)$  dann

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

auf das Intervall  $s \in [0, n]$ . Dies kann als langsam-schnelles autonomes System geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

für  $s \in [0, n]$  mit  $x(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ . Endlich

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

Wenn  $T \rightarrow \infty$  Wir sehen auf diesem langsam-schnellen System, dass  $x(n) \rightarrow 1$  wo  $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$ . Die Tatsache, dass  $x(n)$  bleibt auf dem instabilen Ast 1 für  $\tau^* < \tau_0 < \tau_1$  ist daher das gleiche Phänomen wie das, was bei der Untersuchung langsam-schneller Systeme als "Ente" bezeichnet wird. Erinnern Sie sich an die Definition (Lobry, 2018, S. 182):

"In einem langsam-schnellen Feld von  $\mathbb{R}^2$  Es kann Trajektorien geben, die für eine signifikante Zeit (nicht unendlich klein) entlang eines attraktiven Bogens unendlich nahe an der langsamen Kurve bleiben, gefolgt von einer signifikanten Zeit, die entlang eines abstoßenden Bogens verbracht wird. Eine solche Flugbahn nennt man [...] Ente. ""

Verhulst (2014) stellte auch das Auftreten solcher Enten im Zusammenhang mit einer periodischen logistischen Gleichung fest. Die Beziehung (3), die bindet  $\tau^*$  und  $\tau_2$  ist die entsprechende „Input-Output-Beziehung“ (Benoît, 1981; De Maesschalck und Schecter, 2016).

Diese Ausführungen erstrecken sich zweifellos bei Geburts- und Sterbevorgängen auf verschiedene Typen (Bacaër und Ait Dads, 2014) mit Geburtsmatrizen  $\mathcal{A}(\tau)$  und Übergangs- oder Todesmatrizen  $\mathcal{B}(\tau)$ , die zu einem langsam-schnellen Formlarsystem führen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

wo  $*$  bezeichnet die transponierte Matrix. In diesem Fall muss die Eingabe-Ausgabe-Beziehung noch bestimmt werden.

## 3 Das SIR-Modell

### 3.1 Einige Simulationen

Betrachten Sie nun das SIR-Modell (6). Die Parameter werden so gewählt, dass sie plausibel sind:

- die Gesamtbevölkerung ist  $N = 10\,000$  ;;
- Zu Beginn der Epidemie war nur eine Person infiziert ( $i = 1$ );
- Jede Person hat im Durchschnitt  $\bar{a} = 15$  Kontakte pro Monat;
- Die durchschnittliche Infektionsdauer beträgt  $1/b = 1/10$  Monate, ungefähr 3 Tage;
- die Periode  $T$  ist  $1/4$  eines Monats oder ungefähr 7 Tage;
- der periodische Faktor ist

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

wo  $\omega = 2\pi/T$  und  $|k| \leq 1$  ;;

- die Phasenverschiebung ist  $\psi = -\pi/2$  so dass  $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$  und die Kontaktrate  $a(t)$  befindet sich in einer zunehmenden Phase bei  $t = 0$ .

Die Reproduzierbarkeit ist dann  $R_0 = \bar{a}/b = 1,5 > 1$ , die die Entwicklung einer Epidemie mit einer endgültigen Größe garantiert  $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$  (Bacaër und Gomes, 2009).

Abbildung 3 zeigt zwei typische Simulationen des Modells: eine mit  $k = 0$  (die Kontaktrate ist konstant), die andere mit  $k = 1$  (Die Kontaktrate schwingt). Obwohl die Kurven für  $k = 1$  unterscheiden sich erheblich von denen für  $k = 0$  Während der Epidemie ist es bemerkenswert, dass die endgültigen Größen  $R(\infty)$  in beiden Simulationen sind grafisch kaum zu unterscheiden. Dies wird im nächsten Abschnitt erläutert.

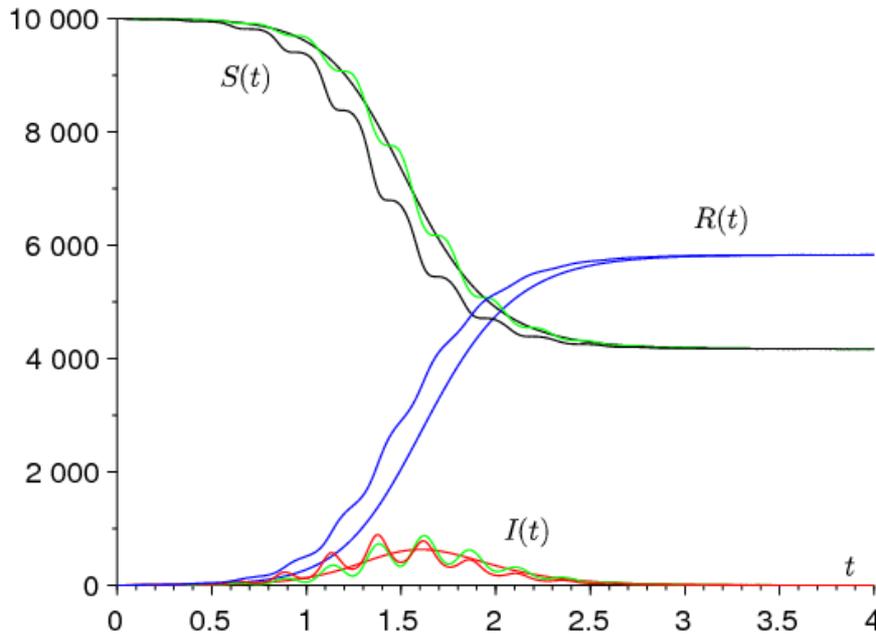


Abbildung 3. Simulation einer Epidemie:  $S(t)$  in schwarz,  $I(t)$  in rot und  $R(t)$  in blau als Funktion der Zeit  $t$  (in Monaten). Die nicht gewellten Kurven entsprechen  $k = 0$ , die Wellenkurven bei  $k = 1$ . Die grünen Kurven sind die Näherungen zweiter Ordnung für  $S(t)$  und  $I(t)$ .

Durch Reduzieren der Schwingungsdauer (zum Beispiel mit  $T = 1/8$  von Monaten) würden wir die Kurven sehen ( $S(t), I(t), R(t)$ ) für  $k = 1$  Behalten Sie ihre Schwingungen bei, aber nähern Sie sich der Lösung mit  $k = 0$ , die wir notieren ( $\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t)$ ) weil es entspricht  $a(t) = \bar{a}$ . Dies ist außerdem eine Folge des Mittelungssatzes von Fatou (Françoise, 2005, Satz 42). In der Tat, wenn  $\tau = t/T$  ist das System geschrieben

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

mit  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$ . Der Satz versichert, dass wenn  $T \rightarrow 0$ ,

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

für eine Weile  $\tau$  in der Größenordnung von  $1/T$ . Also  $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$  für eine Weile  $t$  in der Größenordnung von 1. Genauer gesagt gibt es Konstanten  $c_1, c_2, c_3$  und  $T_0$  alles positiv, mit für  $0 < T < T_0$  und für  $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

Wir können eine Näherung zweiter Ordnung berechnen. Schreiben wir das System (11) in die Form  $dZ/d\tau = T f(\tau, Z)$ , wo  $Z = (S, I, R)$  und  $f(\tau, Z)$  ist  $\tau$ -periodisch von Periode 1. Dann

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass der Ausdruck entfernt werden muss  $\sin(\psi)$  so dass diese letzteren Funktionen vom Mittelwert Null sind. Nach (Françoise, 2005, Satz 44) haben wir

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

und  $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$  über ein Zeitintervall  $\tau$  in der Größenordnung von  $1/T$ . Mit anderen Worten,

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

und  $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$  über ein Zeitintervall  $t$  in der Größenordnung von 1. Diese Annäherungen von  $S(t)$  und  $I(t)$  sind in Abbildung 3 grün dargestellt.

Beachten Sie, dass wir bei einer Periode der Kontaktrate, die klein ist, im Gegensatz zu den Simulationen von (Bacaër und Gomes, 2009) keine epidemische Kurve mit mehreren großen Wellen beobachten. Dies liegt daran, dass sich das System dem Fall nähert, in dem die Kontaktrate durchschnittlich ist, was nur eine Epidemiewelle ergibt.

### 3.2 Nähe zu den endgültigen Größen von Epidemien

Durch Schreiben der ersten Gleichung (6) in die Form  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$  durch Integration zwischen  $t = 0$  und  $t = +\infty$  unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen und was  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ , es ist leicht zu finden wie in (Bacaër, 2019), dass

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

Das oszillierende Integral  $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$  konvergiert wahrscheinlich gegen 0, wenn  $T \rightarrow 0$ . In der Tat wissen wir einerseits, dass  $I(t) \simeq \bar{I}(t)$ . Auf der anderen Seite, zumindest wenn  $\phi$  ist ein Kosinus, das Integral  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  konvergiert gegen 0, wenn  $T \rightarrow 0$ . In der Tat die Funktion  $\bar{I}(t)$  ist positiv und integrierbar, weil  $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$ . Die Fourier-Transformation einer integrierbaren Funktion konvergiert im Unendlichen gegen 0.

Daraus folgt  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  wenn  $T \rightarrow 0$ . Die Frage ist, wie schnell dies geschieht. In erster Näherung ergibt Gleichung (12)

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

wie in (Bacaër, 2019).

Dann verwenden wir für  $\bar{I}(t)$  den ungefähren analytischen Ausdruck in Form einer symmetrischen Glocke, erhalten von Kermack und McKendrick (siehe zum Beispiel (Bacaër, 2019) oder (Gani, 1975)). Wenn  $\bar{a}/b > 1$ , wenn  $\bar{a}/b \simeq 1$ , wenn  $i/N \ll 1$  dann

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{N X}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

wo  $\text{ch}(\cdot)$  bezeichnet den hyperbolischen Kosinus und

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

unter der wahrscheinlichen zusätzlichen Annahme  $i/N \ll (\bar{a}/b - 1)^2$ .  $W$  ist eine Annäherung an die Zeit, die vor dem Höhepunkt der Epidemie in einer konstanten Umgebung vergeht.

Nehmen wir zum Schluss an  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  wie in Abbildung 3. Beachten wir  $\text{Re}(\cdot)$  der Realteil einer komplexen Zahl und  $i$  die übliche imaginäre Zahl (nicht zu verwechseln mit  $i$  die ursprünglich infizierte Bevölkerung). Wir haben dann unter Verwendung eines klassischen Ergebnisses die asymptotische Berechnung komplexer Integrale mit einer Phase, die nicht stationär ist, so dass der Hauptterm vom Rand des Integrationsintervalls stammt (Ovaert und Verley, 1997, Satz 3),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\ &= N X k \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\ &\simeq - N X k \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\ &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)}. \end{aligned}$$

Mit den Näherungen (14) können wir das auch sehen

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

was letztendlich für gibt  $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega}. \quad (15)$$

Die endgültige Größe  $\bar{R}(\infty)$  in einer konstanten Umgebung ist die einzige streng positive Lösung für die Gleichung

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp \left( -\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \right),$$

was leicht aus Gleichung (12) zu finden ist. Mit  $i \ll N$ , die endgültige Größe  $\bar{R}(\infty)$  hängt sehr wenig vom Ausgangszustand ab  $i$ . Dies ist ungefähr die streng positive Lösung von

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N}\right).$$

Der Korrekturterm in Gleichung (15) kann positiv oder negativ sein; es kommt auf das Zeichen von  $\sin(\psi)$ . Es ist beides proportional zu  $1/\omega$  d.h. zu  $T$  und zu der  $i/N$ -Fraktion der anfänglich infizierten Personen. Aus diesem Grund liegt die endgültige Größe der Epidemie, wie angekündigt, bemerkenswert nahe an der, die durch Ersetzen der Kontaktrate durch ihren Durchschnitt erzielt wird.

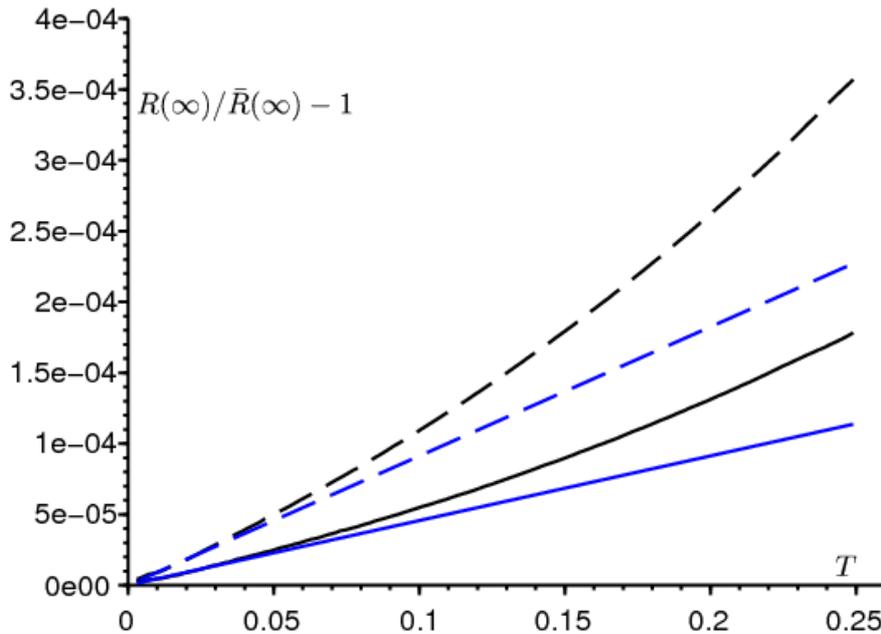


Abbildung 4. Der relative Unterschied  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  zwischen den endgültigen Größen der Epidemien nach dem Zeitraum  $T$ . In schwarz,  $R(\infty)$  wird durch Simulation des Differentialgleichungssystems geschätzt. Die Näherung (15) ist blau dargestellt. Die Parameter sind die gleichen wie in Abbildung 3 mit  $k = 1$ , außer dass der Zeitraum  $T$  variiert zwischen 0 und 0,25 Monat und das  $i = 1$  (durchgezogene Linien) oder  $i = 2$  (gepunktet).

Dies ist in 4 mit Werten der Parameter dargestellt, die mit denen von 3 für  $k = 1$  identisch sind. Periode  $T$  variiert. Wir haben auch zwei Ausgangsbedingungen ausprobiert:  $i = 1$  und  $i = 2$ . Wenn  $T \rightarrow 0$ , die Kurve für  $R(\infty)$  scheint die Annäherung sehr tangential zu sein (15). Wir werden auf der vertikalen Skala die Kleinheit des relativen Unterschieds bemerken  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ . Mit  $N = 10\,000$  entspricht dies für die endgültige Größe der Epidemie höchstens einem Unterschied von 1 oder 2 Personen (die Größe sollte im Prinzip eine ganze Zahl sein). Mit  $\bar{a}/b = 1,5$  ist die Annäherung (13) von Kermack und McKendrick immer noch relativ gut (Gani, 1975, S. 240).

Wenn  $\psi$  Null oder ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl  $\pi$  ist, ist der Korrekturterm in Gleichung (15) Null. Da dies jedoch ein Ausnahmefall ist, lohnt es sich möglicherweise nicht, ein neues Äquivalent für das Integral zu finden.  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$  oben.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Nähe der endgültigen Größen  $R(\infty)$  und  $\bar{R}(\infty)$  In gewisser Weise rechtfertigt dies die Tatsache, dass in vielen epidemischen Modellen kurzperiodische Schwingungen vernachlässigt werden, um nur die durchschnittlichen Kontaktraten zu berücksichtigen.

## Referenzen

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, *C. R. Biol.* 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée–sortie, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry–exit function and geometric singular perturbation theory, *J. Diff. Eq.* 260, 6697–6715.
- J.–P. Francoise (2005) *Oscillations en biologie*, Springer/SMAI, Berlin.
- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P.–L. Hennequin (éd.), *École d’été de probabilités de Saint–Flour IV–1974*, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) *La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique*, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York.
- J.–L. Ovaert, J.–L. Verley (1997) Calculs asymptotiques, in : *Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie*, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, *Int. J. Nonlin. Mech.* 67, 371–377.