

نموذجان سكانيان في بيئة دورية بطيئة أو سريعة

1021-1037 (2020) 80J. Math. Biol.

<https://doi.org/10.1007/s00285-019-01447-z>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02279038>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة
Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا
nicolas.bacaer@ird.fr

الملخص

نعالج مشكلتين في ديناميات السكان في بيئة دورية بطيئة أو سريعة. أولاً ، نحصل على تقريب تقريباً لاحتمال عدم انقراض عملية خطية للولادة والوفاة مع معاملات دورية ، عندما تكون الفترة كبيرة أو صغيرة. إذا كان معدل المواليد أقل من معدل الوفيات خلال جزء من الفترة وإذا كانت الفترة تميل نحو اللانهاية ، فإن احتمالية عدم الانقراض تتقارب نحو حد متقطع مرتبط بـ "بطء" في نظام بطيء السرعة. ثانياً ، ندرس نموذجاً وبائياً غير خطي لنوع SIR عندما يتذبذب معدل الاتصال بسرعة. الحجم النهائي للوباء قريب من ذلك الذي تم الحصول عليه عن طريق استبدال معدل الاتصال بمتوسطه.

1 مقدمة

في عمل نُشر منذ بعض الوقت (Bacaër، 2015) ، درسنا حد نموذج ديناميكيات السكان ، نموذج Stochastic SIS ، في بيئة دورية عندما كانت الفترة تميل إلى 0 أو اللانهاية. نقتراح هنا للدراسة بنفس الطريقة نموذجين أبسط على ما يبدو: عملية خطية للولادة والموت ونموذج وبائي قطعي من نوع SIR. يمكن النظر إلى هذين النموذجين على أنهما تقريبان لنموذج الاستوكاستك SIR نفسه. تُخدم عملية الولادة والوفاة تقريباً في بداية الوباء ؛ الإصابات الجديدة تلعب دور المواليد ، والشفاء يلعب دور الموتى. يتم استخدام النموذج القطعي كتقريب عندما يكون عدد المصابين كبيراً بما فيه الكفاية بالفعل.

لذا دعونا نفكر أولاً في عملية خطية للولادة والموت في بيئة متغيرة مع معدل المواليد $a(t)$ والوفيات $b(t)$. تبدأ العملية في $t = t_0$ مع فرد واحد. احتمال عدم الانقراض

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt} , \quad (1)$$

ما إذا كان التكامل في المقام محدود أو لا نهائي (Gani، 1975، p. 220). هذا ينطبق بشكل خاص على الحالة التي تكون فيها الوظائف $a(t)$ و $b(t)$ هي دورية من نفس الفترة دعنا نقول T . نفترض ذلك

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T),$$

أين $A(\tau)$ و $B(\tau)$ هي وظائف دورية للفترة 1. النظر في الوسائل

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

ثم $p(t_0)$ يساوي 0 إذا $\bar{a} \leq \bar{b}$. إنها وظيفة T بشكل إيجابي بشكل صارم وأقل من 1 إذا $\bar{a} > \bar{b}$ (انظر (Bacaër، 2007، §5.2) و (Bacaër and Ait Dads، 2014)). نفترض الآن أن $\bar{a} > \bar{b}$. هذه هي الحالة فوق الحرجة.

يتم تبسيط الصيغة (1) عندما تكون الفترة T إما صغيرة جداً أو كبيرة جداً ، كما لوحظ مؤخراً (Carmona and Gandon، 2019). إذا $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$ تم إصلاحه وإذا $T \rightarrow 0$ ، ثم $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$. إذا $t_0/T = \tau_0$ تم إصلاحه وإذا $T \rightarrow +\infty$ ، ثم $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$. على الأقل لقيم معينة من τ_0 أين $A(\tau_0) > B(\tau_0)$.

الهدف أدناه هو توضيح هذه الملاحظات من خلال اقتراح تقريب احتمالية الانقراض. الحد $T \rightarrow 0$ هو الأبسط: لدينا

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

إذا $T \rightarrow +\infty$ ، نفترض أن الوظائف $A(\tau)$ و $B(\tau)$ تكون منتظمة (يمكن تمييزها بمشتق مستمر) وتنظر في حالتين:

- $A(\tau) > B(\tau)$ ل $\tau \in [0, 1]$ (حالة فوق الحرجة بشدة)؛
- $A(\tau) > B(\tau)$ ل $\tau \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, 1]$ أين $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ و $A(\tau) < B(\tau)$ ل $\tau \in]\tau_1, \tau_2[$ (حالة ضعيفة للغاية فوق الحرجة).

دون فقدان العمومية، يمكن الافتراض كذلك في الحالة الثانية التي $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$. ثم هناك فريد $\tau^* \in]0, \tau_1[$ مع

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0. \quad (3)$$

نعرض في القسم 2 أنه في الحالة الأولى ل $\tau_0 \in [0, 1]$ ، وفي الحالة الثانية ل $\tau_0 \notin]\tau^*, \tau_2[$

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (4)$$

في الحالة الثانية مع $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (5)$$

يتحول هذا الاحتمال الأخير بسرعة كبيرة إلى 0 عندما $T \rightarrow +\infty$. في النهاية، هناك انقطاع في $\tau_0 = \tau^*$. الحد هو صفر ليس فقط في $]\tau_1, \tau_2[$ ولكن أيضا في $]\tau^*, \tau_2[$. ويرتبط هذا بظاهرة "البطء" في نظام بطيء السرعة، كما هو موضح في القسم 2.6.

بعد ذلك، النظر في نموذج وباء SIR القطعي. نحدد

- N : الحجم الثابت المفترض للسكان،
- $S(t)$: عدد الأصحاء في ذلك الوقت t ،
- $I(t)$: عدد الأشخاص المصابين،
- $R(t)$: عدد الأشخاص الذين تمت إزالتهم من سلسلة النقل لأنهم شفيوا وتمنعهم،
- $a(t)$: معدل الاتصال المعدي،
- b : معدل الشفاء.

لذا $N = S(t) + I(t) + R(t)$. يفترض كما في النموذج المبسط ل Kermack و McKendrick (انظر على سبيل المثال (Hillion، 1986، p. 75))

$$\frac{dS}{dt} = -a(t) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t) \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (6)$$

وبالتالي فإن كل فرد سليم يتأثر بنسبة I/N من الأفراد المصابين في مجموع السكان، وبعبارة أخرى "حقل متوسط"، وليس من جيرانه في بنية اتصال معينة.

في عمل حديث (Bacaër، 2019)، كنا مهتمين بالتأثير الذي سيحدثه التذبذب الدوري لسعة صغيرة لمعدل الاتصال على الحجم النهائي للوباء. سنركز هنا على الحالة التي يكون فيها السعة تعسفية ولكن حيث تكون فترة التذبذبات صغيرة مقارنة بالمدة النمطية للوباء. بالنسبة للوباء الذي سيستمر بضعة أسابيع، فإن هذا يمثل، على سبيل المثال، التناوب السريع بين النهار والليل. بالنسبة للوباء الذي سيستمر بضعة أشهر، فإن هذا يمثل التناوب بين أيام العمل وعطلات نهاية الأسبوع، وخاصة بالنسبة للأوبئة في المدارس. بالنسبة للوباء الذي سيستمر عدة سنوات أو حتى عدة عقود، فإن هذا يمثل التناوب بين الشتاء والصيف.

فترة التذبذبات $T > 0$. هذه المعلمة تهدف إلى التقارب إلى 0. نفترض ذلك

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/T))$$

مع

- $\bar{a} > 0$

• ϕ : وظيفة مستمرة في القطع مع

$$|\phi(\tau)| \leq 1, \quad \phi(\tau + 1) = \phi(\tau) \quad \forall \tau, \quad \int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0.$$

لذا $a(t)$ هي دالة دورية للفترة T ، بمتوسط \bar{a} . خذ كظروف أولية في بداية الوباء

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

مع $0 < i < N$

يوضح القسم 3.1 محاكاة هذا النموذج. نرى من الأمثلة أن الحجم النهائي للوباء قريب بشكل ملحوظ من الحجم الذي تم الحصول عليه عن طريق استبدال معدل الاتصال بمتوسطه. في القسم 3.2 ، نقترح شرحاً لهذا القرب من خلال إجراء بعض الافتراضات الإضافية على معايير النموذج ، لا سيما من خلال افتراض أن الجزء الأولي من الأشخاص المصابين صغير وأن تكاثر الوباء لا يزال قريباً من 1. نحصل على صيغة تقريبية للتصحيح إلى الحجم النهائي للوباء. يتناسب هذا التصحيح مع فترة التذبذبات والجزء الأولي من الأشخاص المصابين ، وبالتالي صغرها.

2 عملية الولادة والموت

2.1 الحساب الأولي

دعونا ننظر أولاً إلى العملية الخطية للولادة والموت. لنأخذ التكامل مع مقام الصيغة (1) ونلاحظه

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[\int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

بحكم التعريف لدينا

$$J = \int_0^{\infty} B((t_0 + t)/T) \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

لقد فعلنا $t_0/T = \tau_0$. نحدد $u = t/T$ و $v = s/T$. لذا ، باستخدام دورية الوظائف $A(\tau)$ و $B(\tau)$ ، نحصل

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^{\infty} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

لذا

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (7)$$

2.2 الحد $T \rightarrow 0$

بالتقريب $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ ل $x \rightarrow 0$ في العامل قبل التكامل ، وببساطة أكثر $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ في التكامل ، نحصل

$$J = \left(\frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left(\bar{b} + T \left[\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

نلاحظ أن

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[\left(\int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

نستنتج ذلك

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

مع (2) الصيغة، نستنتج الصيغة (2).

2.3 الحد $T \rightarrow +\infty$: القضية فوق الدرجة

لنعد إلى الصيغة (7). التكامل هو الشكل

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du$$

مع

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

لقد فعلنا

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

دعونا نفترض ذلك أولاً $A(\tau) > B(\tau)$ لـ $\tau \in [0, 1]$. ثم $F'(u) > 0$ للجميع $u \in [0, 1]$ في الحد الأدنى في $u = 0$ و $F(0) = 0$. بالإضافة إلى ذلك، $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$ ، $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$ مع $u \rightarrow 0$ و $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ من جهة أخرى، $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$ مع $u \rightarrow 0$ و $\psi_0 = B(\tau_0)$ و $\psi_1 = B'(\tau_0)$. وفقاً لنظرية (Erdélyi (Olver، 1974، ص 85)،

$$\int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du = e^{-T F(0)} \left(\frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (8)$$

مع $c_0 = \psi_0/\phi_0$ و $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$. لأن $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$ صغير للغاية، تعطي الصيغة (7)

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

مع (4) الصيغة، نستنتج الصيغة (4).

2.4 حالة ضعيفة للغاية فوق الدرجة

افترض الآن أن هناك τ_1 و τ_2 مع $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ و

$$\begin{aligned} & \tau \in]\tau_1, \tau_2[\text{ لـ } A(\tau) < B(\tau) \\ & \tau \in]0, \tau_1[\cup]\tau_2, 1[\text{ لـ } A(\tau) > B(\tau) \end{aligned}$$

لأن $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ لدينا احتمالان:

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (9)$$

نفترض أن عدم المساواة الأولى صحيح ، حتى لو كان يعني تغيير الوظائف بمرور الوقت $A(\tau)$ و $B(\tau)$.

ثم هناك فريد $\tau^* \in [0, \tau_1]$ مع

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

في الواقع ، إذا

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du, \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

ثم $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$ ل $\tau \in [0, \tau_1]$. بالإضافة إلى ذلك ، $h(0) > 0$ حسب عدم المساواة الأولى (9) و $h(\tau_1) < 0$. لذلك هناك فريد $\tau^* \in [0, \tau_1]$ مع $h(\tau^*) = 0$.

دعونا ننظر أولاً في الحالة $0 < \tau_0 < \tau_1$. الوظيفة $F(u)$ يتزايد ل $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ ويتناقص $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$. ينمو مرة أخرى ل $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$. الوظيفة $F(u)$ وبالتالي لديها الحد الأدنى المحلي في $\tau_2 - \tau_0$. نذكر أن $F(0) = 0$.

إذا $\tau_0 \in [0, \tau^*]$ ، ثم $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$. لذا لا يزال الحد الأدنى العام $F(u)$ على الفاصل الزمني $[0, 1]$. التطور المقارب (8) لا يزال ساريًا والصيغة (4) أيضًا.

إذا ، من ناحية أخرى $\tau_0 \in [\tau^*, \tau_1]$ ، ثم $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$. الحد الأدنى العام $F(u)$ على الفاصل الزمني $[0, 1]$ في $u = \tau_2 - \tau_0$ ، $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ و $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$.

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

إذا $T \rightarrow +\infty$ وفقًا لطريقة لابلاس (Ovaert and Verley، 1997). لذا

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

و $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ إذا $T \rightarrow +\infty$ والتي تعطي الصيغة (5).

الآن النظر في الحالة حيث $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$. الوظيفة $F(u)$ ينخفض خلال الفاصل الزمني $[0, \tau_2 - \tau_0]$ ثم زيادة خلال الفاصل الزمني $[\tau_2 - \tau_0, 1]$. الحد الأدنى في غضون ذلك $[0, 1]$ لذلك تم الوصول إليه في $u = \tau_2 - \tau_0$ ، كما في الحالة السابقة. وبالتالي ، لا تزال الصيغة (5) صالحة.

أخيرا ، النظر في الحالة حيث $\tau_2 < \tau_0 < 1$. الوظيفة $F(u)$ يتزايد خلال الفاصل الزمني $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$. ينخفض خلال الفاصل الزمني $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$. إنها تتزايد خلال الفاصل الزمني $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$. لذلك لديها حد أدنى محلي في $1 + \tau_2 - \tau_0$ و

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1 + \tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

حسب التفاوت الأول (9). الحد الأدنى العام في $[0, 1]$ وبالتالي يتم الوصول إليه عند $u = 0$. وبالتالي ، هي الصيغة (4) التي تنطبق.

2.5 مثال

لنأخذ $B(\tau) = \bar{b} > 0$ ثابت و

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

مع $\bar{a} > \bar{b}$ و $0 \leq k \leq 1$. القضية فوق الحرجة تقابلها $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. إذا كان على العكس $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$ ، ثم $\tau_1 < \tau_2$ هما الحلان في $[0, 1]$ المعادلة $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ ، وهي

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

العتبة τ^* هو الحل $[0, \tau_1]$ للمعادلة

$$(\bar{a} - b)(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

يعطي الصيغة (2)

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

إذا $T \rightarrow 0$. إذا $\bar{a}(1 - k) > b$ أو إذا $\bar{a}(1 - k) < b$ و $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ ثم تعطي الصيغة (4)

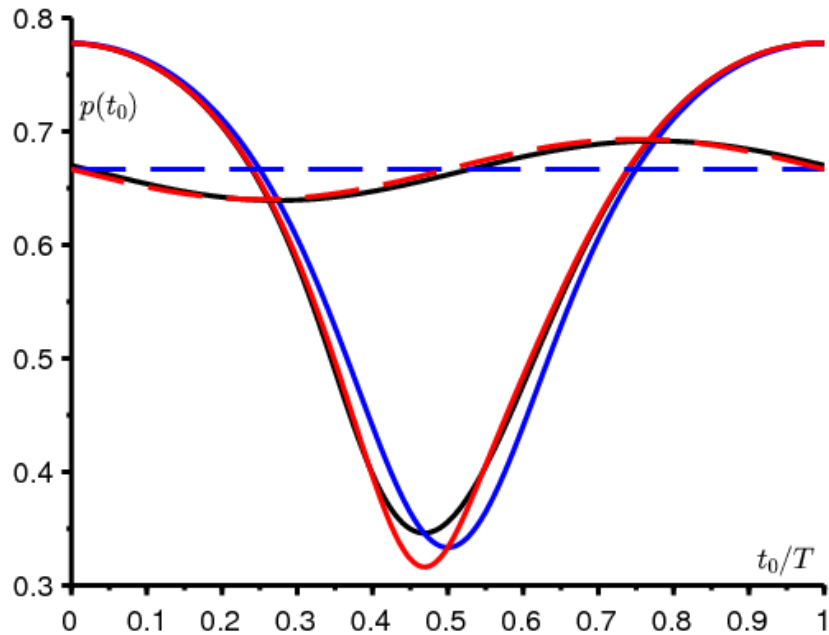
$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi\bar{a}\bar{b}k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

إذا $T \rightarrow +\infty$. إذا $\bar{a}(1 - k) < b$ و $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ ، الصيغة (5) يعطي

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp\left[T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi}\right]$$

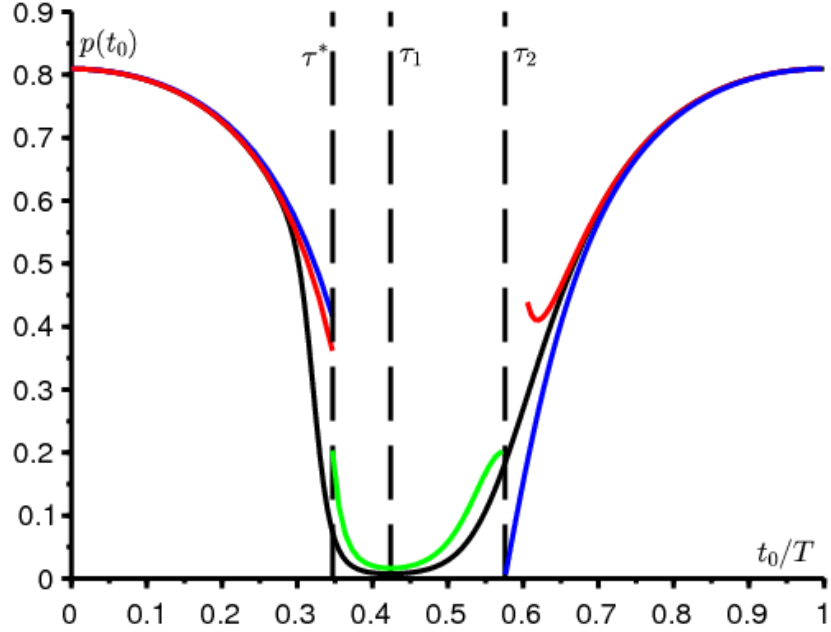
إذا $T \rightarrow +\infty$

لنأخذ على وجه الخصوص $\bar{b} = 1$ ، $\bar{a} = 3$ ، $k = 0,5$. ثم $\bar{a}(1 - k) > \bar{b}$. يوضح الشكل 1 نتائج قيمتين للفترة: $T = 0,5$ و $T = 50$. احتمالية عدم الانقراض $p(t_0)$ ، مقدمة بالصيغة (1)، يتم تقديرها من خلال التكامل الرقمي مع برنامج Scilab. يمكننا أن نرى أن الصيغ التقريبية (2) و (4) تعطي تقريبًا أفضل. ولكن لاحظ أن ل $T \rightarrow +\infty$ ، التقريب (4) ينحرف قليلاً عن $p(t_0)$ على مقربة من الحد الأدنى من $p(t_0)$.



الشكل 1. مثالان: $T = 0,5$ (منقط) و $T = 50$ (خطوط صلبة). احتمالية عدم الانقراض $p(t_0)$ معطى بالصيغة (1) باللون الأسود. خط منقط: الصيغة التقريبية (2) باللون الأحمر والتقريب $1 - \bar{b}/\bar{a}$ بالأزرق. الخطوط المستمرة: الصيغة التقريبية (4) باللون الأحمر والتقريب $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ بالأزرق.

لنأخذ الآن $\bar{a} = 3$ ، $\bar{b} = 1$ ، $k = 0,75$ و $T = 100$. ثم $\bar{a}(1 - k) < \bar{b}$. $\tau_1 \simeq 0,424$ و $\tau_2 \simeq 0,576$. يتم تمثيل الصيغ التقريبية المختلفة في الشكل 2 ، ولا سيما الصيغة (5) باللون الأخضر. يتقارب احتمال عدم الانقراض إلى حد غير مستمر. ل $\tau < \tau^*$ و $\tau > \tau_2$ الحد الأزرق. ل $\tau^* < \tau < \tau_2$ ، الحد يساوي 0. هناك مشكلة صغيرة في توصيل التقريبات على مستوى $\tau_0 = \tau_2$ ، الأمر الذي يقودنا إلى إلقاء نظرة فاحصة على ما يحدث في هذه المرحلة.



الشكل 2. كما في الشكل 1 ولكن مع $T = 100$ و $k = 0,75$. الصيغة التقريبية (5) باللون الأخضر.

كما في حالة حيث $1 < \tau_0 < \tau_2$ في القسم 4.2 ، نرى في الحالة الخاصة حيث $\tau_0 = \tau_2$ ان $F(u)$ في ذروته العالمية في $[0, 1]$ في $u = 0$. ولكن هذه المرة ، $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$. وفقاً لنفس نظرية (Erdélyi (Olver ، 1974 ، ص 85) ،

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-T F(u)} du \sim \frac{B(\tau_2) \sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

بحيث $p(\tau_2 T) = 1/(1 + J) \sim 1/J$ إذا $T \rightarrow +\infty$. تبقى الصيغة (5) صالحة عندما $\tau_0 = \tau_2$. الانحلال الآسي نحو 0 عندما $\tau_0 \in]\tau^*, \tau_2[$ يتم استبداله بانخفاض في $1/\sqrt{T}$ في النقطة τ_2 .

2.6 ربط مع "البط"

صيغة (1) لاحتمال الانقراض $p(t_0)$ في الوقت t_0 يتم الحصول عليها بالفعل على النحو التالي: إذا $u > t_0$ احتمالية الانقراض في وقت t_0 من العملية التي تبدأ من فرد في الوقت t_0 هو $z(u - t_0)$ مع $z(0) = 0$ و

$$\frac{dz}{dt} = [b(u - t) - a(u - t)z(t)](1 - z(t)), \quad \forall t \in [0, u - t_0] \quad (10)$$

(بكار وآيت دادس ، 2014). لأن هذه المعادلة Riccati قابلة للحل بشكل صريح نحصل على الصيغة (1) لاحتمال عدم الانقراض

$$p(t_0) = 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} z(u - t_0).$$

لنأخذ على سبيل المثال $u = t_0 + nT$ مع n عدد صحيح موجب بدقة. ثم نُكتب المعادلة (10)

$$\frac{dz}{dt} = \left[B\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right) - A\left(\frac{t_0 + nT - t}{T}\right)z(t) \right] (1 - z(t)).$$

إذا $z(t) = x(s)$ و $s = t/T$ ، ثم

$$\frac{dx}{ds} = T[B(\tau_0 + n - s) - A(\tau_0 + n - s)x(s)](1 - x(s))$$

على الفاصل الزمني $s \in [0, n]$. يمكن كتابة هذا كنظام مستقل بطيء السرعة:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[B(\tau_0 + n - y(s)) - A(\tau_0 + n - y(s))x(s)](1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \end{aligned}$$

ل $s \in [0, n]$ مع $x(0) = 0$ و $y(0) = 0$ أخيرًا

$$p(t_0) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n).$$

إذا $T \rightarrow \infty$ ، نرى في هذا النظام بطيء السرعة الذي $x(n) \rightarrow 1$ أين $x(n) \rightarrow B(\tau_0)/A(\tau_0)$. أن $x(n)$ يبقى على الفرع غير المستقر ل $1 < \tau_0 < \tau_1$ لذلك هي نفس الظاهرة التي يطلق عليها "البطة" في دراسة الأنظمة بطيئة السرعة. أذكر التعريف (Lobry، 2018، p. 182):

"في مجال بطيء السرعة \mathbb{R}^2 ، قد تكون هناك مسارات لا تزال قريبة بشكل غير محدود من المنحنى البطيء لفترة طويلة (ليست صغيرة بلا حدود) على طول قوس جذاب، يتبعه وقت كبير يقضيه على طول القوس البغيض. يسمى هذا المسار بطة [...]".

كما أشار (Verhulst (2014 إلى ظهور مثل هذه البط فيما يتعلق بمعادلة لوجستية دورية. العلاقة (3) الملزمة τ^* و τ_2 هي "العلاقة بين المدخلات والمخرجات" المقابلة (Benoît، 1981؛ De Maesschalck and Schecter، 2016).

تمتد هذه الملاحظات دون شك في عمليات الولادة والوفاة إلى عدة أنواع (Bacaër و Ait Dads، 2014) مع مصفوفات الولادة $\mathcal{A}(\tau)$ ومصفوفات الانتقال أو الموت $\mathcal{B}(\tau)$ مما يؤدي إلى نظام بطيء السرعة

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= T[\mathcal{B}^*(\tau_0 + n - y(s)) - \text{diag}(x(s)) \mathcal{A}^*(\tau_0 + n - y(s))] \text{ colonne}(1 - x(s)), \\ \frac{dy}{ds} &= 1, \end{aligned}$$

أين x^* يدل على المصفوفة المنقولة. في هذه الحالة، يبقى تحديد علاقة المدخلات والمخرجات.

3 نموذج SIR

3.1 بعض المحاكاة

لننظر الآن في نموذج (6) SIR). يتم اختيار المعلمات لتكون معقولة:

- مجموع السكان $N = 10\,000$ ؛
- أصيب شخص واحد فقط في بداية الوباء ($i = 1$) ؛
- كل شخص لديه في المتوسط $\bar{a} = 15$ جهات الاتصال في الشهر ؛
- متوسط مدة الإصابة $1/b = 1/10$ أشهر، حوالي 3 أيام ؛
- الفترة $T/4$ من الشهر، أو حوالي 7 أيام ؛
- العامل الدوري هو

$$\phi(t/T) = k \cos(\omega t + \psi),$$

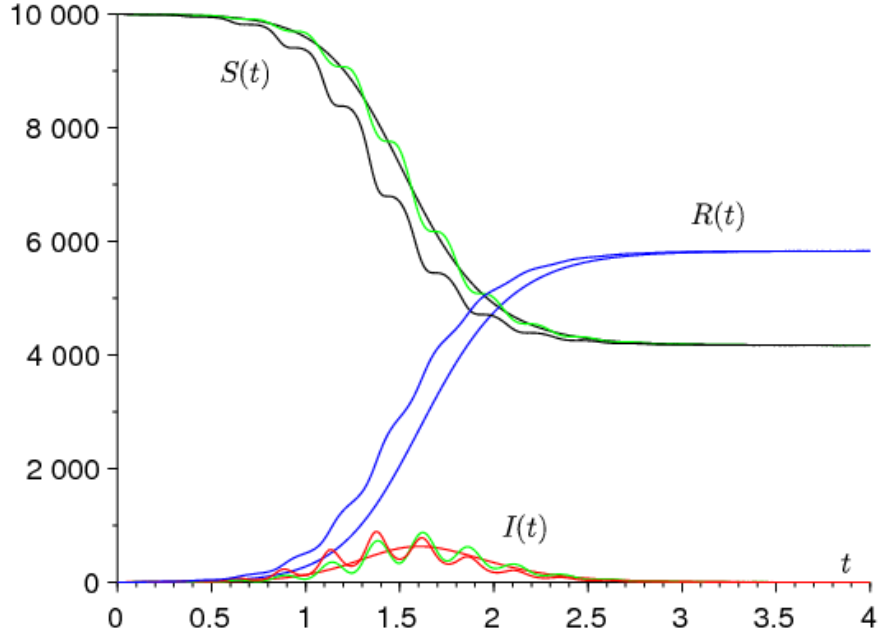
أين $\omega = 2\pi/T$ و $|k| \leq 1$ ؛

- التحول المرحلة $\psi = -\pi/2$ بحيث $\phi(t/T) = k \sin(\omega t)$ ومعدل الاتصال $a(t)$ في مرحلة متزايدة في $t = 0$.

استنسخ ثم $1 < R_0 = \bar{a}/b = 1,5$ الذي يضمن تطور وباء بالحجم النهائي $R(\infty) \geq N(1 - b/\bar{a})$ (باكير و غوميز، 2009).

يوضح الشكل 3 نموذجين من المحاكاة النموذجية: واحد مع $k = 0$ (معدل الاتصال ثابت)، والآخر مع $k = 1$ (يتأرجح معدل الاتصال). على الرغم من أن منحنيات $k = 1$ تختلف اختلافا كبيرا عن تلك $k = 0$ خلال الوباء من الملاحظ أن الأحجام النهائية $R(\infty)$ في كلتا

المحاكاة لا يمكن تمييزهما تقريباً بيانياً. سيتم شرح ذلك في القسم التالي.



الشكل 3. محاكاة الوباء: $S(t)$ باللون الأسود، $I(t)$ باللون الأحمر و $R(t)$ باللون الأزرق كدالة للوقت t (بالأشهر). تتوافق المنحنيات غير المتموجة مع $k = 0$ ، منحنيات متموجة في $k = 1$. المنحنيات الخضراء هي التقريبات من الدرجة الثانية ل $I(t)$ و $S(t)$

عن طريق تقليل فترة التذبذبات (على سبيل المثال مع $T = 1/8$ أشهر)، سنرى المنحنيات $(S(t), I(t), R(t))$ ل $k = 1$ الحافظ على التذبذبات ولكن الاقتراب من الحل مع $k = 0$ ، الذي نلاحظه $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ لأنه يتوافق مع $a(t) = \bar{a}$. هذا بالإضافة إلى نتيجة نظرية متوسط فاتو (فرانسواز، 2005، نظرية 42). في الواقع، إذا $\tau = t/T$ ، النظام مكتوب

$$\frac{dS}{d\tau} = -T\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = T\left[\bar{a}(1 + \phi(\tau))\frac{SI}{N} - bI\right], \quad \frac{dR}{d\tau} = TbI, \quad (11)$$

مع $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$. تؤكد النظرية أنه عندما $T \rightarrow 0$ ،

$$Z(\tau) - \bar{Z}(\tau) := (S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau)) = O(T)$$

لفترة من الوقت τ من ترتيب $1/T$. لذا $Z(t) - \bar{Z}(t) = O(T)$ لفترة من الوقت t بترتيب 1. بتعبير أدق، هناك ثوابت c_1, c_2, c_3 و T_0 كلها إيجابية، مع $0 < T < T_0$ و $t > 0$

$$\|Z(t) - \bar{Z}(t)\| \leq T[c_1 e^{c_2 t} + c_3].$$

يمكننا حساب تقريب الدرجة الثانية. لنكتب النظام (11) في الشكل $dZ/d\tau = Tf(\tau, Z)$ ، أين $Z = (S, I, R)$ و $f(\tau, Z)$ هو $-\tau$ فترة دورية 1. ثم

$$f_0(Z) := \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لاحظ أنه يجب إزالة التعبير $\sin(\psi)$ بحيث تكون هذه الوظائف الأخيرة من الوسط صفراً. وفقاً لـ (فرانسواز ، 2005 ، نظرية 44) ، لدينا

$$S(\tau) = \bar{S}(\tau) - T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2),$$

$$I(\tau) = \bar{I}(\tau) + T \frac{\bar{a} k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(T^2)$$

و $R(\tau) = \bar{R}(\tau) + O(T^2)$ على مدى فترة زمنية τ من ترتيب $1/T$. بعبارة أخرى ،

$$S(t) = \bar{S}(t) - \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) = \bar{I}(t) + \frac{\bar{a} k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

و $R(t) = \bar{R}(t) + O(1/\omega^2)$ على مدى فترة زمنية t من ترتيب 1. هذه التقريبات $S(t)$ و $I(t)$ موضحة باللون الأخضر في الشكل 3.

لاحظ أنه مع فترة صغيرة من معدل التلامس ، لا نلاحظ منحنى وبائي بعدة موجات كبيرة ، على عكس محاكاة (Baca andr and (Gomes ، 2009)). وذلك لأن النظام يقترب أكثر فأكثر من الحالة التي يكون فيها معدل الاتصال متوسطاً ، مما يعطي موجة وبائية واحدة فقط.

3.2 القرب من الأحجام النهائية للأوبئة

بكتابة المعادلة الأولى (6) بالصيغة $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$ ، من خلال الدمج بين $t = 0$ و $t = +\infty$ ، مع مراعاة الشروط الأولية وماذا $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ ، يمكن العثور عليه بسهولة كما في (Bacaër، 2019) ذلك

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt = 0. \quad (12)$$

التذبذب المتأرجح $\int_0^\infty I(t) \phi(t/T) dt$ ربما يتقارب إلى 0 عندما $T \rightarrow 0$ في الواقع ، نحن نعرف ذلك من ناحية $I(t) \simeq \bar{I}(t)$. من ناحية أخرى ، على الأقل متى ϕ هو جيب التمام ، لا يتجزأ $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ تتقارب إلى 0 عندما $T \rightarrow 0$ في الواقع ، الوظيفة $\bar{I}(t)$ هو أمر إيجابي ومتكامل بسبب $\int_0^\infty \bar{I}(t) dt = \bar{R}(\infty)/b$. يتحول تحويل فورييه لدالة قابلة للتكامل إلى 0 عند اللانهاية.

ويتبع ذلك $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$ إذا $T \rightarrow 0$. السؤال هو مدى سرعة حدوث ذلك. كمعادلة أولية ، تعطي المعادلة (12)

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$$

كما في (Bacaër، 2019).

ثم نستخدمها $\bar{I}(t)$ التعبير التحليلي التقريبي في شكل جرس متماثل تم الحصول عليه بواسطة Kermack و McKendrick (انظر على سبيل المثال (Bacaër، 2019) أو (Gani، 1975)). إذا $\bar{a}/b > 1$ ، إذا $\bar{a}/b \simeq 1$ ، إذا $\bar{a}/b \ll 1$ ، ثم

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{NX}{\text{ch}^2[Y(t - W)]}, \quad (13)$$

أين $\text{ch}(\cdot)$ يدل على جيب التمام الزائدي و

$$W \simeq \frac{\log[2(N/i)(1 - b/\bar{a})^2]}{\bar{a} - b}, \quad X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2} \quad (14)$$

تحت الافتراض الإضافي المحتمل $(\bar{a}/b - 1)^2 \ll i/N$. W هو تقريب الوقت المنقضي قبل ذروة الوباء في بيئة ثابتة.

أخيراً افترض ذلك $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$ كما في الشكل 3. دعونا نلاحظ $\text{Re}(\cdot)$ الجزء الحقيقي من عدد مركب و i الرقم الخيالي المعتاد (يجب عدم الخلط بينه وبين i أصاب السكان في البداية). لدينا بعد ذلك ، باستخدام نتيجة كلاسيكية على الحساب التقارب للتكاملات

المعقدة بمرحلة ليست ثابتة بحيث يأتي المصطلح الرئيسي من حافة فترة التكامل (Ovaert and Verley، 1997، Theorem 3) ،

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \bar{I}(t) \phi(t/T) dt &\simeq N X k \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \\
 &= N X k \text{Re} \left(e^{i\psi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - W)]} dt \right) \\
 &\simeq - N X k \text{Re} \left(\frac{e^{i\psi}}{i \omega \text{ch}^2(-YW)} \right) \\
 &= - \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(YW)} .
 \end{aligned}$$

مع التقريبات (14) ، يمكننا أيضاً رؤية ذلك

$$\text{ch}^2(YW) \simeq e^{2YW}/4 \simeq (N/i)(1 - b/\bar{a})^2/2 \simeq (N/i)X,$$

الذي يعطي في نهاية المطاف $\omega \rightarrow +\infty$

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a} k \sin(\psi)}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{i}{\omega} . \quad (15)$$

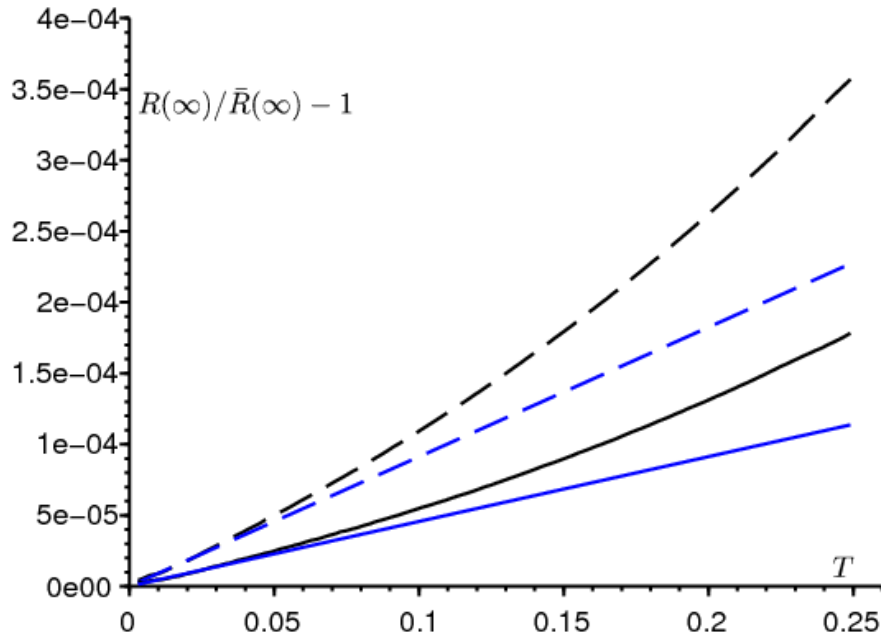
الحجم النهائي $\bar{R}(\infty)$ في بيئة ثابتة هو الحل الوحيد الإيجابي للمعادلة

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} = (1 - i/N) \exp \left(- \frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \right),$$

والتي يمكن العثور عليها بسهولة من المعادلة (12). مع $N \ll i$ الحجم النهائي $\bar{R}(\infty)$ يعتمد قليلاً جداً على الحالة الأولية i . هذا هو تقريباً الحل الإيجابي البحت

$$1 - \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \simeq \exp \left(- \frac{\bar{a}}{b} \frac{\bar{R}(\infty)}{N} \right).$$

يمكن أن يكون مصطلح التصحيح في المعادلة (15) موجباً أو سلبياً ؛ ذلك يعتمد على علامة $\sin(\psi)$. كلاهما يتناسب مع $1/\omega$ ، أي إلى T ، وإلى جزء i/N من الأشخاص المصابين في البداية. ولهذا السبب ، كما أعلن ، فإن الحجم النهائي للوباء قريب بشكل ملحوظ من الحجم الذي تم الحصول عليه عن طريق استبدال معدل الاتصال بمتوسطه.



الرقم 4 الشكل 4. الفرق النسبي $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ بين الأحجام النهائية للأوبئة حسب الفترة T . باللون الأسود ، $R(\infty)$ يتم تقديره من خلال محاكاة نظام المعادلات التفاضلية. يظهر تقريب (15) باللون الأزرق. المعلمات هي نفسها كما في الشكل 13 ما عدا تلك الفترة T يتراوح بين 0 و 0,25 الشهر وذلك $i = 1$ (خطوط صلبة) أو $i = 2$ (منقط).

هذا موضح في الشكل 4 مع قيم المعلمات المطابقة لقيم الشكل 3 لـ $k = 1$. تختلف الفترة T . لقد جربنا أيضًا شرطين أوليين: $i = 1$ و $i = 2$. إذا $T \rightarrow 0$ ، منحني $R(\infty)$ يبدو مماثلًا جدًا للتقريب (15). سنلاحظ على المقياس العمودي صغر الفرق النسبي $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$ مع $N = 10000$. هذا يترجم إلى الحجم النهائي للوباء على الأكثر بفارق 1 أو 2 شخص (يجب أن يكون الحجم من حيث المبدأ عددًا صحيحًا). مع $\bar{a}/b = 1,5$ ، لا يزال تقريب (13) كيرماك وماكيندريك جيدًا نسبيًا (Gani، 1975، p. 240).

إذا كانت μ تساوي صفر أو مضاعف عدد صحيح π ، فإن مصطلح التصحيح في المعادلة (15) هو صفر. ولكن بما أن هذه حالة استثنائية ، فقد لا يكون من المفيد العثور على مكافئ جديد للتكامل $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/T) dt$ أعلاه.

في الختام ، يمكننا القول أن القرب من الأحجام النهائية $R(\infty)$ و $\bar{R}(\infty)$ يبرر بطريقة ما حقيقة أنه في العديد من النماذج الوبائية ، يتم تجاهل التذبذبات قصيرة المدى للنظر فقط في متوسط معدلات الاتصال.

المراجع

- N. Bacaër (2007) Approximation of the basic reproduction number R_0 for vector-borne diseases with a periodic vector population, Bull. Math. Biol. 69, 1067–1091.
- N. Bacaër (2015) On the stochastic SIS epidemic model in a periodic environment, J. Math. Biol. 71, 491–511.
- N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, C. R. Biol. 342, 119–123.
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) On the probability of extinction in a periodic environment, J. Math. Biol. 68, 533–548.
- N. Bacaër, M. G. M. Gomes (2009) On the final size of epidemics with seasonality, Bull. Math. Biol. 71 (2009) 1954–1966.
- E. Benoît (1981) Relation entrée– sortie, C. R. Acad. Sci. Paris (série I) 293, 293–296.
- Ph. Carmona, S. Gandon (2019) Winter is coming – Pathogen emergence in seasonal environments, <https://www.biorxiv.org/cgi/content/short/753442v1>
- P. De Maesschalck, S. Schechter (2016) The entry– exit function and geometric singular perturbation theory, J. Diff. Eq. 260, 6697–6715.
- J. –P. Françoise (2005) Oscillations en biologie, Springer/SMAI, Berlin.

- J. Gani (1975) Processus stochastiques de population, in : P. –L. Hennequin (éd.), École d'été de probabilités de Saint–Flour IV–1974, Springer, Berlin, p. 188–293.
- A. Hillion (1986) Les Théories mathématiques des populations, Presses Universitaires de France, Paris.
- C. Lobry (2018) La Relation ressource–consommateur – modélisation mathématique, ISTE Editions, Londres.
- F. W. J. Olver (1974) Asymptotics and Special Functions, Academic Press, New York.
- J. –L. Ovaert, J. –L. Verley (1997) Calculs asymptotiques, in : Dictionnaire des mathématiques – algèbre, analyse, géométrie, Albin Michel, Paris, p. 47–62.
- F. Verhulst (2014) The hunt for canards in population dynamics : A predator–prey system, Int. J. Nonlin. Mech. 67, 371–377.