HAL
open science

Performance théorique d'un neurone à spikes Integrate-and-Fire

Anne Savard, Laurent Clavier, Francois Danneville, Christophe Loyez

To cite this version:

Anne Savard, Laurent Clavier, Francois Danneville, Christophe Loyez. Performance théorique d'un neurone à spikes Integrate-and-Fire. GRETSI 2019 - XXVIIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Aug 2019, Lille, France. hal-02275927

HAL Id: hal-02275927

https://hal.science/hal-02275927

Submitted on 2 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Performance théorique d'un neurone à spikes Integrate-and-Fire

Anne SAVARD[1], Laurent CLAVIER[1], François DANNEVILLE[2], Christophe LOYEZ[2]

[1]IMT Lille Douai, Univ. Lille, CNRS, UMR 8520 - IEMN, F-59000 Lille, France

[2]Univ. Lille, CNRS, ISEN, Univ. Valenciennes, UMR 8520 - IEMN, F-59000 Lille, France

(anne.savard, laurent.clavier)@imt-lille-douai.fr,
(francois.danneville, christophe.loyez)@univ-lille.fr

Résumé – Ce papier se concentre sur les performances théoriques d'un détecteur neuro-inspiré pour une communication numérique où le signal d'entrée est inférieur au seuil d'activation du neurone, rendant le bruit crucial pour la détection. Nous caractérisons dans un premier temps la probabilité d'erreur d'un tel détecteur basé sur un neurone Integrate-and-Fire (IF), puis étendons ce résultat à un détecteur utilisant plusieurs neurones IF en parallèle. Dans ce cas, nous proposons d'optimiser le nombre de neurones en parallèle, permettant d'atteindre une probabilité d'erreur inférieure à 10^{-4} pour une large plage de bruit, prouvant ainsi la puissance d'un tel détecteur IF.

Abstract – This paper focuses on the theoretical performance of a neuro-inspired digital communication, where the input signal is below the activation threshold of the neuron, making the noise crucial for the detection. We first derive the error probability of a neuro-inspired detector build upon a single Integrate-and-Fire (IF) neuron and then extend this result to a IF-based detector build upon multiple neurons. In this case, we propose to optimize the number of neurons in parallel, leading to an error probability below 10^{-4} for a large noise range, proving the strength of such an IF-based detector.

1 Introduction

Avec l'apparition de très nombreux appareils communicants, l'internet des objets devient de plus en plus concret, mais les réseaux de capteurs *ad hoc* réalisés pour les villes ou les immeubles intelligents souffrent de leur consommation énergétique. En effet, le récepteur radio consomme énormément, y compris en mode veille. Deux solutions ont été proposées pour résoudre ce problème : soit réveiller les récepteurs de façon périodique, soit les réveiller lors de la réception d'une séquence spécifique, ce qui constitue la *wake-up radio*. Malheureusement, la plupart de ces dispositifs utilisant des micro-contrôleurs classiques fortement énergivores, leur efficacité énergétique s'en voit réduite.

Afin de palier à ces problèmes de consommation d'énergie, de nombreuses études se tournent vers la neuroscience. Notre cerveau est en effet un très bon exemple de système complexe dans lequel de nombreuses cellules excitables, appelées neurones, communiquent les unes avec les autres via la transmission de signaux bioélectriques, appelés spikes, afin de réaliser des tâches complexes telles que la détection tout en optimisant la consommation d'énergie. Ainsi, un neurone matériel à spikes récemment conçu en technologie CMOS [1], [2] ne consomme que quelques femto-Joule, alors qu'un processeur standard consommerait plusieurs ordres de grandeur de plus pour exécuter des opérations similaires. Ainsi, l'efficacité énergétique d'un récepteur de *wake-up radio* basé sur ce type de neurones serait très fortement augmentée. Une question naturelle qui se pose alors est de savoir si une détection neuro-inspirée est suffisamment fiable.

Un avantage majeur d'un détecteur à base de neurones, outre sa très faible consommation d'énergie, est son comportement non linéaire. Ces non-linéarités sont un ingrédient clé de la résonance stochastique (RS), un phénomène paradoxal, où l'ajout de bruit améliore les performances globales d'un système non linéaire. L'idée d'ajouter du bruit afin d'améliorer les performances d'un système est plutôt contre-intuitive, mais on peut en trouver quelques exemples, même dans le domaine de la communication avec les *dithers* pour le codage basé sur les réseaux de points (*lattices*) [3]. Etant donné que, dans le réseau de capteurs *ad hoc*, de nombreux capteurs communiquent sur les mêmes ressources, le bruit ambiant sera très important comparé à la communication considérée. Le détecteur neuro-inspiré n'étant pas linéaire, il pourra tirer parti de ce bruit ambiant.

Dans ce papier, nous proposons d'étudier les performances théoriques d'une communication numérique, dans laquelle la détection du signal est effectuée à l'aide d'un neurone à spikes Integrate-and-Fire (IF) [4].

Nos principales contributions sont les suivantes :

— Utilisation d'un neurone IF, différent du perceptron,
— Obtention de la probabilité d'erreur d'un détecteur IF,
— Mise en exergue de la RS pour le détecteur IF.

La Section 2 présente des outils mathématiques nécessaires aux développements théoriques. Le neurone IF et la communication numérique considérée sont présentés dans la Section 3 et la probabilité d'erreur résultante est donnée dans la Section 4. La Section 5 présente une extension à plusieurs neurones en parallèle et la Section 6 conclut le document.

2 Notations et définitions

Les notations suivantes seront utilisées dans ce papier :

— $\forall t \in [0,T]$, $\mathbb{1}_{[0,T]}(t) = 1$.

— $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ représente la loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2. $\Phi(t)$ représente la cdf d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

— $\text{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire.

— $L(\mu, c)$ représente la distribution de Lévy, de paramètre de localisation μ et de paramètre d'échelle c. Sa pdf, resp. sa cdf, est notée par $f_L(x)$, resp. $F_L(x)$.

— $IG(\mu, \lambda)$ représente la distribution Inverse Gaussienne, de moyenne μ et de paramètre d'échelle λ. Sa pdf, resp. sa cdf, est notée par $f_I(x)$, resp. $F_I(x)$.

Mouvement Brownien standard et avec drift Soit $Z_s \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $W_t = \int_0^t Z_s(\tau)d\tau$. W_t est appelé mouvement Brownien standard. Un mouvement Brownien $Y(t)$ avec un drift μ est donné par $Y(t) = \mu t + \sigma W_t$.

Temps de premier passage Les évènements étant déclenchés lorsqu'un signal atteint une certaine valeur, il est important de caractériser le temps de premier passage T_a des mouvements Browniens précédents, qui correspond au temps nécessaire pour atteindre pour la première fois la valeur $a > 0$.

Lemme 1. *[5] Le temps de premier passage T_a d'un mouvement Brownien $Y(t)$ avec un drift non nul $\mu \neq 0$ et démarrant à la position y_0 à $t = 0$, suit une distribution Inverse Gaussienne : $T_a \sim IG\left(\frac{a-y_0}{\mu}, \frac{(a-y_0)^2}{\sigma^2}\right)$.*

Remarque 1. *Si le drift μ devient nul, la distribution Inverse Gaussienne se réduit à une distribution de Lévy, et le temps de premier passage suit alors la distribution de Lévy : $T_a \sim L\left(0, \frac{(a-y_0)^2}{\sigma^2}\right)$.*

3 Communication numérique utilisant un détecteur à base de neurone IF

3.1 Neurone Integrate-and-Fire (IF)

Les neurones Integrate-and-Fire (IF) font partis des modèles les plus simples de neurones à spikes et sont tels que l'état du neurone est caractérisé uniquement par son potentiel de membrane. Un neurone IF est composé d'un condensateur C en parallèle d'une résistance R. Dans ce papier, nous nous concentrons sur le modèle d'intégrateur parfait [4], où la résistance R est négligée. Le potentiel de membrane V d'un neurone IF parfait est donné comme l'intégrale dans le temps du courant injecté I_{inj} donné en entrée : $V(t) = \frac{1}{C}V_{rest} + \frac{1}{C}\int_0^t I_{inj}(\tau)d\tau$, où V_{rest} correspond au potentiel de repos de la membrane. Le neurone émet un spike lorsque son potentiel de membrane V atteint un seuil γ. Comme nous ne nous intéressons pas à la forme de ce spike, nous le modéliserons par un brusque changement d'amplitude à $t = t_\gamma^+ : V(t_\gamma) = \gamma + \delta$, où $\delta > 0$. Après un spike, nous supposons que le potentiel de membrane retourne immédiatement à sa valeur de repos V_{rest}. Sans perte de généralité, nous supposons que $V_{rest} = 0$.

3.2 Communication numérique considérée

Nous nous intéressons à la transmission d'une suite de symboles $\{i_{inj}(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k, i_{inj}(k) \in \{0, A\}$ et $\mathbb{P}(i_{inj}(k) = 0) = \mathbb{P}(i_{inj}(k) = A)$ sur un canal à bruit additif Gaussien (AWGN), où le bruit Z est de variance σ_N^2. La sortie I_n du canal AWGN donnée par $I_n = I_{inj} + Z$, est donnée en entrée d'un neurone IF afin d'effectuer la détection. Cette transmission est représentée sur la FIGURE 1.

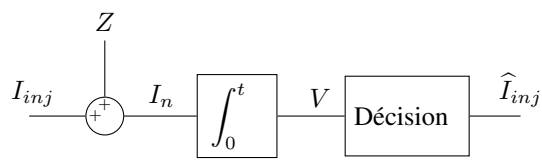

FIGURE 1 – Communication numérique étudiée

Nous réduisons notre étude sur un intervalle de temps symbole $[0,T]$ en supposant le récepteur et l'émetteur synchronisés. Soit $i_{inj} \in \{0, A\}$ le symbole à transmettre durant cet intervalle de temps. Le potentiel de membrane du neurone IF est donné par $V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \left(i_{inj}\mathbb{1}_{[0,T]}(\tau) + Z(\tau)\right) d\tau$.

Le but est, en se basant sur le train de spikes généré, de décider la valeur du symbole i_{inj}. Comme un spike correspond à un grand changement d'amplitude, le détecter est une tâche simple à réaliser en électronique analogique. De plus, afin de ne pas dégrader l'efficacité énergétique du dispositif en utilisant un micro-contrôleur, nous proposons d'utiliser une règle de décision dure basée sur le nombre de spikes générés N_s sur l'intervalle de temps $[0,T]$:

$$\widehat{i}_{inj} = \begin{cases} A \text{ si } N_s \geq K \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

Dans la suite du papier, nous considérons le cas $K = 1$, mais les résultats peuvent facilement être étendus au cas $K > 1$.

Un exemple de l'évolution du potentiel de membrane $V(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$ est donné sur la FIGURE 2, avec $i_{inj} = A = 1$, $C = 1$ et $\sigma_N^2 = 0$. Dans cet exemple, $N_s = 3$ spikes sont générés sur l'intervalle $[0,T]$.

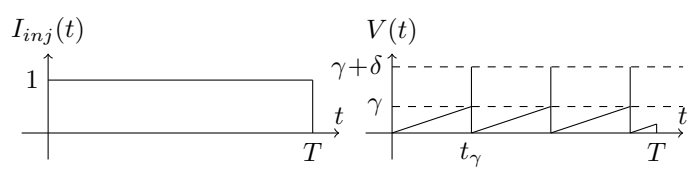

FIGURE 2 – Evolution de $V(t)$ en l'absence de bruit sur une période de temps symbole avec $i_{inj} = A = 1$.

Comme nous souhaitons caractériser les performances théoriques d'un tel détecteur pour la *wake-up radio*, nous supposons que la puissance du signal émis est très inférieure à la variance du bruit. Nous nous intéressons au cas extrême où le seuil de déclenchement des spikes γ est tel que $\gamma > AT$: en d'autres termes, en l'absence de bruit, il est impossible de détecter un symbole $I_{inj} = A$. Nous souhaitons ainsi mettre en exergue le phénomène de résonance stochastique.

4 Etude théorique des performances de détection d'un neurone à spike IF

Proposition 1. *En utilisant un neurone IF, avec un seuil de déclenchement de spikes γ et la règle de décision (1), sur un canal AWGN de variance σ_N^2, la probabilité d'erreur $\mathbb{P}_e = \mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} \neq i_{inj})$ est donnée par*

$$\mathbb{P}_e = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 C^2}{2T\sigma_N^2}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{TA - \gamma C}{\sqrt{\sigma_N^2 T}}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{2\gamma CA}{\sigma_N^2}\right)\Phi\left(-\frac{TA + \gamma C}{\sqrt{\sigma_N^2 T}}\right).$$

Démonstration. La probabilité d'erreur se décompose en $\mathbb{P}_e = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = A | i_{inj} = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = 0 | i_{inj} = A)$.

Supposons tout d'abord que $i_{inj} = 0$. Le potentiel de membrane est donné par $V(t) = \frac{\sigma_N}{C} W_t$. En utilisant la Remarque 1, le temps de premier passage T_γ suit la distribution de Lévy : $T_\gamma \sim L\left(0, \frac{\gamma^2 C^2}{\sigma_N^2}\right)$. La probabilité $\mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = A | i_{inj} = 0)$ est ainsi donnée par

$$\mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = A | i_{inj} = 0) = F_L(T) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma^2 C^2}{2T\sigma_N^2}}\right). \quad (2)$$

Supposons maintenant que $i_{inj} = A$. Le potentiel de membrane est donné par $V(t) = \frac{A}{C}t + \sigma_N W_t$. En utilisant le Lemme 1, le temps de premier passage T_γ suit la distribution Inverse Gaussienne : $T_\gamma \sim IG\left(\frac{\gamma C}{A}, \frac{\gamma^2 C^2}{\sigma_N^2}\right)$ et

$$\mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = 0 | i_{inj} = A) = 1 - F_I(T) = 1 - \Phi\left(\frac{TA - \gamma C}{\sqrt{\sigma_N^2 T}}\right) - \exp\left(\frac{2\gamma CA}{\sigma_N^2}\right)\Phi\left(-\frac{TA + \gamma C}{\sqrt{\sigma_N^2 T}}\right). \quad (3)$$

□

La FIGURE 3 représente la probabilité d'erreur $\mathbb{P}_e$ en fonction de la variance de bruit normalisée σ_N^2/F_e, où F_e est la fréquence d'échantillonnage. Nous considérons des variances de bruit normalisées afin d'obtenir des performances proches de celles obtenues en simulations électroniques sur les circuits. Nous utiliserons les valeurs numériques suivantes : $T = 50$, $A = 1, \gamma = 51, C = 1$. Nous comparons la probabilité d'erreur en simulant pour chaque variance 10^5 symboles (courbe avec les cercles) à la probabilité d'erreur théorique obtenue dans la

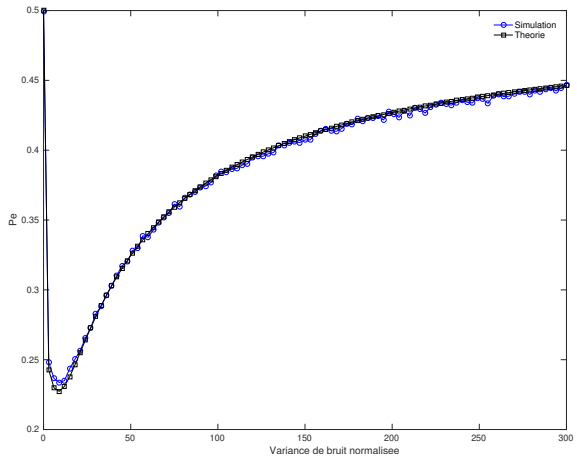

FIGURE 3 – Probabilité d'erreur $\mathbb{P}_e$ en fonction de la variance de bruit normalisée σ_N^2/F_e

Proposition 1. Nous pouvons constater que la simulation est conforme à la théorie et qu'il existe une valeur de variance de bruit telle que la probabilité d'erreur est minimale, mettant donc en exergue la RS pour le neurone à spikes. Cependant, la probabilité d'erreur obtenue est trop grande pour utiliser le neurone IF tel que présenté dans cette première partie.

Dans la prochaine section, nous proposons d'utiliser plusieurs neurones à spikes en parallèle afin d'obtenir une probabilité d'erreur inférieure à 10^{-4} pour une large plage de variances de bruit, permettant ainsi l'utilisation de neurones IF pour une communication efficace énergétiquement.

5 Performance de N_p neurones IF en parallèle

Supposons que nous disposons de N_p neurones IF en parallèle. Les entrées de ces neurones sont toutes des versions bruitées de la même séquence de symboles, avec pour chaque neurone une réalisation différente du bruit. Afin de pouvoir proposer une réalisation pratique de ce détecteur, nous supposons que nous pouvons avoir au maximum $N_{max} = 50$ neurones IF. Chaque neurone effectue la détection du symbole en utilisant la règle de décision dure (1). La décision globale est prise en collectant toutes les décisions individuelles et utilise encore une fois une règle de décision dure en se basant sur le nombre N_1 de neurones IF ayant décidé la valeur A. Ainsi,

$$\widehat{i}_{inj} = \begin{cases} A & \text{si } N_1 \geq K_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

La partie détection est représentée en FIGURE 4.

Afin de simplifier les notations, $\mathbb{P}(j|k), j, k \in \{0, A\}$ représente la probabilité $\mathbb{P}(j|k) = \mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} = j | i_{inj} = k)$.

Proposition 2. *En utilisant des neurones IF, avec un seuil de déclenchement γ et les règles de décision (1) et (4), sur N_p canaux AWGN en parallèle de variance σ_N^2, la probabilité d'erreur $\mathbb{P}_{e,N_p}^{K_p} = \mathbb{P}(\widehat{i}_{inj} \neq i_{inj})$ est donnée par*

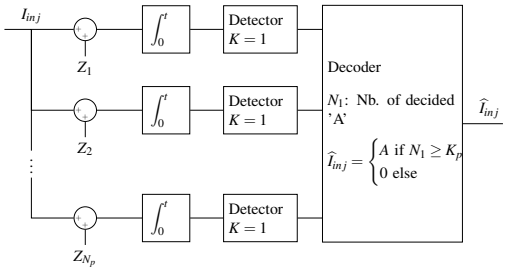

FIGURE 4 – Détection pour N_p neurones IF en parallèle

$$\mathbb{P}_{e,N_p}^{K_p} = \sum_{k=K_p}^{N_p} \binom{N_p}{k} \frac{\mathbb{P}(A|0)^k \mathbb{P}(0|0)^{N_p-k}}{2} + \sum_{k=N_p-K_p+1}^{N_p} \binom{N_p}{k} \frac{\mathbb{P}(0|A)^k \mathbb{P}(A|A)^{N_p-k}}{2},$$

où $\mathbb{P}(A|0)$*, resp.* $\mathbb{P}(0|A)$*, est donné dans (2), resp. dans (3).*

Démonstration. La preuve repose sur la combinatoire. □

Nous proposons de déterminer le nombre optimal de neurones N_p^* à mettre en parallèle, ainsi que le seuil optimal K_p^* pour chaque variance de bruit. Comme nous ne disposons qu'au maximum que de $N_{max} = 50$ neurones IF, N_p^* et K_p^* sont les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} N_p^*, K_p^* = \arg\min_{N_p, K_p} \quad & \mathbb{P}_{e,N_p}^{K_p} \\ \text{s.t.} \quad & N_p, K_p \leq N_{max} \end{aligned} \tag{5}$$

La FIGURE 5 présente la probabilité d'erreur en fonction de la variance de bruit normalisée dans les cas suivants : neurone unique, (N_p^*, K_p^*), $(N_p^*, K_p = 2)$ (théorique et simulation) et $(N_p = 16, K_p = 2)$. Ce dernier cas est optimal pour une variance normalisée de 6dB. D'après la FIGURE 5, on peut voir que la mise en parallèle de neurones améliore considérablement la probabilité d'erreur pour une large plage de variance par rapport au neurone unique. On peut néanmoins aussi noter que, pour une grande plage de variances, le fait de disposer d'un nombre non approprié de neurones en parallèle peut réduire les performances par rapport au cas du neurone unique (par exemple, pour une variance de bruit normalisée de 13dB à 25dB, avec 16 neurones).
On peut aussi noter qu'il existe un écart important entre les deux courbes (N_p^*, K_p^*) et $(N_p^*, K_p = 2)$, mettant donc en évidence la perte liée à des contraintes de circuits électriques.
Nous pouvons également noter que la probabilité d'erreur est inférieure à 10^{-4} pour une très grande plage de variance. Ainsi, un détecteur utilisant cette architecture à base de neurones à spikes consommant peu d'énergie peut être utilisé dans le contexte d'une communication économe en énergie et pour la *wake-up radio*.

6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons caractérisé les performances théoriques d'une communication numérique utilisant un détecteur

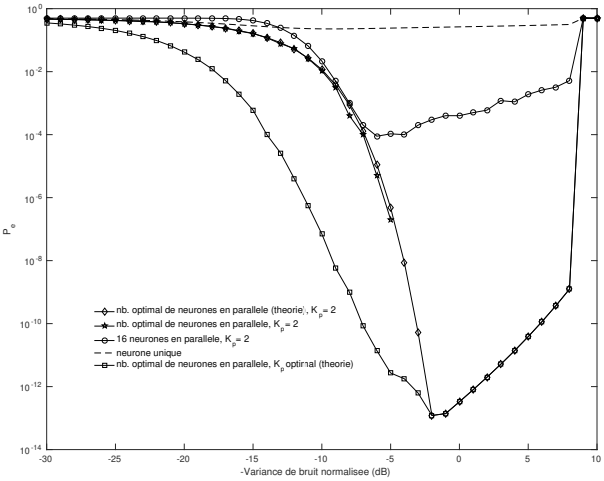

FIGURE 5 – Probabilité d'erreur $\mathbb{P}_{e,N_p}^{K_p}$ en fonction de la variance de bruit normalisée

basé sur un neurone à spikes IF. Nous avons montré qu'avec un seul neurone, la probabilité d'erreur était trop élevée pour une application en communication numérique. Afin de palier à ce problème, nous avons proposé d'utiliser des neurones à spikes en parallèle. Avec cette nouvelle architecture, nous avons montré que l'on pouvait atteindre une très faible probabilité d'erreur, inférieure à 10^{-4}, pour une large plage de variance de bruit. Néanmoins, cette amélioration importante des performances nécessite de disposer de N_p sources de bruit blanc i.i.d. de même variance et de N_p neurones identiques, ce qui est très difficile à obtenir en pratique. Pour résoudre ce problème, notre décodeur parallèle pourrait être transformé en un décodeur séquentiel ne nécessitant qu'un seul neurone et une seule source de bruit en utilisant un code à répétition et en autorisant une latence égale au nombre nécessaire de neurones en parallèle.

Remerciement

Ce travail a été partiellement supporté par l'IRCICA, CNRS USR 3380, Lille, France.

Références

[1] I. Sourikopoulos, S. Hedayat, C. Loyez, F. Danneville, V. Hoel, E. Mercier, and A. Cappy, "A 4-fj/spike artificial neuron in 65nm cmos technology," *Frontiers in Neuroscience*, vol. 11, 2017.

[2] I. Sourikopoulos, S. Hedayat, C. Loyez, F. Danneville, V. Hoel, E. Mercier, and A. Cappy, "A 4-fj/spike artificial neuron in 65nm cmos technology," in *Workshop NICE Neuro-inspired/Neuromorphic Computing Systems, IBM Almaden, CA, USA, March 2017*, 2017.

[3] U. Erez and R. Zamir, "Achieving 1/2log(1+snr) on the awgn channel with lattice encoding and decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 10, pp. 2293–2314, 2004.

[4] G. Gerstein and B. Mandelbrot, "Random walk models for the spike activity of a single neuron," *Biophysical Journal*, vol. 4, no. 1, pp. 41–68, 1964.

[5] K. Pärna, *Inverse Gaussian Distribution*, pp. 687–688. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011.