



HAL
open science

Analyse entrée-sortie avec bruit multiplicatif: quelques outils pour l'étude des fluctuations et incertitudes

A. Hazan

► **To cite this version:**

A. Hazan. Analyse entrée-sortie avec bruit multiplicatif: quelques outils pour l'étude des fluctuations et incertitudes. 2019. hal-02272411

HAL Id: hal-02272411

<https://hal.science/hal-02272411>

Preprint submitted on 27 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse entrée-sortie avec bruit multiplicatif : quelques outils pour l'étude des fluctuations et incertitudes

A. Hazan *

27 août 2019

Table des matières

1	Introduction	2
2	Analyse entrées-sortie	2
2.1	Modèles avec unités physiques et bruit : l'exemple du modèle de Brandt	4
3	Travaux connexes	6
4	Approximations des moments et de la loi de probabilité des solutions	8
4.1	Perturbation aléatoire : simulation MC	8
4.2	Estimation paramétrique	8
4.3	Perturbation déterministe	9
4.4	Formule de Taylor pour UQ	9
4.5	Série de Neumann	10
4.6	Méthodes spectrales, Galerkin	11
5	Application numériques	12
5.1	Perturbation aléatoire : formule de Taylor	13
5.2	Perturbation aléatoire : simulation MC	13
5.3	Estimation paramétrique	15
5.4	Série de Neumann	15
5.5	Méthodes spectrales, Galerkin	16
5.6	Discussion	19

*Université Paris-Est Créteil

6 Perspectives	19
6.1 Modèle linéaire	19
6.2 Autres modèles	20
7 Conclusion	20
A Appendix	23
A.1 Valeurs propres de A et $(I - A)$	23
A.1.1 Effet de a sur les valeurs propres de A	23
A.2 Autres méthodes pour la distribution des solutions	25
A.2.1 Perturbation déterministe	25
A.2.2 Perturbation aléatoire : formule de Stewart	27

1 Introduction

L'Analyse entrée-sortie popularisé par Leontief [WL36] connue également sous le nom d'analyse *input-output*, permet d'analyser les dépendances entre secteurs industriels et de relier la production finale et la production intermédiaire, en considérant la consommation comme exogène. Dans cet article nous nous intéressons à la nature des solutions lorsque, pour une demande donnée, des fluctuations de la matrice des coefficients techniques sont introduites.

Nous comparons plusieurs techniques issues des mathématiques appliquées et des sciences de l'ingénieur pour approximer la loi ou les moments des solutions du problème linéaire obtenu. Certaines techniques sont à notre connaissance employées pour la première fois dans ce cadre.

Les applications portent sur un système de faible dimension emprunté à [Bra17] où les productions sont exprimées en quantités physiques et non monétaires, et où les fluctuations suivent une loi log-normale.

Nous montrons qu'une approximation correcte des moments et de la densité peut-être obtenue, pour un coût computationnel modeste.

En 2, l'Analyse entrées-sortie et le modèle utilisé pour les applications est présentés. En 3 on résume l'apport des travaux connexes. En 4 on présente le principe des techniques d'approximation des solutions. En 5 les résultats numériques sont présentés et discutés. Les sections 6 et 7 concluent.

2 Analyse entrées-sortie

Un modèle input-output est construit pour une zone déterminée (par exemple un pays ou une région) durant une période donnée. Il recense les flux monétaires entre des secteurs industriels définis. Notons, d'après [MB09] :

- z_{ij} la valeur monétaire du flux entre le secteur i et le secteur j .
- x_i la valeur de la production totale du secteur i

— f_i la demande finale du produit du secteur i

Alors $x_i = \sum_j^n z_{ij} + f_i$, ou en forme matricielle $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{1} + \mathbf{f}$. Avec l'introduction de $A = (a_{ij})$ et l'hypothèse $z_{ij} = a_{ij}x_j$ qui se traduit par l'absence d'économies d'échelle ("constant return to scale") et par des proportions fixes d'inputs quel que soit le niveau de production, le système devient :

$$(I - A)x = f \quad (1)$$

$$x = Lf \quad (2)$$

où A est la matrice d'entrée/sortie, $(I - A)$ est la matrice de Leontief, $L = (I - A)^{-1}$ est l'inverse de Leontief.

Etant donnée que A est non-négative, $M = I - A$ appartient à la classe des M -matrices, définies comme les matrices réelles carrées nonsingulières telles que $\forall i \neq j, m_{ij} \leq 0$ et $M^{-1} \geq 0$ (cf [Mey00, chap.7]). Les M -matrices jouent un rôle important en économie et en algèbre linéaire numérique. De nombreuses propriétés de ces matrices ont été établies :

- si M est une M -matrice, alors toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement positive. Réciproquement, toute matrice M telle que $\forall i \neq j, m_{ij} \leq 0$ ayant son spectre dans le demi-plan positif est une M -matrice.
- si M est une M -matrice, alors tous ses mineurs principaux sont positifs. Réciproquement, toute matrice $\forall i \neq j, m_{ij} \leq 0$ ayant ses mineurs principaux positifs est une M -matrice.

D'un point de vue formel il est important de vérifier que le rayon spectral $\rho(A)$ de A est tel que $\rho(A) < 1$, cf (cf [Mey00, chap.8]). Les valeurs propres de A ont une interprétation en économie car la racine de Frobenius $\rho(A)$ correspond à l'inverse du taux de croissance maximal dans la version dynamique du modèle de Leontief [Tak74, IV-D-e)].

Dans le cas où A est aléatoire et notée $A(\omega)$, le problème devient plus complexe que la simple résolution d'un système linéaire. On recherche la densité de probabilité de x , ou ses premiers moments, ou toute approximation de ces quantités. La présence d'aléatoire soulève une difficulté mathématique supplémentaire : pour certaines distributions de probabilités, il existe des valeurs de ω telles que $Id - A(\omega)$ n'est pas inversible. De ce fait, les moments de $x = (Id - A \circ U)^{-1}f$ ne seront pas définis. Il existe des résultats sur la probabilité qu'une matrice aléatoire de dimension finie soit singulière mais leur application dans ce cas n'est pas triviale.

Toutefois le fait que ces singularités existent formellement ne reflète pas la nature physiques des phénomènes étudiés : tant que la population est non nulle, x existe et est non-négatif. Pour les simulations on pourra par exemple travailler sur une variable aléatoire scalaire tronquée $X|a \leq X \leq b$ qui prend des valeurs dans un intervalle prédéfini. La loi de probabilité devient :

$$P(X \leq x | a \leq X \leq b) = \frac{P(a \leq X \leq x)}{P(a \leq X \leq b)} \quad (3)$$

où $x \in [a, b]$.

Des problèmes semblables sont rencontrés en Mécanique, où des systèmes linéaires avec opérateurs aléatoires doivent être résolus. Le problème de l'existence des solutions est souvent contourné : les solutions approchées sont recherchées dans des espaces où les solutions ont un second moment fini [Xiu10, 5.1.1]. De la même manière quand une approximation analytique sera recherchée ci-dessous (par exemple avec les méthodes spectrales, sec. 4.6), elle le sera dans un espace de fonctions dont les premiers moments sont finis.

2.1 Modèles avec unités physiques et bruit : l'exemple du modèle de Brandt

Les modèles input-output de type Leontief vus en sec.2 sont parfois exprimés en unités physiques (et pas monétaires) [MB09, 2.6.1], notamment pour intégrer les ressources énergétiques, et/ou les échanges avec l'environnement.

Ainsi les modèles rencontrés en Analyse du Cycle de Vie (ACV ou LCA, *life cycle assessment*) sont formulés en unités physiques. Le modèle de Brandt [Bra17] s'en rapproche, et modélise 4 grandeurs : l'énergie, la masse de matières premières, la masse de nourriture, le nombre d'heures de travail.

Soit A la matrice des coefficients techniques :

$$A = \begin{bmatrix} a \cdot 10^{-1} & 10 & 10 & 1 \\ a \cdot 10^{-3} & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} \\ a \cdot 10^{-3} & 10^{-4} & 10^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Cette matrice s'interprète comme suit : pour une unité produite, le premier secteur (énergie) nécessite $a \cdot 10^{-1}$ unités provenant du secteur de l'énergie, $a \cdot 10^{-3}$ unités provenant du secteur des matières premières, etc. . .

La production brute totale requise pour satisfaire une demande f est $s_1 = (I - A)^{-1} f = Lf$. (Brandt définit également un rapport qui quantifie la disponibilité de chaque produit pour un usage discretionnaire : $\forall i r_i = f_i/s_i$)

A est perturbée par un bruit multiplicatif terme à terme noté U : A devient $A \circ U$, où U est une matrice de même dimension que A constituée de variables aléatoires lognormale $LN(\mu, \sigma)$ indépendantes et identiquement distribuées, où \circ est le produit terme à terme, ou produit de Hadamard. Le bruit lognormal $\sigma \in [0, 2]$ est d'usage courant notamment en ACV.

Soit :

$$\vec{x} = (Id - A \circ U)^{-1} f \quad (5)$$

Les moments de \vec{x} ne sont pas définis car la matrice $(Id - A \circ U)$ peut devenir non-inversible. Comme expliqué ci-dessus, on travaillera sur la distribution tronquée $\vec{x}|\vec{a} \leq \vec{x} \leq \vec{b}$ où les inégalités sont vectorielles, ou encore sur la

variable aléatoire scalaire $x_i | \vec{a} \leq \vec{x} \leq \vec{b}$, la loi de la i -ème composante de \vec{x} . Cette construction sera utilisée en sec. 4.1 pour les simulations de Monte-Carlo.

Pour rappel la densité de la loi lognormale est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

Quand $m = 0.5$, $\sigma = 1$, on constate que le mode de la distribution se trouve en 1, avec une queue épaisse, comme illustré par la Fig. 1(a). Les histogrammes des composantes des solution $\vec{x} = (Id - A \circ U)^{-1} f$ sont représentés par la Fig. 1(b). On constate que les distributions obtenues ont une dispersion très importante, autour de la valeur nominale non bruitée représentée par une ligne rouge.

A l'aide de simulations de type Monte-Carlo, Brandt montre qu'une telle perturbation n'affecte pas qualitativement le phénomène observé, à savoir la baisse rapide de l'indice NER lorsque a augmente, i.e. le niveau de EROI décroît.

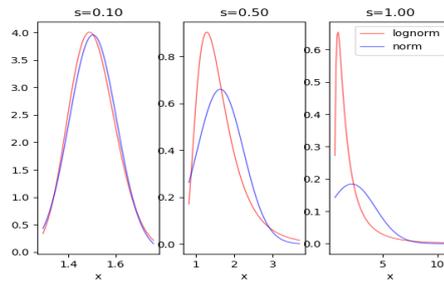
Dans la section 3 nous passons en revue, de manière non exhaustive, des travaux connexes intéressés par les fluctuations au sein d'un modèle Input-Output.

3 Travaux connexes

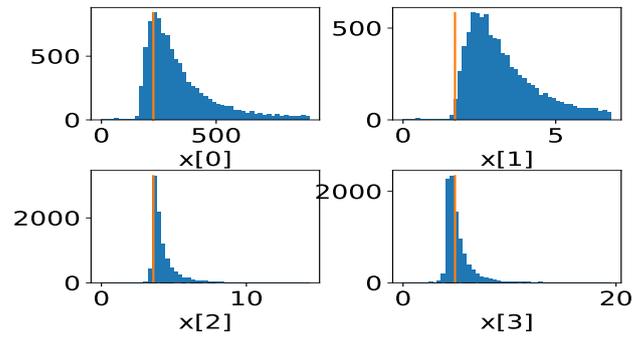
Le traitement des fluctuations en analyse input-output est ancien [MB09, 12.3] et a visé en premier lieu à garantir la robustesse du calcul numérique de L étant données des erreurs de mesure sur A . Les économistes ont voulu connaître quels coefficients a_{ij} avaient la plus grande influence (dans un sens à définir) sur L , afin de diriger les efforts de recueil de données de manière rationnelle. De ce point de vue ils ont mobilisé des résultats de calcul matriciel, de théorie des perturbations, de l'analyse de sensibilité qui permettent d'étudier la propagation d'erreur, lorsque les fluctuations sont faibles par rapport au point de fonctionnement. D'autres travaux dans un cadre probabiliste on décrit de manière aléatoire les fluctuations sur L quand A est perturbée par un bruit de loi connue [Qua59]. Des travaux autour de la conjecture de Brody se sont notamment intéressés aux propriétés spectrales d'une matrice aléatoire A sous des hypothèses simplificatrices (a_{ij} iid).

Les propriétés de A ont été analysées sous l'angle statistique, en considérant les a_{ij} comme des variable aléatoires dont on veut estimer les densités empirique. Dans [Raa05, chap. 14], le biais de plusieurs estimateurs de L est comparé, et la pertinence d'utiliser A pour estimer L est discutée.

D'un point de vue empirique, des travaux ont mesuré la variabilité de A pour plusieurs pays et se sont intéressés à la variabilité des a_{ij} . Ce type d'analyse est effectué dans [TGY19], pour les USA depuis les années 60, à un



(a)



(b)

FIGURE 1 – (a) pdf d’une variable aléatoire de loi lognormale, et d’une loi normale de mêmes premiers moments, paramètre de forme $\sigma = 1.0$; (b) histogramme des composantes des vecteurs solution $x = Lf$. La ligne rouge représente la valeur non bruitée.

niveau désagrégé (plus de 300 secteurs). D'autres travaux évaluent l'effet du niveau d'agrégation sur les plus grandes valeurs propres de A . Une étude détaillée des propriétés spectrales pour le problème des prix de production [MB09, 2.6] se trouve dans [MT16] pour différents pays et différents niveaux d'agrégation. Schefold prend l'exemple de l'Allemagne, Xu compare le cas de la Chine à d'autres pays.

Dans [TGY19] les auteurs observent dans le cas des USA une apparente stationarité de la distribution de probabilité empirique des a_{ij} au cours des décennies, et de plusieurs caractéristiques de la matrice A , en particulier $\max |\lambda_i(A)|$ qui reste proche de 0.5. De plus, plusieurs observations expérimentales contredisent l'hypothèse classique de coefficients a_{ij} indépendants et identiquement distribués (*iid*) :

- les valeurs moyennes empiriques ligne par ligne de la matrice A diffèrent.
- les termes diagonaux a_{ii} ont une distribution distincte des autres termes.

Un point de vue théorique est adopté pour l'étude de la question -ancienne en économie- des "business cycles". Des résultats théoriques à l'interface entre économie et physique statistique, dans le cas d'économies idéalisées, sont disponibles concernant la volatilité de la production agrégée en présence de fluctuations des productions au niveau désagrégé. [Gab11] calcule la variance de la distribution de la production agrégée en fonction de la variance au niveau des entreprises et montre le rôle de la distribution de la taille des entreprises. [ACOTS12] montre le rôle des effets de réseau. [BCSW92] place l'étude dans le cadre du phénomène de "self-organized criticality" (SOC). Dans [BLM17], les auteurs mettent en évidence différents régime de production en fonction des valeurs des paramètres du modèle, avec une matrice d'entrée-sortie aléatoire, en appliquant le *replica trick* à l'optimisation du problème d'équilibre général, dans un cadre asymptotique. Dans [MB19] les outils de la théorie des matrices aléatoires permettent d'analyser la stabilité d'un modèle d'équilibre général avec fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution), pour différentes topologies de réseau d'entrée-sortie aléatoire.

En sciences de l'ingénieur, des outils proches des précédents tels que la théorie des matrices aléatoires, sont utilisés pour traiter des problèmes proches, notamment le comportement des valeurs propres d'un système mécanique modélisé comme un système linéaire aléatoire, mais en dimension finie [Soi17].

Plus généralement, pour la quantification des incertitudes [Smi13], les techniques de l'approximation de fonctions aléatoires [GS03, Xiu10] permettent de calculer les moments d'une expression du même type que eq.(5), comme nous le montrerons en sec. 4.6.

Des applications de ces outils en économie ont été développées récemment,

notamment pour un modèle RBC (Real Business Cycle) [HMSW19]. Toutefois à notre connaissance il n'existe pas d'application dans le cas de modèles linéaires de type input-output ou LCA.

Une autre modélisation classique des problèmes input-output s'appuie sur le formalisme de l'optimisation et plus spécifiquement de la programmation linéaire [MB09, 10.4]. Cette formalisation permet par exemple d'effectuer des choix en minimisant des critères linéaires tels que la quantité d'émissions polluantes. La prise en compte des incertitudes dans les problèmes d'optimisation, dans un cadre probabiliste ou pas, est traité par le domaine de l'optimisation robuste [BTEGN09] qui a été appliqué aux problèmes input-output [WXWL14].

4 Approximations des moments et de la loi de probabilité des solutions

Dans cette section nous énumérons des approximations locales ou globales des premiers moments $E[x]$, $V[x]$ de $x = (Id - A \circ U)^{-1}f$ ou de la distribution des x_i .

4.1 Perturbation aléatoire : simulation MC

La méthode de Monte-Carlo représentée par Alg.1 repose sur le tirage aléatoire d'un échantillon de matrices L , et sur le calcul numérique de x .

Algorithm 1 Monte-Carlo (MC)

Require: $n > 0$, $n_{mc} > 0$

for $i = 0$ to n_{mc} **do**

$U = rand((n, n))$

$x = (I - A \circ U)^{-1}f$

end for

La loi de grands nombres pour la moyenne empirique garantit que celle-ci converge vers l'espérance. De plus, si la variance de la variable aléatoire échantillonnée est finie, l'erreur relative commise dépend de la variance de x et de $N^{-1/2}$, où N est le nombre d'échantillons. Si cette variance n'est pas finie, l'estimateur de la moyenne empirique sera entaché d'un biais important. Mais en pratique, du fait de la précision finie des calculs sur machine, les singularités ne sont pas rencontrées.

Les conséquences à attendre lors des expériences, pour des valeurs élevées du paramètre de forme σ sont :

- une queue épaisse pour la distribution des valeurs $x = (Id - A \circ U)^{-1}f$ échantillonnées.

- des fluctuations très importantes pour les estimateurs de la moyenne et de la variance empirique, car l'espérance et la variance ne sont pas définis.

Pour les simulations numériques, nous travaillerons sur une variable aléatoire tronquée comme expliqué en sec. 2.1 et supprimant toutes les valeurs négatives ou dépassant un seuil donné .

4.2 Estimation paramétrique

Il est possible de réaliser une estimation paramétrique d'une loi lognormale pour la variable aléatoires scalaires tronquée $x_i | \vec{a} \leq \vec{x} \leq \vec{b}$. Nous utiliserons la méthode du maximum de vraisemblance, et chercherons les paramètres m, σ à partir d'un ensemble d'échantillons tirés aléatoirement.

4.3 Perturbation déterministe

Examinons les résultats disponibles quand A est affectée par une perturbation. Les formules de Sherman–Morrison–Woodbury donnent un résultat exact pour les termes A_{ij}^{-1} d'une matrice, étant donnée une perturbation sur A , sans avoir à calculer l'inverse A^{-1} . Ces formules peuvent être appliquées à l'inverse de Leontief et permettent de calculer l'effet d'une perturbation en termes relatifs [MB09, A12.1.2].

Des résultats approchés sont fournis par la théorie de la perturbation [SS90, chap.2]. Au premier ordre, en remarquant que $M \rightarrow M^{-1}$ est une fonction différentiable, on a :

$$\tilde{M}^{-1} \approx M^{-1} - M^{-1}EM^{-1} \quad (7)$$

$$\tilde{x} \approx x - M^{-1}Ex \quad (8)$$

où $\tilde{A} = A + E$, et \tilde{x} solution de $\tilde{A}\tilde{x} = b$. Dans le cas où $M = I - A$, et où la perturbation est de la forme $A \rightarrow A + E$, on obtient $\tilde{x} \approx x + (I - A)^{-1}Ex$. Comme les termes de $(I - A)^{-1}$, et x sont positifs ou nuls (voir sec. 2 pour les propriétés des M -matrices), on en déduit si $E \geq 0$ alors la perturbation $(I - A)^{-1}Ex$ est positive ou nulle, et que donc $\forall i, \tilde{x}_i \geq x_i$.

En introduisant le conditionnement, des inégalités générales sont fournies en algèbre linéaire numérique [AK08, 5.3] : si x and $x + \delta x$ sont les solutions des systèmes $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$, alors

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (9)$$

Mais ce type d'inégalité est souvent trop pessimiste, car trop général. Dans le cas particulier des M -matrix, des inégalités plus précises sont disponibles, et permettent de borner l'effet de la perturbation.

Stewart a développé une théorie alternative basée sur l'approximation des normes (cf sec.A.2.2).

4.4 Formule de Taylor pour UQ

Les approximations locales eq.(8) permettent une approximation des premiers moments $E[x]$, $Var[x]$ en prenant simplement l'espérance et la variance du développement de Taylor. Pour une fonction $y = f(X)$, en négligeant les termes de covariance, on peut la résumer par :

$$Var[y] \approx \sum_i^n Var[x_i] \left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{X_0} \quad (10)$$

où $E[X] = X_0$. Cette formule peut être appliquée à la fonction $A \rightarrow A^{-1}b$ qui donne la solution du système linéaire.

D'après [HS11, eq.(6.21)] et [Hei10, eq.(13)] :

$$\frac{ds_k}{da_{ij}} = -(A^{-1})_{ki} s_j \quad (11)$$

$$var(g_k) = \sum_{i,j} (s_j \lambda_{ki})^2 var(a_{ij}) + \sum_j (s_j)^2 var(b_{kj}) \quad (12)$$

$$var(s_k) = \sum_{i,j} (s_j (A^{-1})_{ki})^2 var(a_{ij}) \quad (13)$$

si n est grand, une approximation par le théorème central limite est possible.

4.5 Série de Neumann

Le Développement en Série Entière (DSE) de $1/(1-x)$ dans l'intervalle réel $] -1, 1[$ peut être étendu aux matrices sous certaines conditions :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (14)$$

$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est nommée série de Neumann en algèbre linéaire [Mey00, 7.10.8]. Cette méthode d'approximation est dite globale, à l'inverse des méthodes reposant sur la formule de Taylor, qui sont locales, au voisinage d'un point.

Dans le domaine de l'analyse IO, cette méthode est d'usage courant. [MB09, 2.4]. La condition de convergence utilisée utilise la dominance diagonale : si $a_{ij} > 0$ et $\forall j, \sum_i a_{ij} < 1$, alors la série converge. Dans le domaine de l'ACV, ces conditions ne sont pas vérifiées. La condition suffisante employée utilise le rayon spectral :

$$\rho(A) = \max |\lambda_A| < 1 \quad (15)$$

où les λ sont les valeurs propres de A [Pet07]. La convergence dépend donc fortement du choix de A . Pour cette raison cette méthode n'est pas recommandée pour un usage général en ACV [HS11, 4.3].

Mais elle présente un intérêt dans le cas probabiliste : il suffit de remplacer A par $A \circ U$ pour se placer dans le cas du modèle de la sec. 2.1. En supposant que les conditions de convergence soient remplies, on peut utiliser l'expression eq.(14) pour calculer des moments.

Notons qu'en mécanique stochastique, les séries de Neumann sont également utilisées pour des systèmes du type $(L + E)x = b$, où L est déterministe [GS03, p.76]. De plus une méthode hybride mentionnée dans la littérature [GS03, p.8] est similaire à l'algorithme MC (Alg.1, vu en sec. 4.1), en remplaçant $(I - A \circ U)^{-1}$ par son DSE (14). De la même manière, cet algorithme permet de générer des échantillons et de calculer des moments empirique et un histogramme.

4.6 Méthodes spectrales, Galerkin

Dans cette section nous recherchons une approximation de x sous forme de polynôme, en utilisant les méthodes spectrales stochastiques¹ nommées en référence au type de convergence [Xiu10, p.34]. Les polynômes ont la forme suivante :

$$u^K(\omega) = \sum_{k=0}^K u_k \Psi_k(Q_1 \dots Q_p) \quad (16)$$

où u_k sont les coefficients dit de Fourier, $Q_1 \dots Q_p$ sont les paramètres aléatoires du polynôme, et $\Psi_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ les polynômes orthogonaux au sens du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(z)v(z)dz$. Les Ψ_k sont choisis en fonction du nombre de paramètres aléatoires et de leur loi de probabilité.

Plusieurs méthodes permettent de calculer les coefficients u_k . Certaines dites non-intrusives reposent sur l'existence d'un générateur aléatoire d'échantillons (quadrature, colocation). D'autres, intrusives, reposent sur le calcul à la main de la projection des équations du problème sur la base Ψ_k . Les deux approches seront comparées en 5.5, mais seul le calcul de la méthode intrusive de Galerkin stochastique sera détaillé ci-dessous [Xiu10, chap.6]. La méthode de Galerkin est ici préférée du fait des problèmes d'échantillonnage que nous rencontrons ici, et qui doivent être contournés avec un distribution tronquée. De plus elle est la plus adaptée quand le nombre de paramètres aléatoires est important [Xiu10, 7.4].

Pour trouver les u_k par la méthode de Galerkin, on projette le système $(Id - A \circ U)\vec{x} = f$ défini en sec. 2.1 sur la base des vecteurs Ψ_k . Cette application n'est pas la plus courante dans la littérature, qui s'intéresse surtout aux équations différentielles ordinaires (ODE) ou aux équations à dérivées partielle (PDE). Des résultats sont disponibles avec la méthode de Galerkin dans le cas d'un système linéaire [CGI09].

1. également nommées Polynomial Chaos Expansion (PCE).

Le vecteur solution est cherché sous la forme [Xiu10, p.68] :

$$\vec{x}^K = \left[\sum_{k=1}^K x_{1,k} \Psi_k(u_{11}, \dots, u_{nn}) \quad \dots \quad \sum_{k=1}^K x_{4,k} \Psi_k(u_{11}, \dots, u_{nn}) \right]^T \quad (17)$$

Pour simplifier la notation, on remplacera $\Psi_k(u_{11}, \dots, u_{nn})$ par Ψ_k dans la suite.

La première ligne du système $(Id - A \circ U)\vec{x} = f$ s'écrit ainsi :

$$(1 - a_{11}u_{11}) \sum_{k=1}^K x_{1,k} \Psi_k + a_{12}u_{12} \sum_{k=1}^K x_{2,k} \Psi_k + \dots = b_1 \quad (18)$$

En projetant sur le vecteur Ψ_1 on obtient :

$$\langle (1 - a_{11}u_{11}) \sum_{k=1}^K x_{1,k} \Psi_k + a_{12}u_{12} \sum_{k=1}^K x_{2,k} \Psi_k + \dots, \Psi_1 \rangle = \langle b_1, \Psi_1 \rangle \quad (19)$$

En effectuant ces étapes pour chaque ligne du système $(Id - A \circ U)\vec{x} = f$, on obtient le système de 4 équations à $4K$ inconnues.

$$\begin{bmatrix} \langle (1 - a_{11}u_{11})\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle (1 - a_{11}u_{11})\Psi_K, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{14}u_{14}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{14}u_{14}\Psi_K, \Psi_1 \rangle \\ \langle a_{21}u_{21}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{21}u_{21}\Psi_K, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{24}u_{24}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{24}u_{24}\Psi_K, \Psi_1 \rangle \\ \langle a_{31}u_{31}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{31}u_{31}\Psi_K, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{34}u_{34}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{34}u_{34}\Psi_K, \Psi_1 \rangle \\ \langle a_{41}u_{41}\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle a_{41}u_{41}\Psi_K, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle (1 - a_{44}u_{44})\Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle (1 - a_{44}u_{44})\Psi_K, \Psi_1 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1K} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2K} \\ x_{31} \\ \vdots \\ x_{3K} \\ x_{41} \\ \vdots \\ x_{4K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

On itérant ce calcul pour chacun des K vecteur de la base $\{\Psi_k\}$, on obtient alors un système linéaire à $4K$ équations et $4K$ inconnues. Notons que comme $\langle 1, \Psi_k(\dots) \rangle = 1$ pour $k = 0$ et 0 sinon, le terme de droite est nul sauf pour les 4 première lignes. On calcule l'inconnue $[x_{11} \dots x_{4K}]$ par résolution numérique. Puis on réinjecte dans eq.(17) pour obtenir \vec{x}^K , qui approxime \vec{x} .

On en déduit une expression analytique des deux premiers moments d'après les formules de la littérature [Xiu10, 5.3]. Pour estimer la pdf des composante de \vec{x}^K , il est nécessaire d'employer un méthode MC : on génère

un échantillon $u_{11} \dots u_{nn}$ qu'on injecte dans \vec{x}^K . La théorie donne de nombreux résultats sur la convergence de \vec{x}^K vers \vec{x} , qui est d'autant plus rapide que la fonction est régulière. Dans notre cas, on peut attendre des modifications très importantes de la solution en fonction de la valeur du paramètre aléatoire, et donc des performances faibles quand l'ordre de développement est réduit. Pour des raisons numériques, il pourra donc être utile de réduire le nombre de paramètres de bruit, comme expliqué en sec. 5.5.

5 Application numériques

Dans cette section nous appliquons les méthodes vues en sec. 4 au cas du modèle de la sec. 2.1. Des approximations des premiers moments et de la loi de probabilité des solutions du modèle sont recherchées.

Le code pour reproduire les résultats des simulations est disponible à l'adresse <https://gitlab.com/hazaa/input-output>

5.1 Perturbation aléatoire : formule de Taylor

Pour le modèle de bruit additif $A + E$ où $E = A \circ U$, U suit une loi lognormale $LN(\mu, \sigma)$. le développement de Taylor de la variance de $Var(x_i) = Var(e_i^T (I - (A + E))^{-1} f)$ selon les formules 10 et 13 donne les résultats en Fig. 2. On constate que l'approximation est satisfaisante pour $\sigma < 0.3$, mais qu'elle se dégrade rapidement après.

5.2 Perturbation aléatoire : simulation MC

Les propriétés théorique de l'estimateur de Monte-Carlo de la moyenne empirique ont été rappelées en sec.4.1. Pour le cas du modèle de la sec. 2.1, la Fig. 3 compare l'estimateur de la moyenne empirique et d'autres méthodes.

La Fig. 3(a) montre la valeur de l'estimateur de la moyenne de la variable aléatoire $x_0 = \langle e_0, \vec{x} \rangle$ avec et sans troncature, en fonction du nombre d'échantillons pris en compte. On constate des sauts très importants dans le cas sans troncature, liés au fait que l'estimateur a une variance infinie.

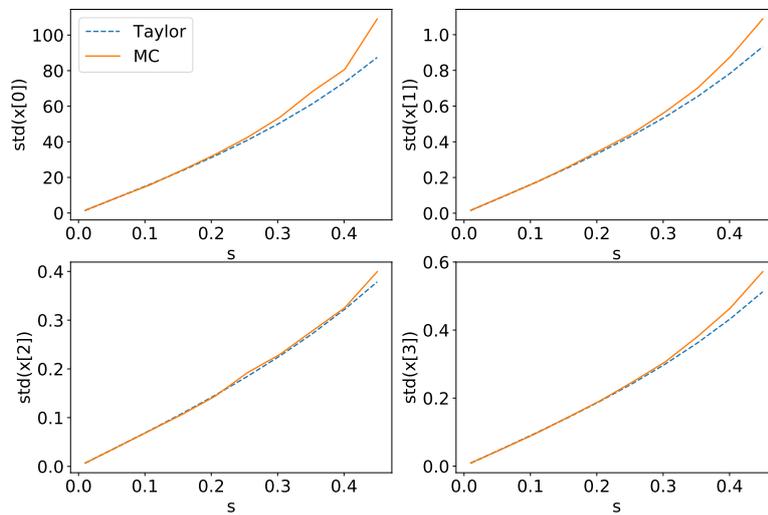
D'autres solutions telles que la réduction de variance ou d'échantillonnage d'importance (importance sampling, par exemple le defensive sampling) pourront être explorées dans la suite.

5.3 Estimation paramétrique

L'estimation paramétrique de la variable aléatoire tronquée permet de calculer l'espérance et la variance à partir des formules connues pour la loi lognormale de paramètres (m, σ) :

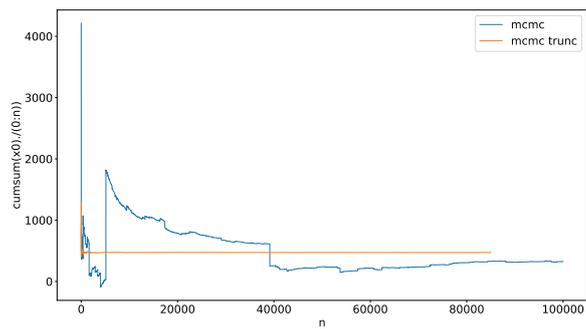
$$E(X) = \exp(m + 1/2\sigma^2) \quad (21)$$

$$Var(X) = \exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) \quad (22)$$

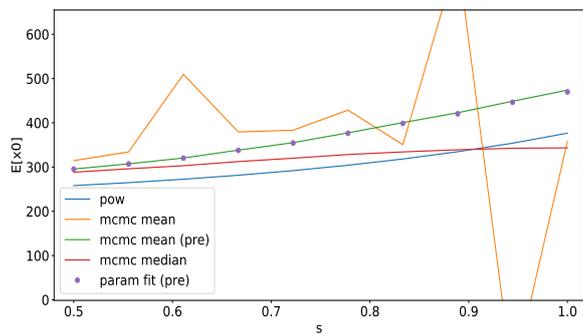


(a)

FIGURE 2 – Variance de la solution $Var(x_i)$, $x = (I - (A + E))^{-1}f$. Bruit $A + E$, $E = A \circ U$, U suit une loi lognormale $LN(\mu, \sigma)$ où $\mu = 0.5$ et $\sigma \in [0, 0.4]$



(a)



(b)

FIGURE 3 – Comparaison de plusieurs estimateurs de la moyenne. (a) Estimateur de la moyenne empirique en fonction du nombre d'échantillons avec et sans troncature, paramètre de forme $\sigma = 1.0$; (b) estimateur Mcmc, estimation paramétrique, développement en série entière, en fonction du paramètre de forme.

L'espérance ainsi calculée à partir des estimateurs du maximum de vraisemblance (m_{MLE}, σ_{MLE}), est comparée en Fig.3 aux autres estimateurs, notamment la moyenne empiriques de Monte-Carlo qui donne une résultat très proche.

5.4 Série de Neumann

Comme vu en 4.5, le Développement en série entière classique permet d'approximer analytiquement les premiers moments de $x_0 = \langle e_1, \vec{x} \rangle$. Il permet aussi d'estimer numériquement la pdf de la distribution.

Pour le cas du modèle de la sec. 2.1, l'expression des moments est :

$$E(\vec{x}) = E\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A \circ U)^k f\right) \quad (23)$$

$$Var(\vec{x}.e_i) = Var\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A \circ U)^k f.e_i\right) \quad (24)$$

On peut par exemple approximer l'espérance au second ordre :

$$E(\vec{x}) \approx f + E((A \circ U)f) + E((A \circ U)^2 f) \quad (25)$$

En projetant la première composante on obtient :

$$\begin{aligned} E(\vec{x}.e_1) &\approx f_1 + f_1(a_{11}^2 E(u_{11}^2) + a_{12}a_{21}E(u_{12}u_{21}) + a_{14}a_{41}E(u_{14}u_{41})) \\ &\quad + f_2(a_{11}a_{12}E(u_{11}u_{12}) + a_{12}a_{22}E(u_{12}u_{22}) + a_{42}a_{14}E(u_{42}u_{14})) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (26)$$

D'après les propriétés de la loi lognormale et les règles de calcul usuel on obtient :

$$\begin{aligned} E(u_i u_j) &= E(u_i)E(u_j) \\ &= \exp 2\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} E(u_i^2) &= Var(u_i) + E(u_i)^2 \\ &= \exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) + \exp 2\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

En remplaçant dans eq.(26) on peut donc en déduire une approximation des $E(\vec{x}.e_1)$. La Fig. 3(a) montre la valeur de l'estimateur de l'espérance de la variable aléatoire $\langle e_1, \vec{x} \rangle$ On constate que son évolution est proche des estimateurs obtenu par troncature et par estimation paramétrique.

A l'aide de la formule eq.(14), il est également possible comme on l'a expliqué en 4.5 d'obtenir un histogramme des composantes de \vec{x} sans inversion matricielle : pour chaque échantillon on effectue un tirage de U et on

en déduit x à l'aide de la série de Neumann. Cette méthode est standard en analyse input-output.

La Fig. 4(a) compare la distribution empirique de x_0 par plusieurs méthodes. L'échantillon obtenu par DSE à l'ordre 2 fournit une distribution qui approxime grossièrement l'échantillon original.

La Fig. 4(b) permet de constater que la méthode de Galerkin ne converge pas quand l'ordre augmente.

En revanche, on voit avec la Fig. 4(c) que par la méthode de la série de Neumann, la convergence est rapide.

5.5 Méthodes spectrales, Galerkin

Dans cette section les premiers moments sont approchés par la méthode de Galerkin stochastique et par la méthode de colocation.

Le modèle de bruit est simplifié, pour des raisons computationnelles. Au lieu de considérer la structure de bruit la plus générale sur $A \circ U$, qui introduit n^2 paramètres aléatoires, nous introduisons $p \in [1, 2, 3]$ paramètres de bruit. Pour les sélectionner, les méthodes de sensibilité globale reposant sur la variance (e.g. indices de Sobol) sont inadaptées. En effet, la variance n'est pas définie quand le paramètre de forme du bruit lognormal est trop élevé. La méthode de Morris [Smi13, 15.2] permet de sélectionner les paramètres ayant le plus d'influence sur x_i .

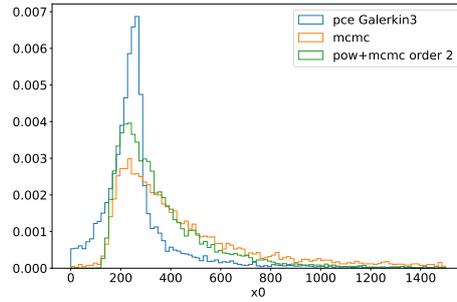
En Fig. 5(a) on compare l'estimateur de la moyenne obtenu par les méthodes de colocation et Galerkin lorsque le paramètre σ du bruit varie. La tendance est cohérente avec la simulation MC, mais les approximations se dégradent sur deux plages centrées sur $\sigma = 0.6$ et $\sigma = 0.85$. Ceci est confirmé par l'estimateur de la variance en Fig. 5(b). Ce phénomène est probablement de nature numérique et doit être sensible à l'ordre de l'approximation. Nous constatons en effet en Fig. 5(c) que l'approximation s'améliore quand l'ordre du polynôme augmente, en $\sigma = 0.6$ et $\sigma = 0.85$, mais semble atteindre une valeur limite pour $\sigma = 0.85$.

En Fig. 4(a) les histogrammes obtenus par simulation MC à partir du système initial et à partir de son approximation par la méthode de Galerkin pour $p = 3$, à l'ordre 3 sont représentés. L'allure des deux histogrammes est proche, mais l'approximation est entachée d'erreur, notamment au niveau de la queue.

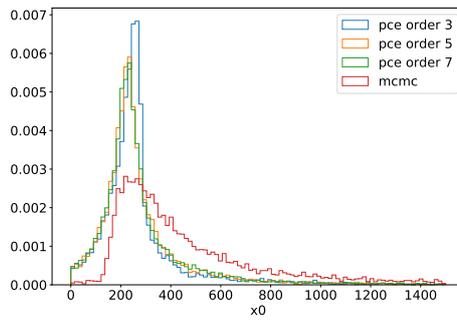
5.6 Discussion

Dans cette section 5 nous avons appliqué des méthodes définies d'un point de vue théorique en 4 qui permettent d'approximer les moments ou la distribution des solutions d'un système particulier défini en sec. 2.1.

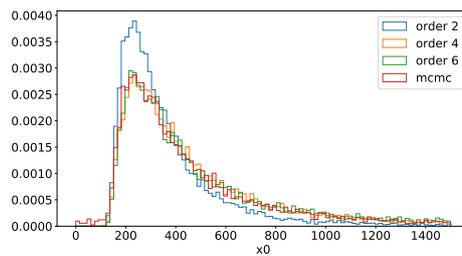
On constate avec cet exemple que pour l'approximation des moments :



(a)

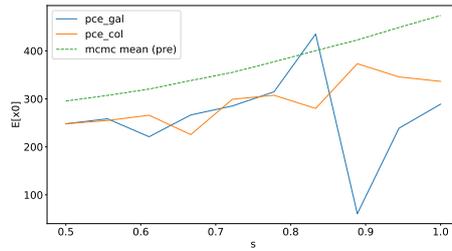


(b)

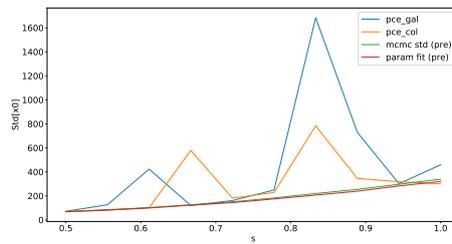


(c)

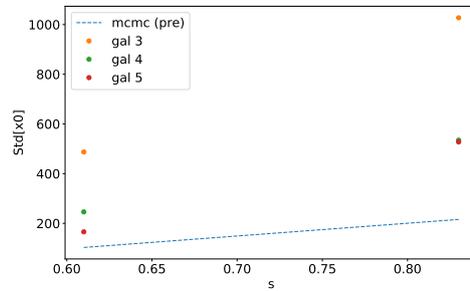
FIGURE 4 – Distribution de x_0 , paramètre de forme $\sigma = 1.0$. (a) comparaison de plusieurs estimateurs; (b) comparaison de plusieurs ordres de développement pour la méthode PCE Galerkin; (c) idem pour la série de Neumann.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5 – Comparaison de plusieurs estimateurs de la distribution et des moments de x_0 . (a) Estimateur de la moyenne, PCE colocation et Galerkin en fonction du paramètre de forme. (b) Estimateur de l'écart-type, PCE colocation et Galerkin. en fonction du paramètre de forme. (c) influence de l'ordre du développement pour PCE Galerkin.

- la méthode de MC est utilisable mais nécessite une troncature, car la distribution originale n’admet pas de moments.
- les méthodes locales divergent rapidement quand σ augmente.
- la méthode de Neumann, qui n’est pas recommandées en général en ACV (cf sec.4.5), est utilisable pour le cas particulier examiné ici, avec un bruit lognormal, en dimension 4×4 , et fournit une expression analytique des moments.
- les méthodes spectrales à base d’échantillon (colocation, quadrature) sont inutilisables car instables numériquement, du fait des fluctuations importantes des valeurs échantillonnées.
- la méthode spectrale de Galerkin est utilisable, et fournit une expression analytique de la solution en général et des moments en particulier. Elle nécessite une simplification du modèle de bruit, réalisée ici à l’aide du critère de Morris à partir d’échantillons aléatoires. Un bruit de dimension 3 a été retenu. Le développement polynomial a été réalisé aux ordres 3,5,7. Il présente des biais importants pour certaines valeurs du paramètre de bruit, pour des raisons numériques.

Pour approximer la distribution des solutions, seules des méthodes d’échantillonnage ont été discutées :

- la méthode de MC est utilisable sans troncature.
- la méthode de Neumann également et fournit une bonne approximation à un ordre faible.
- la méthode de Galerkin fournit une approximation grossière à un ordre faible.

6 Perspectives

6.1 Modèle linéaire

Plusieurs pistes de développement du modèle $(I - A \circ U)x = f$ sont citées ci-dessous. En premier lieu, une comparaison avec des données réelles devrait être conduite.

Par ailleurs, le bruit U est ici de type lognormal, ce qui traduit une hypothèse répandue par exemple dans la littérature LCA. Des comparaisons entre plusieurs types de bruit ont été réalisées. De plus, le choix d’un bruit multiplicatif indépendant sur chacune des composantes de $A \circ U$ pose des problèmes computationnels pour les approximations de type PCE. Ceci a été contourné en 5.5 en réduisant la dimension du modèle grâce à une analyse de sensibilité. Plus généralement, pour systématiser cette étape les méthodes classiques de sélection de modèle pourraient être mises à profit. Les dépendances entre composantes du bruit devraient être prises en compte. Une représentation du bruit non-paramétrique reposant sur la théorie des matrices aléatoires pourrait être employée.

Concernant l’approximation de la distribution de \vec{x} et de ses moments,

des techniques analytiques devraient être comparées. Des techniques d'approximation de fonction de rang faible se développent rapidement et sont employées dans la littérature aux même titre que le méthodes spectrales

Parallèlement, on a constaté que la solution \vec{x} connaît des variations brutales en fonction des valeurs des paramètres aléatoires. Or la convergence des approximations spectrales dépend de la régularité de la fonction. Pour contrer la présence de singularités, des algorithmes d'approximation locale multirésolution ont été développés en mécanique.

Pour concentrer l'approximation sur une partie seulement du domaine de définition de la fonction, des techniques de fenêtrage existent.

En plus des solutions \vec{x} , d'autres quantités pourraient être approximées, telles que les valeur propres de $A \circ U$. On a constaté expérimentalement une relation simple qui reste à expliquer entre les moments du bruit et les moments de $\max \Re(\lambda_i(A))$, obtenue par régression. De plus, des fonctions de \vec{x} telles que la *free fraction resource* introduit dans [Bra17] peuvent être approximées.

Finalement, l'extension à une dimension plus grande est importante mais pose des défis computationnels, et en termes de définition du bruit. En grande dimension, la structure de dépendance du bruit a été étudiée en mécanique, notamment sa discrétisation spatiale. Des approximation comme celle de Karhunen-Loève devront être considérées. Des algorithmes adaptatifs menant à des approximations parcimonieuses existent et pourront être mobilisés.

6.2 Autres modèles

D'autres modèles peuvent être envisagés pour rendre compte des fluctuations observées. En effet les modèles input-output classiques sont critiqués du fait de la fixité des coefficients de A , et de l'impossibilité de substituer un input à un autre. Des formalisations de type input-output reposant sur des modèles d'équilibre général sont par exemples analysée dans [MB09, 14.5] et pourraient servir de point de départ pour l'introduction de fluctuations.

7 Conclusion

Dans cet article nous avons comparé plusieurs techniques pour approximer la loi ou les moments des solutions d'un problème linéaire issu de l'analyse input-output en dimension faible avec bruit lognormal multiplicatif.

Nous avons montré qu'une approximation analytique correcte des moments de la distribution des solutions peut-être obtenue, pour un coût computationnel modeste.

De plus une comparaison de plusieurs méthodes d'approximation numérique par échantillonnage de la distribution a été réalisée.

A notre connaissance il n'existe à ce jour d'application des méthodes spectrales d'approximation polynomiales pour des modèles linéaires bruités issus de l'analyse input-output. De même le calcul du premier moment grâce à la série de Neumann, ainsi que sa comparaison avec autres méthodes classiques.

Nous remarquons un problème qui n'est pas fréquemment évoqué dans la littérature, à savoir la divergence de l'estimateur MC de l'espérance pour ce type de bruit.

De nombreuses améliorations sont envisagées pour la suite de ce travail, ainsi qu'une application en grande dimension.

Références

- [ACOTS12] Daron Acemoglu, Carvalho, Ozdaglar, and Tahbaz-Salehi. The Network Origins of Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, 80(5) :1977–2016, 2012.
- [AK08] Grégoire Allaire and Sidi Mahmoud Kaber. *Numerical linear algebra*. Number 55 in Texts in applied mathematics. Springer, New York, NY, 2008. OCLC : ocn144521676.
- [BCSW92] Peter Bak, Kan Chen, Jose Scheinkman, and Michael Woodford. Aggregate Fluctuations from Independent Sectoral Shocks : Self-Organized Criticality in a Model of Production and Inventory Dynamics. Technical Report w4241, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, December 1992.
- [BLM17] Marco Bardoscia, Giacomo Livan, and Matteo Marsili. Statistical mechanics of complex economies. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2017(4) :043401, April 2017.
- [Bra17] Adam R. Brandt. How Does Energy Resource Depletion Affect Prosperity? Mathematics of a Minimum Energy Return on Investment (EROI). *BioPhysical Economics and Resource Quality*, 2(1), March 2017.
- [BTEGN09] A. Ben-Tal, Laurent El Ghaoui, and A. S. Nemirovskiï. *Robust optimization*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, Princeton, 2009. OCLC : ocn318672208.
- [CGI09] Paul G. Constantine, David F. Gleich, and Gianluca Iaccarino. Spectral Methods for Parameterized Matrix Equations. *arXiv e-prints*, page arXiv :0904.2040, April 2009.
- [Gab11] Xavier Gabaix. The Granular Origins of Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, 79(3) :733–772, 2011.

- [GS03] Roger Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Dover Publications, Minneola, N.Y, rev. ed edition, 2003.
- [Hei10] Reinout Heijungs. Sensitivity coefficients for matrix-based LCA. *The International Journal of Life Cycle Assessment*, 15(5) :511–520, June 2010.
- [HMSW19] Daniel Harenberg, Stefano Marelli, Bruno Sudret, and Viktor Winschel. Uncertainty quantification and global sensitivity analysis for economic models. *Quantitative Economics*, 10(1) :1–41, 2019.
- [HS11] Reinout Heijungs and Sangwon Suh. *The computational structure of life cycle assessment*. Springer, Dordrecht ; London, 2011. OCLC : 751543198.
- [MB09] Ronald E. Miller and Peter D. Blair. *Input-output analysis : foundations and extensions*. Cambridge University Press, Cambridge [England] ; New York, 2nd ed edition, 2009. OCLC : ocn311310287.
- [MB19] José Moran and Jean-Philippe Bouchaud. Will a Large Economy Be Stable? *arXiv e-prints*, page arXiv :1901.09629, January 2019.
- [Mey00] C. D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000.
- [MT16] Theodore Mariolis and Lefteris Tsoulfidis. *Modern classical economics and reality : a spectral analysis of the theory of value and distribution*. Number volume 2 in Evolutionary economics and social complexity. Springer, Tokyo, 2016. OCLC : ocn908374619.
- [Pet07] Glen P. Peters. Efficient algorithms for Life Cycle Assessment, Input-Output Analysis, and Monte-Carlo Analysis. *The International Journal of Life Cycle Assessment*, 12(6) :373–380, September 2007.
- [Qua59] Richard E. Quandt. On the solution of probabilistic leontief systems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6(4) :295–305, December 1959.
- [Raa05] Thijs ten Raa. *The economics of input-output analysis*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2005.
- [Smi13] Ralph C. Smith. *Uncertainty quantification : theory, implementation, and applications*. Computational science and engineering series. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2013.

- [Soi17] Christian Soize. Random Matrix Models and Nonparametric Method for Uncertainty Quantification. In Roger Ghanem, David Higdon, and Houman Owhadi, editors, *Handbook of Uncertainty Quantification*, pages 219–287. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [SS90] G. W. Stewart and Ji-guang Sun. *Matrix perturbation theory*. Computer science and scientific computing. Academic Press, Boston, 1990.
- [Tak74] Akira Takayama. *Mathematical economics*. Dryden Press, Hinsdale, Ill, 1974.
- [TGY19] Luis Daniel Torres-González and Jangho Yang. The persistent statistical structure of the US input–output coefficient matrices : 1963–2007. *Economic Systems Research*, pages 1–24, January 2019.
- [WL36] Wassily W. Leontief. Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States. *The Review of Economic Statistics*, 18 :105–125, 1936.
- [WXWL14] ShouWen Wen, FangFang Xu, ZaiWen Wen, and Chen Lin. Robust linear optimization under matrix completion. *Science China Mathematics*, 57(4) :699–710, April 2014.
- [Xiu10] Dongbin Xiu. *Numerical methods for stochastic computations : a spectral method approach*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2010. OCLC : ocn466341417.

A Appendix

A.1 Valeurs propres de A et $(I - A)$

A.1.1 Effet de a sur les valeurs propres de A

Les conditions de Hawkins-Simon portent sur les coefficients de L et assurent que $f \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. L’une de leur formulations, rappelée dans Blair Miller p.61, dispose que tous les mineurs principaux de $I - A$ soient strictement positifs.

La Fig.6(a) représente les mineurs principaux en fonction de a . On constate que la condition est violée pour une valeur a_* de a proche de 8.5. Dans la suite, nous nous placerons donc sur $a \in [0, a_*]$

Méthode analytique : dans notre cas, les valeurs propres sont les racines d’un polynôme de degré 4. Ce sont des fonctions non-polynomiales des paramètres aléatoires. On peut obtenir leur expression exacte par calcul ou à l’aide d’un solveur, mais celle-ci est difficile à exploiter.

La théorie des matrices aléatoires fournit de très nombreux résultats asymptotiques (comme rappelé en introduction) en particulier sur les valeurs

propres, mais pour des ensembles de matrices aléatoires particuliers qui ne correspondent pas à notre besoin.

Il est possible d'expliquer le déplacement des valeurs propres par analyse de perturbation. Ces résultats ne sont valables que pour un bruit faible, ce qui ne sera pas toujours le cas ici.

Les moments et la distribution de probabilité de la plus grande valeur propre d'une matrice aléatoire peut être approximée par plusieurs techniques d'échantillonnage. Comme noté en introduction, leur convergence est lente en comparaison d'autres méthodes.

Les méthodes spectrales ont été appliquées au *random eigenvalue problem* notamment en mécanique stochastique de manière directe, en utilisant les valeurs propres approchées numériquement, fournies par un algorithme classique d'algèbre linéaire numérique. Leur convergence est rapide en comparaison des méthodes par échantillonnage.

Application : effet de a sur $sp(A)$ $I - A$ a quatre valeurs propres. Deux sont situées sur le demi-axe réel positif, et deux sont complexes conjuguées dans le demi-plan $x > 0$.

En absence de bruit, le lieu géométrique des 4 valeurs propres de $I - A$ varie avec a comme indiqué sur la Fig.6(b)

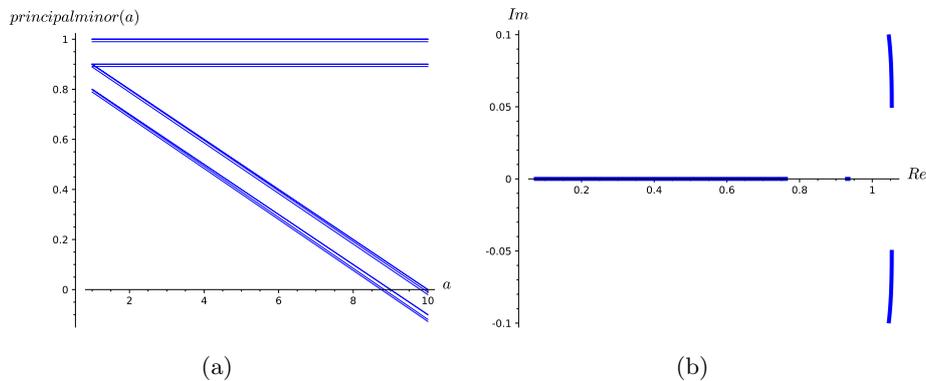


FIGURE 6 – (a) Mineurs principaux de $I - A$; (b) Variation des $\lambda_i \in \mathbb{C}$ avec $a \in [1, 8]$.

Seule une des 4 valeurs propres λ_i , la plus faible en module, a une variation importante (par rapport à $\max_i(|\lambda_i|)$) quand a varie sur $[1, 8]$, les autres valeurs propres variant faiblement. (Une conséquence de la diminution de la valeur propre la plus faible est que le conditionnement de la matrice $I - A$ augmente, ce qui conduit à une amplification du bruit numérique).

Application : effet du bruit sur $sp(A)$ Comme on l'a vu plus haut, le max des partie réelle des valeurs propres de A détermine la positivité de la

solution x . Or, du fait du bruit, ce max dépasse parfois 1.

Lorsque le paramètre σ qui influe sur la variance du bruit lognormal $LN(m, \sigma)$ augmente, on constate que le max des partie réelle des valeurs propres de A augmente.

A l'aide de simulations Monte-Carlo, on mesure taux de dépassement τ i.e. le pourcentages d'expériences telles que $\max(\Re(\lambda(A))) > 1$, en faisant varier σ et a . Les résultats sont résumés par le Tab. 1, et montrent une augmentation de τ en fonction de a à σ constant.

Si on souhaite limiter à 5% le nombre de simulations, alors pour $a = 1$ le paramètre de bruit σ ne doit pas dépasser un seuil proche de 1.0. Pour $a = 3$ le paramètre de bruit σ ne doit pas dépasser un seuil proche de 0.5.

σ	τ %	
	a=1	a=3
0.5	0	4.5
1.0	4.8	31
1.2	9.6	40

TABLE 1 – Taux de dépassement τ , Monte-Carlo, $n = 10000$.

La Fig.7 montre qu'il existe une relation simple entre les premiers moments de $\max(\Re(\lambda(A)))$ et les premiers moments de la loi du bruit $LN(m, \sigma)$. Une explication théorique simple semble possible.

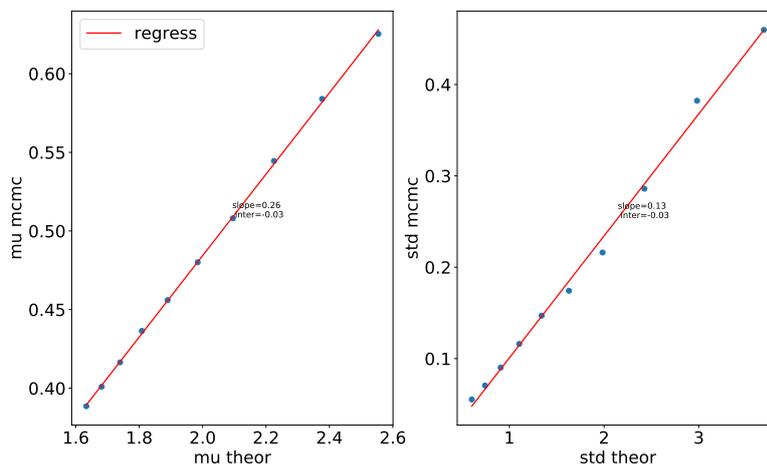


FIGURE 7 – Régression des premiers moments de $\max(\Re(\lambda(A)))$ par rapport aux premiers moments de $LN(m, \sigma)$, simulation Monte-Carlo, $n = 10000$.

A.2 Autres méthodes pour la distribution des solutions

A.2.1 Perturbation déterministe

L'augmentation de a dans le modèle de Brandt peut être modélisé par la perturbation $E = [eA_{*,1} \mid \mathbf{0}_{4 \times 3}]$, qui extrait la première colonne de A en la multipliant par le facteur scalaire e . La Fig.8 permet de comparer la première composante du vecteur solution, pour différentes valeurs de e . On constate que la solution exacte et la solution approchée obtenue avec la formule eq. (8) sont proches. Le même constat est fait pour les autres composantes. On constate également que l'effet de la perturbation positive est positif, ce qui était attendu par l'analyse de perturbation.

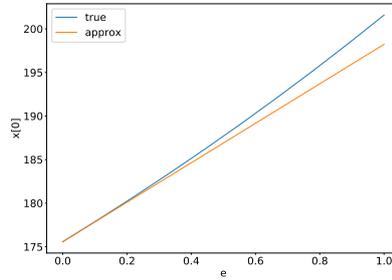


FIGURE 8 – Effet de la perturbation E , solution exacte et approchée.

A.2.2 Perturbation aléatoire : formule de Stewart

Stewart a développé une théorie alternative basée sur l'approximation des normes. Toutefois celle-ci se limite à des perturbations appartenant à la classe des matrices *cross-correlated* $E = S_c H S_r^T$ où H est composée de variables aléatoires décorréelées d'espérance nulle et de variance unité, et où S_c et S_r sont semi-définies positives et permettent de fixer l'échelle des lignes et des colonnes. Une norme stochastique $\|\cdot\|_S = \sqrt{\mathbf{E}(\|\cdot\|_F^2)}$ est introduite. On a :

$$\|\tilde{x} - x\|_S = \|A^\dagger S_c\|_F \|S_r x\| \quad (29)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne pour les vecteurs, A^\dagger est la pseudo-inverse de A , \tilde{x} est l'approximation au premier ordre en E de la solution du problème perturbé $(A + E)x = b$.

Afin d'évaluer la précision de l'approximation numérique fournie pour $\|\tilde{x} - x\|_S$ en eq.(29), nous réalisons ici des expériences numériques avec un bruit additif $A + E$ où E est du type défini par Stewart (matrices *cross-correlated*).

Nous calculons les côtés gauche et droit de l'expression $\|\check{x} - x\|_S$ dans l'éq.(29), approximé par $\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\|\check{x} - x\|_F^2)}$ par tirage aléatoire de $N = 1000$ échantillons de $E = S_c H S_r^T$. Les éléments de H suivent une loi normale centrée réduite et sont indépendants. S_c et S_r sont calculés en réalisant une factorisation NNMF (non-negative matrix factorization) de faible rang de la forme $A \approx uv^T$ où u, v sont deux vecteurs. Un paramètre σ est ajouté pour contrôler l'amplitude du bruit, de sorte que $S_c = \sqrt{\sigma} \text{diag}(u)$ et $S_r = \sqrt{\sigma} \text{diag}(v)$. La Fig.9 résume la comparaison des deux approximations de la norme stochastique. Nous constatons que pour des valeurs de a comprises entre 1 et 5, l'approximation analytique est correcte, de même pour des valeurs de σ inférieures à 5.10^{-4} .

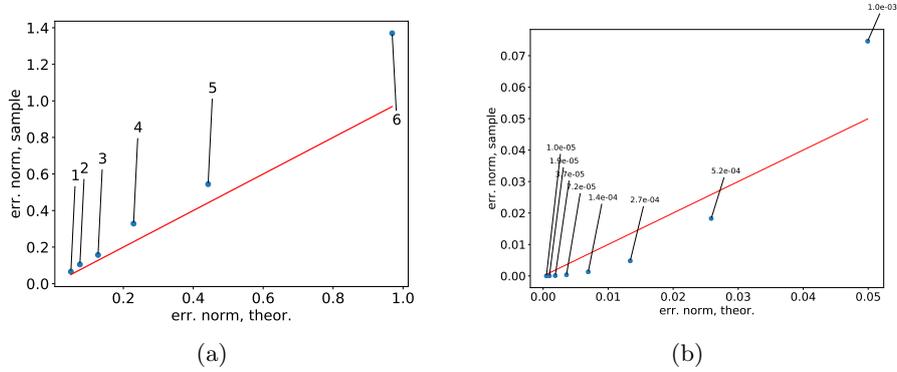


FIGURE 9 – Erreur théorique $\|A^\dagger S_c\|_F \|S_r x\|$ et empirique $\|\check{x} - x\|_S$ (a) paramétrée par $a \in [1, 8]$; (b) paramétrée par $\sigma \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. La ligne rouge représente la courbe $x = y$

Pour conclure, nous remarquons que les approximations analytiques disponibles sont intéressantes pour des valeurs faibles du bruit, qui ne correspondent pas néanmoins au scénario proposé par Brandt, ni aux ordres de grandeurs des fluctuations relevées par Torres. Pour ceux-ci, seules les simulations de type Monte-Carlo sont adaptées, mais ne fournissent pas d'approximation analytique.

Ce constat est à rapprocher de celui fait par Heijungs au sujet de l'application de la méthode de Stewart pour l'Analyse du Cycle de Vie (LCA). Ce problème est très proche mathématiquement de l'analyse Input-Output, toutefois des termes d'unités distinctes et d'ordre de grandeurs très différents composent la matrice de technologie, et sont entachés d'incertitudes importantes. De ce fait, la théorie de Stewart ne peut pas être appliquée avec profit pour la LCA ("Although this is an interesting result, its practical use for LCA is limited. The reason is that the elements of s are very different in order of magnitude. Hence, an approximate expression for the norm of δs is less useful than one might be inclined to think." [HS11, p.145].

