



**HAL**  
open science

# Théorème de Karlin Rubin asymptotique appliqué à la détection d'un signal dans un sous-espace cône

Sabrina Bourmani, François-Xavier Socheleau, Dominique Pastor

► **To cite this version:**

Sabrina Bourmani, François-Xavier Socheleau, Dominique Pastor. Théorème de Karlin Rubin asymptotique appliqué à la détection d'un signal dans un sous-espace cône. GRETSI 2019: XXVIIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Aug 2019, Lille, France. hal-02272517

**HAL Id: hal-02272517**

**<https://hal.science/hal-02272517v1>**

Submitted on 27 Aug 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Théorème de Karlin Rubin asymptotique appliqué à la détection d'un signal dans un sous-espace cône

Sabrina Bourmani, Francois-Xavier Socheleau, Dominique Pastor  
IMT Atlantique, Lab-STICC, Bretagne Loire University  
Technopole Brest-Iroise CS83818, Brest 29238, France

{sabrina.bourmani, fx.socheleau, d.pastor}@imt-atlantique.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons d'abord une formulation asymptotique du théorème de Karlin-Rubin, qui se base sur la convergence simple d'une suite de vecteurs aléatoires, pour concevoir un test Asymptotiquement Uniformément Plus Puissant (AUPP) dans le cas des hypothèses composites. Ensuite, nous appliquons cette propriété générale d'optimalité à un problème de détection où l'on teste si l'énergie d'un signal projeté sur un sous-espace connu excède une certaine proportion de son énergie totale. Le signal est supposé inconnu déterministe et observé dans du bruit blanc gaussien additif. Ce genre de problèmes de détection peut survenir lorsque le signal suit un modèle linéaire et qu'il est en présence d'interférence difficilement caractérisable. Une autre application où ce problème trouverait tout son intérêt serait en "machine learning" où le but est de décider si les données analysées correspondent à un modèle linéaire présumé. Pour ce problème, il est montré qu'aucun test Uniformément Plus Puissant (UPP) ni UPP invariant n'existe, ainsi un test AUPP invariant est calculé.

**Abstract** – We first propose an asymptotic formulation of Karlin-Rubin's theorem that relies on the weak convergence of a sequence of random vectors to design Asymptotically Uniformly Most Powerful (AUMP) tests dedicated to composite hypotheses. This general property of optimality is then applied to the problem of testing whether the energy of a signal projected onto a known subspace exceeds a specified proportion of its total energy. The signal is assumed unknown deterministic and it is observed in independent and additive white gaussian noise. Such a problem can arise when the signal to be detected obeys the linear subspace model and when it is corrupted by unknown interference. It can also be relevant in machine learning applications where one wants to check whether an assumed linear model fits the analyzed data. For this problem, where it is shown that no Uniformly Most Powerful (UMP) and no UMP invariant tests exist, an AUMP invariant test is derived.

## 1 Introduction

Dans un problème de test d'hypothèses, on espère idéalement trouver un test statistique qui soit optimal selon un certain critère. Les tests uniformément plus puissants (UPP) sont un exemple. En effet ces tests garantissent une puissance (probabilité de détection) plus grande que n'importe quel autre test pour un niveau donné. Le théorème de Neyman Pearson fournit l'expression du test le plus puissant dans le cas d'hypothèses simples, tandis que le théorème de Karlin Rubin s'applique aux hypothèses composites. Ce dernier stipule qu'un test est UPP s'il compare à un seuil une statistique de test scalaire dont le rapport de vraisemblance est croissant [1–3]. Cependant, dans le cas où les paramètres du problème sont inconnus, il est difficile de définir des tests UPP. On restreint alors souvent la classe de tests à celle des tests invariants. Une certaine optimalité asymptotique peut être aussi visée.

Nous proposons une formulation asymptotique du théorème de Karlin-Rubin qui se base sur la notion de convergence simple d'une suite de vecteurs aléatoires et sur le concept d'un test Asymptotiquement Uniformément Plus Puissant (AUPP), en nous inspirant de [2, Def. 13.3.2]. Ces résultats sont ensuite appliqués à un problème de détection spécifique; la présence ou non d'un signal d'intérêt dans un sous-espace cône.

Les sous-espaces linéaires sont souvent utilisés pour modéliser les signaux et les données structurées [3–5]. En présence

de bruit gaussien, la détection se fait généralement à l'aide de détecteurs à sous-espaces adaptés [6]. Cependant, il existe de nombreuses applications pour lesquelles ces détecteurs ne fonctionnent pas, notamment quand il y a beaucoup trop d'incertitude autour du signal ou du sous-espace d'intérêt [7–9] ou quand le signal est aussi en présence d'interférences en plus du bruit gaussien [6, 10, 11]. Dans ces cas là, le sous-espace interférence est soit connu soit appris à travers une base d'apprentissage [6]. Toutefois, il est parfois tellement difficile de caractériser l'interférence ou définir son sous-espace [10, 11] qu'aucun modèle paramétrique ne peut être utilisé. Il est néanmoins possible de modéliser par des sous-espaces cônes les signaux incertains résultants d'une inadéquation de modèle ou de la présence d'interférences inconnues [7, 8, 10, 11]. Dans cet article, le cône est défini comme étant la frontière dans l'espace de mesure délimité par l'ensemble des signaux ayant une proportion  $\tau$  de leur énergie totale dans un sous-espace linéaire connu. Nous adressons donc le problème de tester la présence d'un signal dans le cône ( $\mathcal{H}_1$ ) ou non ( $\mathcal{H}_0$ ). Le signal est supposé inconnu déterministe, observé dans du bruit blanc additif gaussien. Les invariances du problème sont exposées et il est montré qu'aucun test Uniformément Plus Puissant Invariant (UPPI) n'existe. Un test se basant sur un maximal invariant est présenté et s'avère être asymptotiquement UPPI selon le théorème de Karlin Rubin proposé.

**Notation :** Nous nous limitons aux tests non-randomisés. Soit  $\mathbf{Y}$  un vecteur aléatoire. Un ensemble  $\mathcal{B}$  est appelé ensemble  $\mathbb{P}$ -continu si  $\mathbb{P}[\mathbf{Y} \in \partial\mathcal{B}] = 0$ , où  $\partial\mathcal{B}$  est la frontière de  $\mathcal{B}$  [12, Ch. 1]. Nous notons  $\xi_{\mathbf{Y}}$  la famille de tests dont la région critique  $\mathcal{R}^{\mathcal{J}}$  est un ensemble  $\mathbb{P}$ -continu de vecteurs aléatoires  $\mathbf{Y}$ , i.e.,  $\xi_{\mathbf{Y}} \triangleq \{\mathcal{J} : \mathbb{P}[\mathbf{Y} \in \partial\mathcal{R}^{\mathcal{J}}] = 0\}$ . La convergence en loi d'une suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers une variable aléatoire  $Y$  est notée :  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ . La convergence en probabilité est notée  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ . L'exposant  $T$  désigne la transposition d'une matrice et  $\|\cdot\|$  représente la norme Euclidienne. La distribution d'une loi du  $\chi^2$  non-centrée avec  $\nu$  degrés de liberté et  $\ell$  le paramètre de noncentralité est notée  $\chi_{\nu}^2(\ell)$ .  $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2, \ell_1, \ell_2, \cdot)$  désigne la fonction de densité de probabilité (pdf) d'une loi de Fisher  $\mathcal{F}$  doublement non-centrée. La fonction de répartition correspondante est notée  $F(\nu_1, \nu_2, \ell_1, \ell_2, \cdot)$ .

## 2 Une formulation asymptotique du théorème de Karlin Rubin

**Définition 1.** Soit  $(\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de vecteurs aléatoires dont la fonction de densité de probabilité est  $f_{\mathbf{Y}_n}^{\theta}(\mathbf{y})$  avec  $\theta \in \Theta$ . Nous considérons le problème de détection suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta \in \Theta_1, \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta, \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

Un test  $\mathcal{J}$  est appelé AUPP (Asymptotiquement Uniformément Plus Puissant) de taille asymptotique  $\alpha$  si

$$\limsup_n \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)] = \alpha, \quad (2)$$

et si  $\forall \mathcal{J}'$  un test vérifiant :  $\lim_n \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}'(\mathbf{Y}_n)] \leq \alpha$ , nous avons,  $\lim_n \sup_{\theta \in \Theta_1} (\mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}'(\mathbf{Y}_n)] - \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{Y}_n)]) \leq 0$ .

L'optimalité asymptotique considérée ici est inspirée de [2, Def. 13.3.2] et s'applique aux hypothèses composites.

**Proposition 1** (Théorème de Karlin Rubin Asymptotique). Soit  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un vecteur aléatoire absolument continu de fonction de densité de probabilité  $f_{\mathbf{Y}}^{\theta}(\mathbf{y})$ , où  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ , et soit  $\Theta_1$  et  $\Theta_0$  deux sous-ensembles de  $\Theta$  tel que :  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  et  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ . Nous supposons que  $f_{\mathbf{Y}}^{\theta_0} \neq 0$ .

Soit :

$$\Lambda_{\theta_0, \theta_1}(\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{Y}}^{\theta_1}(\mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}^{\theta_0}(\mathbf{y})} \quad (3)$$

le rapport de vraisemblance avec  $\theta_0 \in \Theta_0$  et  $\theta_1 \in \Theta_1$ , et tel que  $\Lambda_{\theta_0, \theta_1} = h_{\theta_0, \theta_1} \circ V$ , avec  $V : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathbf{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de vecteurs aléatoires. Si pour tout  $\theta_0 < \theta_1$ ,  $h_{\theta_0, \theta_1}$  est strictement croissant en  $V$  et  $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{Y}$ , alors le test

$$\varphi(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } V(\mathbf{y}) \geq \lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$\mathbb{E}_{\theta_0} [\varphi(\mathbf{Y})] = \mathbb{P}_{\theta_0} [V(\mathbf{Y}) \geq \lambda] = \alpha, \quad (5)$$

est AUPP parmi tous les test appartenant à  $\xi_{\mathbf{Y}}$  pour tester

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0. \end{cases} \quad (6)$$

**Esquisse de preuve.** Prop. 1 est une formulation asymptotique du théorème de Karlin Rubin. Par conséquent les mêmes étapes de la démonstration d'origine peuvent être suivies [3, pp. 124-125] [2, Ch. 3.4]. Néanmoins, la convergence  $\mathbf{X}_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}$  doit être prise en compte et ce grâce au théorème de Portmanteau [12, Th. 2.1]. Puisque  $\mathbf{X}$  est un vecteur aléatoire absolument continu,  $\mathcal{R}^{\mathcal{J}}$  est un ensemble  $\mathbb{P}$ -continu, alors  $\limsup_k \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{X}_k)] = \lim_k \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{X}_k)] = \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{X})]$ . De même, il est possible de montrer que  $\limsup_k \sup_{\theta \in \Theta_1} \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{X}_k)] = \sup_{\theta \in \Theta_1} \mathbb{E}_{\theta} [\mathcal{J}(\mathbf{X})]$ . Ces résultats sont ensuite injectés dans la preuve d'origine pour démontrer que pour tout test  $\varphi'$  de niveau asymptotique  $\alpha$ ,  $\limsup_k \sup_{\theta \in \Theta_1} (\mathbb{E}_{\theta} [\varphi'(\mathbf{X}_k)] - \mathbb{E}_{\theta} [\varphi(\mathbf{X}_k)]) \leq 0$ .

## 3 Application : Test de présence d'un signal dans un sous-espace cône

### 3.1 Enoncé du problème

Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  qui désigne un signal déterministe inconnu observé dans du bruit blanc gaussien  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$  de variance  $\sigma^2$  inconnue. Le vecteur d'observation est :

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{w}. \quad (7)$$

Le rapport signal à bruit (SNR), défini par  $\gamma = \frac{\|\mathbf{z}\|^2}{N\sigma^2}$  est supposé connu pour le moment. Cette hypothèse sera relâchée dans la Sec. 3.4. Soit  $\mathbf{H}$  une matrice  $N \times n$  qui génère un sous-espace  $\langle \mathbf{H} \rangle$  de rang  $n$  avec  $n \leq N$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{H}}$  sa matrice de projection correspondante, i.e.,  $\mathbf{P}_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ .

Pour une tolérance donnée  $0 \leq \tau \leq 1$ , le sous-espace cône est défini par  $\mathcal{C}_{\mathbf{H}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \rho = \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{H}} \mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} > \tau \right\}$ . Nous adressons alors le problème de tester la présence de  $\mathbf{z}$  dans le cône  $\mathcal{C}_{\mathbf{H}}$ , sachant que nous observons  $\mathbf{y}$ . Le problème de test d'hypothèse se présente alors comme :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mathbf{z} \notin \mathcal{C}_{\mathbf{H}} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{z} \in \mathcal{C}_{\mathbf{H}}. \end{cases} \quad (8)$$

Le problème (8) équivaut à tester si une proportion suffisante de l'énergie totale du signal se trouve dans le sous-espace  $\langle \mathbf{H} \rangle$ . Une telle formulation du problème peut être pertinente quand le signal suit un modèle linéaire et qu'il est altéré par de l'interférence inconnue  $\zeta$ , i.e.,  $\mathbf{z} = \mu \mathbf{H} \phi + \zeta$ , où  $\mu$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0, 1\}$  modélisant l'éventuelle présence du signal,  $\phi \in \mathbb{R}^n$  étant les coordonnées inconnues de ce signal dans le sous-espace  $\langle \mathbf{H} \rangle$ . On peut citer certaines applications [11, 13] où l'interférence ne peut pas être représentée par un seul modèle paramétrique. C'est le cas en acoustique sous-marine où celle-ci est très hétérogène et peut provenir de sources aussi bien anthropiques, biologiques qu'abiotiques. Les détecteurs ne peuvent alors pas se baser sur des données d'apprentissage pour apprendre les caractéristiques des signaux interférents. Dans ces exemples,  $\zeta$  n'évolue pas dans un sous-espace connu [6]. Par conséquent, nous faisons l'hypothèse que  $\zeta$  est un vecteur dont la majeure partie de l'énergie se trouve en dehors du cône  $\mathcal{C}_{\mathbf{H}}$  où réside le signal d'intérêt, i.e.,  $\|\mathbf{P}_{\mathbf{H}} \zeta\|^2 \leq \tau \|\zeta\|^2$ . En supposant que  $\|\mathbf{H} \phi + \mathbf{P}_{\mathbf{H}} \zeta\|^2 > \tau \|\mathbf{H} \phi + \zeta\|^2$ , (8) est alors équivalent au problème de détection où il faut

décider si  $\mu = 0$  ou  $\mu = 1$ . Un modèle similaire est utilisé sur des données réelles dans [11, 13], ce qui démontre la pertinence de l'approche. Notons que dans cet article, et contrairement à d'autres détecteurs de sous-espaces cônes comme [7, 8], l'hypothèse nulle dans (8) ne se restreint pas seulement à la présence d'un bruit gaussien mais aussi à de l'interférence inconnue. Le Problème (8) peut aussi s'avérer d'un intérêt pratique en machine learning pour vérifier si un modèle linéaire présumé correspond avec une certaine précision  $\tau$  aux données analysées.

### 3.2 Invariances du problème

Malheureusement aucun test UPP ne peut être calculé parce que  $\mathbf{z}$  n'est pas parfaitement connu. Toutefois, nous pouvons exploiter les invariances du problème. Le problème (8) est invariant, et son groupe de transformations est  $\mathcal{G} = \{g : g(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{U}_H \mathbf{Q} \mathbf{U}_H^T + \mathbf{U}_{H^\perp} \mathbf{R} \mathbf{U}_{H^\perp}^T) \mathbf{x}\}$ , où  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont des matrices orthogonales respectivement de dimension  $n \times n$  et  $(N - n) \times (N - n)$ .  $\mathbf{U}_H$  est défini tel que  $\mathbf{P}_H = \mathbf{U}_H \mathbf{U}_H^T$  et  $\mathbf{U}_{H^\perp}$  tel que  $\mathbf{P}_H = \mathbf{I}_N - \mathbf{U}_{H^\perp} \mathbf{U}_{H^\perp}^T$ .

Selon [2, Theorem 6.2.1], si un maximal invariant  $M(\mathbf{x})$  de  $\mathcal{G}$  existe alors tous les tests  $\mathcal{G}$ -invariants seront fonction de ce maximal invariant. Pour le problème (8),  $M(\mathbf{x})$  de  $\mathcal{G}$  est

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mapsto M(\mathbf{x}) = \frac{N - n}{n} \times \frac{\|\mathbf{P}_H \mathbf{x}\|^2}{\|(\mathbf{I}_N - \mathbf{P}_H) \mathbf{x}\|^2} \in [0, \infty) \quad (9)$$

Si le test UPPI existe, il peut être obtenu en calculant le rapport de vraisemblance de  $M(\mathbf{x})$  qui est distribuée selon une loi  $\mathcal{F}$  doublement non centrée [14, Ch. 30]. Ainsi le rapport de vraisemblance est

$$L_M(\mathbf{y}) = \frac{\mathcal{F}(n, N - n, N\gamma\rho_1, N\gamma(1 - \rho_1), M(\mathbf{y}))}{\mathcal{F}(n, N - n, N\gamma\rho_0, N\gamma(1 - \rho_0), M(\mathbf{y}))} \quad (10)$$

où  $\rho_0 \leq \tau$  (resp.  $\rho_1 > \tau$ ) désigne le pourcentage d'énergie de  $\mathbf{z}$  dans  $\langle \mathbf{H} \rangle$  sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  (resp.  $\mathcal{H}_1$ ). Puisqu'il s'agit d'hypothèses composites, un test UPPI peut parfois être trouvé en invoquant le théorème de Karlin Rubin. Hélas,  $L_M(\mathbf{y})$  n'est pas une fonction croissante de  $M(\mathbf{y})$  pour chaque paire  $(\rho_1 > \rho_0, \rho_0)$  et pour n'importe quel jeu de paramètres  $(n, N, \gamma)$ . C'est pourquoi le test UPPI n'existe pas toujours. Cependant, pour une grande valeur de  $N$ , nous démontrons dans ce qui suit qu'un test asymptotiquement UPPI existe.

### 3.3 Test asymptotiquement UPPI

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , soit le test  $\mathcal{T}_A$  défini pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , tel que

$$\mathcal{T}_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } M(\mathbf{x}) \geq \lambda_A \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (11)$$

avec  $\lambda_A$  tel que

$$F(n, N - n, N\gamma\tau, N\gamma(1 - \tau), \lambda_A) = 1 - \alpha. \quad (12)$$

La fonction de puissance du test  $\mathcal{T}_A$  vérifie  $\mathbb{P}[\mathcal{T}_A(\mathbf{z} + \mathbf{w}) = 1] = 1 - F(n, N - n, N\gamma\rho, N\gamma(1 - \rho), \lambda_A)$  où  $\rho = \|\mathbf{P}_H \mathbf{z}\|^2 / \|\mathbf{z}\|^2$ .

**Proposition 2.**  $\mathcal{T}_A$  est AUPP de taille  $\alpha$  parmi les tests  $\mathcal{G}$ -invariants pour le problème (8).

**Preuve.**  $M(\mathbf{y}) = (N - n)Z_1 / (nZ_2)$ , où  $Z_1 \sim \chi_n^2(N\gamma\rho)$  et  $Z_2 \sim \chi_{(N-n)}^2(N\gamma(1 - \rho))$ . Pour  $n$  fixé et  $N \rightarrow \infty$ ,  $Z_2 / (N - n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ . En appliquant le théorème de Slutsky pour  $N \rightarrow \infty$  nous obtenons  $M(\mathbf{y}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1 / n$ . Puisque le rapport de vraisemblance d'une variable aléatoire suivant une loi du Chi2 non centrée est connu pour être croissant [15, pp. 469], Prop. 1 s'applique avec  $\Theta_0 = [0, \tau]$  et  $\Theta_1 = (\tau, 1]$ . D'où le résultat. Pour la démonstration complète voir annexe A et B de [16].

Curieusement, la statistique du maximal invariant  $M(\mathbf{y})$  est la même que celle utilisée dans d'autres problèmes de détection comme [6, Ch. 4.12] et [10, App. A]. Il est important de noter que le test, lui, est différent étant donné la fonction de puissance et les propriétés d'optimalité qui sont liées au problème.

### 3.4 SNR inconnu

La valeur du SNR  $\gamma$  est nécessaire dans (12) pour calculer le seuil  $\lambda_A$  afin de satisfaire la contrainte de taille  $\alpha$ . En pratique,  $\gamma$  est rarement connu avec précision et donc  $\mathcal{T}_A$  ne peut être appliqué rigoureusement. Toutefois,  $\mathcal{T}_A$  peut fournir des pistes pour concevoir des tests ad hoc efficaces quand aucun test optimal n'est concevable. Un test robuste  $\mathcal{T}_B$  par exemple peut être utilisé où  $M(\mathbf{y})$  est comparé à un nouveau seuil  $\lambda_B$  tel que

$$\sup_{\gamma \in \mathcal{S}} F(n, N - n, N\gamma\tau, N\gamma(1 - \tau), \lambda_B) = 1 - \alpha, \quad (13)$$

où, (i)  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  quand  $\gamma$  est inconnu, (ii)  $\mathcal{S} = [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  quand il est possible de déterminer l'intervalle dans lequel le SNR évolue, ou (iii)  $\mathcal{S} = \{\gamma_0\}$ . D'autres approches sont envisageables quand de l'information a priori est disponible à propos de la distribution du SNR, comme l'approche bayésienne.

## 4 Simulations numériques

Les figures issues des simulations illustrent les résultats théoriques de la Sec. 3. Nous comparons trois tests : le test AUPPI  $\mathcal{T}_A$ , le test  $\mathcal{T}_B$  à SNR borné où  $\mathcal{S} = [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ , et le test UPPI qui compare le rapport de vraisemblance (10) à un seuil de telle sorte à garantir une certaine taille  $\alpha$ . Ce dernier n'est pas calculable quand  $\rho_0$  et  $\rho_1$  sont inconnus et est donc utilisé comme une borne de performance. Pour toutes les simulations,  $n$  est fixé à 5, et la tolérance  $\tau$  à 0.25. Le pourcentage d'énergie du signal  $\mathbf{z}$  dans le sous-espace  $\langle \mathbf{H} \rangle$  sous  $\mathcal{H}_1$  est égale à  $\rho_1 = 0.75$ . En ce qui concerne la borne UPPI,  $\rho_0$  est égal à la tolérance  $\tau$ .

Fig. 1 affiche la probabilité de détection en fonction du SNR pour trois valeurs de  $N$ , avec  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\mathcal{S} = [\gamma - 3, \gamma + 3]$  dB. Pour le jeu de paramètres considérés, l'écart de performance entre le test AUPPI  $\mathcal{T}_A$  et la borne UPPI est négligeable peu importe la valeur de  $N$ , preuve que le caractère asymptotiquement optimal du test  $\mathcal{T}_A$  survient dès les plus petites valeurs de  $N$ . La baisse de performance, en raison du SNR inconnu est le résultat de la tendance pessimiste et prudente du test  $\mathcal{T}_B$ .

Fig. 2 montre la baisse de performance liée à la largeur de  $\mathcal{S}$ . La probabilité de détection est représentée en fonction de la largeur de l'intervalle où le SNR évolue  $\Delta_\gamma$ , défini en dB :  $\Delta_\gamma = \gamma - \gamma_{\min} = \gamma_{\max} - \gamma$ . Sans surprise, l'élargissement de l'intervalle d'incertitude sur le SNR entraîne des pertes de performance, plus particulièrement pour de grandes valeurs de taille

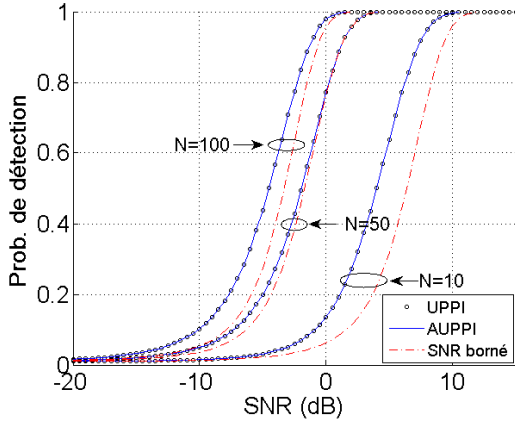


FIGURE 1 – Probabilité de détection en fonction du SNR,  $n = 5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\tau = 0.25$ ,  $\rho_0 = \tau$ ,  $\rho_1 = 0.75$ ,  $\mathcal{S} = [\gamma - 3, \gamma + 3]$  dB.

$\alpha$ . Nous remarquons toutefois qu’aucune perte supplémentaire de performance ne surgit pour un écart  $\Delta_\gamma$  supérieur à 6 dB. Ce genre de figure peut être appréciée par les ingénieurs désireux de savoir à quel point il serait utile d’investir dans un estimateur précis de SNR, avant d’effectuer la détection.

## 5 Conclusions

La formulation du théorème de Karlin Rubin asymptotique concernant les hypothèses composites indique qu’en comparant une statistique de test scalaire à un seuil, nous obtenons un test qui est AUPP si cette statistique converge en distribution vers une variable aléatoire dont le rapport de vraisemblance est croissant. Ce théorème a été appliqué dans le cadre d’un problème de détection de sous-espace cône pour calculer un test qui soit AUPP invariant puisque le test UPP (invariant) n’existe pas. Pour un SNR connu, les simulations montrent que le test AUPPI se rapproche de la borne de performance UPPI. Pour un SNR inconnu, un test robuste est calculé à partir du test AUPPI et présente des pertes de performances limitées par rapport à la borne UPPI.

## Références

[1] S. Karlin and H. Rubin, “Distributions possessing a monotone likelihood ratio,” *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 51, Feb. 1956.

[2] E. L. Lehmann and J. P. Romano, *Testing statistical hypotheses*, Springer, 3rd edition, 2005.

[3] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing : Detection, Estimation, and Time Series Analysis*, Addison-Wesley, 1991.

[4] R. T. Behrens and L. L. Scharf, “Signal processing applications of oblique projection operators,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 6, 1994.

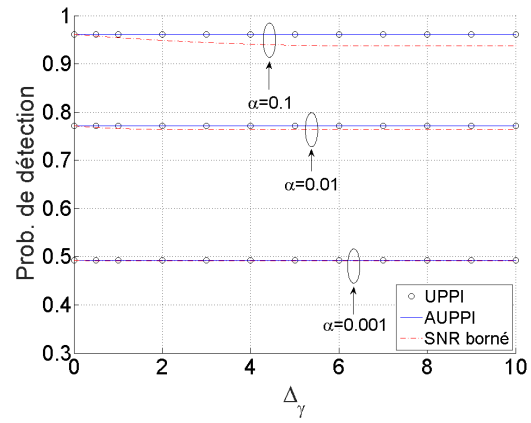


FIGURE 2 – Probabilité de détection en fonction de la largeur de l’intervalle du SNR,  $n = 5$ ,  $N = 50$ ,  $\tau = 0.25$ ,  $\rho_0 = \tau$ ,  $\rho_1 = 0.75$ ,  $\gamma = 0$  dB.

[5] T. T. Liu, L. R. Frank, E. C. Wong, and R. B. Buxton, “Detection power, estimation efficiency, and predictability in event-related fmri,” *Neuroim.*, vol. 13, no. 4, 2001.

[6] L. L. Scharf and B. Friedlander, “Matched Subspace Detectors,” *IEEE Trans. Sig. Process.*, vol. 42, no. 8, 1994.

[7] S. Ramprasad, T. W Parks, and R. Shenoy, “Signal modeling and detection using cone classes,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 2, pp. 329–338, 1996.

[8] O. Besson, “Detection of a signal in linear subspace with bounded mismatch,” *IEEE Trans. Aero. Elec. Syst.*, vol. 42, no. 3, 2006.

[9] F.-X. Socheleau and D. Pastor, “Testing the energy of random signals in a known subspace : An optimal invariant approach,” *IEEE Sig. Proc. Letters*, vol. 21, no. 10, 2014.

[10] M. N. Desai and R. S. Mangoubi, “Robust gaussian and non-gaussian matched subspace detection,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 51, no. 12, 2003.

[11] F.-X. Socheleau, E. Leroy, A. Carvallo Pecci, F. Samaran, J. Bonnel, and J.-Y. Royer, “Automated detection of antarctic blue whale calls,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 138, no. 5, 2015.

[12] P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd edition, Wiley, 1995.

[13] F.-X. Socheleau and F. Samaran, “Detection of Mysticete Calls : a Sparse Representation-Based Approach, Research report RR-2017-04-SC,” Oct. 2017.

[14] N. L. Johnson, S. Kotz, and N Balakrishnan, *Continuous Univariate distributions*, 2nd edition, vol. 2, John Wiley & Sons, Inc, 1995.

[15] M. L. Eaton, *Multivariate statistics. A vector space approach*, Wiley, 1983.

[16] S. Bourmani, F.-X. Socheleau, and D. Pastor, “Asymptotic karlin rubins theorem with application to signal detection in a subspace cone,” in *EUSIPCO’19 (to appear)*.