HAL open science

Caractérisations des réduites et des réduites secondaires dans un développement en fraction continue

Christophe Leuridan

To cite this version:

Christophe Leuridan. Caractérisations des réduites et des réduites secondaires dans un développement en fraction continue. 2019. hal-02272389v1

HAL Id: hal-02272389

https://hal.science/hal-02272389v1

Preprint submitted on 27 Aug 2019 (v1), last revised 21 Aug 2020 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Caractérisations des réduites et des réduites secondaires dans un développement en fraction continue

Christophe Leuridan

Résumé

Après avoir rappelé les principales définitions de la théorie du développement en fraction continue, nous donnons ensuite une caractérisation géométrique des réduites et des réduites secondaires d'un irrationnel donné. Nous donnons ensuite un critère simple pour déterminer si une fraction est ou non une réduite ou une réduite secondaire du développement en fraction continue d'un réel donné. Nous utilisons ce critère pour donner des preuves plus simples de résultats déjà connus (critères de meilleure approximation, théorème des trois longueurs).

MSC Classification : 11A55,11J70.
Mots-clés : approximation diophantienne, fractions continues, arbre de Stern-Brocot, meilleures approximations, théorème des trois longueurs.

Le développement d'un réel en fraction continue fournit de « bonnes »approximations rationnelles : les réduites et les réduites secondaires. Nous en donnons ici plusieurs caractérisations :

— une interprétation géométrique ;
— une caractérisation à l'aide d'inégalités ;
— une caractérisation des réduites en termes de meilleures approximations ;
— une caractérisation en lien avec le théorème des trois longueurs.

Bien que la caractérisation à l'aide d'inégalités que nous donnons repose sur des résultats bien connus, sa formulation semble nouvelle et permet de donner des preuves plus simples des critères de meilleure approximation et du théorème des trois longueurs.

1 Rappels sur les fractions continues

Cette partie vise à rappeler les principales définitions, notations et formules utiles pour la suite. Les calculs et les démonstrations sont esquissées. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter par exemple le livre de Duverney [2].

1.1 Fractions continues finies

Lorsque a_0 est un nombre réel et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs, nous notons

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Une telle écriture est une *fraction continue finie*.

Définissons les réels $(p_k)_{-2 \leqslant k \leqslant n}$ et $(q_k)_{-2 \leqslant k \leqslant n}$ par $p_{-2} = 0$, $q_{-2} = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Une récurrence montre que pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ et $x \in]0, +\infty[$,

$$[a_0; \dots, a_{k-1}, x] = \frac{x p_{k-1} + p_{k-2}}{x q_{k-1} + q_{k-2}}$$

et $p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1} = (-1)^k$. En particulier, l'application $x \mapsto [a_0; \dots, a_{k-1}, x]$ est continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$ (croissante si k est pair, décroissante si k est impair). On en déduit les formules utiles pour la suite

$$[a_0; \dots, a_{n-1}, 1] = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad [a_0; \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

$$[a_0; \dots, a_{n-1}, a_n + 1] = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

$$\lim_{x \to +\infty} [a_0; \dots, a_{n-1}, x] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; \dots, a_{n-1}].$$

Dans les fractions continues que nous utilisons ici, les réels $a_0, \dots, a_n$ sont des entiers, et alors q_n un entier strictement positif, p_n est un entier relatif premier avec q_n puisque $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$, si bien que p_n / q_n est l'écriture sous forme irréductible du nombre rationnel $[a_0; \dots, a_n]$.

Inversement, tout rationnel p/q possède exactement deux telles écritures, une sous la forme $[a_0, \dots, a_n]$ avec $a_n \geqslant 2$ si $n \geqslant 1$, l'autre sous la forme $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$. La première, appelée *développement standard* du rationnel p/q est obtenue en appliquant l'algorithme d'Euclide à p et q. En effet, l'algorithme d'Euclide consiste en une succession de divisions euclidiennes en partant de $r_{-2} = p$ et $r_{-1} = q$, jusqu'à obtenir un reste nul :

$$\begin{aligned}
r_{-2} &= r_{-1} a_0 + r_0, \\
r_{-1} &= r_0 a_1 + r_1, \\
\dots &= \dots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} a_{n-1} + r_{n-1}, \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_n + r_n.
\end{aligned}$$

Les restes successifs vérifient $r_{-1} > r_0 > r_1 > \ldots > r_{n-1} > r_n = 0$. Le dernier reste non nul r_{n-1} est le PGCD de $r_{-2} = p$ et $r_{-1} = q$, qui vaut 1 si la fraction p/q est irréductible. Les égalités

$$\frac{r_{-2}}{r_{-1}} = a_0 + \frac{r_0}{r_{-1}}, \quad \frac{r_{-1}}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \ldots, \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}, \quad \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$$

montrent que

$$\frac{p}{q} = \frac{r_{-2}}{r_{-1}} = [a_0, \ldots, a_n].$$

De plus, si $n \geqslant 1$ alors $r_{n-2} > r_{n-1}$, d'où $a_n \geqslant 2$.

1.2 Fractions continues infinies

Soient maintenant a_0 un entier relatif et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers strictement positifs. Définissons les suites d'entiers $(p_n)_{n\geqslant -2}$ et $(q_n)_{n\geqslant -2}$ par les mêmes formules que précédemment.

Avec l'égalité $q_{-1} = 0$ et la relation de récurrence $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, on montre que la suite d'entiers $(q_n)_{n\geqslant 0}$ strictement positifs est croissante, et même strictement croissante à partir du rang 2. En particulier, elle tend vers $+\infty$. Mais pour tout $n \geqslant 0$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$, donc

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

Comme la suite $(1/(q_n q_{n+1}))_{n\geqslant 0}$ décroît et tend vers 0, le théorème des séries alternées s'applique.

On en déduit la convergence de la suite $(p_n/q_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel λ, ce qui permet de définir la fraction continue infinie $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ par

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] := \lim_{n\to+\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

De plus,

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \lambda < \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

En particulier, le signe de la différence $\lambda - p_n/q_n$ est donné par $(-1)^n$ et

$$\frac{a_{n+2}}{q_n q_{n+2}} = \left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

car $p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n = (p_n + a_{n+2}p_{n+1})q_n - (q_n + a_{n+2}q_{n+1})p_n = (-1)^n a_{n+2}$. Comme

$$\frac{1}{q_{n+2}} \leqslant \frac{a_{n+2}}{q_{n+2}} < |q_n\lambda - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}},$$

la suite $(|q_n\lambda - p_n|)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante et tend vers 0. Notons aussi que λ est irrationnel puisque 0 est un point d'accumulation du groupe $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$.

Inversement, tout nombre irrationnel θ possède un unique développement sous forme de fraction continue infinie. Ce développement est fourni par une

variante de l'algorithme d'Euclide, appelée anthyphérèse, où l'on pose successivement

$$\theta_0 = \theta, \quad a_0 := \lfloor \theta_0 \rfloor, \quad \theta_1 := \frac{1}{\theta_0 - a_0}, \quad a_1 := \lfloor \theta_1 \rfloor, \quad \theta_2 := \frac{1}{\theta_1 - a_1}, ...$$

Montrons que la suite d'entiers $(a_n)_{n \geqslant 0}$ ainsi construite convient effectivement, c'est-à-dire que la limite $\lambda = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ est égale à θ.

On vérifie par récurrence que θ_n est bien défini et irrationnel. Ensuite, comme

$$\theta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad \theta_1 = a_1 + \frac{1}{a_2}, \ldots,$$

on a donc pour tout $n \geqslant 0$,

$$\theta = \theta_0 = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \theta_n].$$

Mais, avec les notations précédentes, on a aussi

$$p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n].$$

Comme $\theta_n > a_n$, on en déduit que $\theta > p_n/q_n$ si n est pair, $\theta < p_n/q_n$ si n est impair. Par passage à la limite on obtient $\theta \geqslant \lambda$ et $\theta \leqslant \lambda$, d'où l'égalité voulue.

Définition 1 *Soit θ un nombre irrationnel et $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue. On appelle*

— *quotients partiels (de θ) les entiers $a_1, a_2, \ldots$,*

— *(fractions) réduites (de θ) les nombres rationnels*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \cdots, a_n], \text{ pour } n \geqslant 0$$

— *réduites secondaires (de θ) les nombres rationnels*

$$\frac{bp_{n-1} + p_{n-2}}{bq_{n-1} + q_{n-2}} = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, b], \text{ pour } n \geqslant 1 \text{ et } b \in [\![1, a_n - 1]\!].$$

La relation $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$ montre que toutes ces fractions sont écrites sous forme irréductible.

Remarque 1 *Si θ est rationnel, on définit de la même façon les quotients partiels, les réduites et les réduites secondaires à partir de son développement standard $\theta = [a_0; a_1, \ldots, a_N]$ (c'est-à-dire $a_N \geqslant 2$ si $N \geqslant 1$).*

2 Interprétation géométrique des réduites et des réduites secondaires

Fixons maintenant un nombre irrationnel θ et notons $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue. Définissons les suites $(\theta_n)_{n \geqslant -0}$, $(p_n)_{n \geqslant -2}$ et

$(q_n)_{n\geqslant -2}$ comme précédemment. Pour tout $n \geqslant -2$, notons $V_n = (q_n, p_n)$. Autrement dit, $V_{-2} = (1,0)$, $V_{-1} = (0,1)$ et pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = a_n V_{n-1} + V_{n-2}$.

Soit L la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $L(x,y) = \theta x - y$. Pour tout $n \geqslant -2$, notons $\ell_n = (-1)^n L(V_n) = (-1)^n (q_n\theta - p_n)$. Alors $\ell_n > 0$ dès que $n \geqslant -1$, $\ell_{-2} = \theta$, $\ell_{-1} = 1$, $\ell_0 = \theta - \lfloor \theta \rfloor$, et pour tout $n \geqslant 0$, $\ell_n = \ell_{n-2} - a_n \ell_{n-1}$.

Une récurrence montre que pour tout $n \geqslant 0$, $\theta_n = \ell_{n-2}/\ell_{n-1}$, d'où

$$\begin{aligned} a_n = \lfloor \ell_{n-2}/\ell_{n-1} \rfloor &= \max\{b \in \mathbb{Z} : b\ell_{n-1} \leqslant \ell_{n-2}\} \\ &= \max\{b \in \mathbb{Z} : (\ell_{n-2} - b\ell_{n-1})/\ell_{n-2} \geqslant 0\} \\ &= \max\{b \in \mathbb{Z} : L(V_{n-2} + bV_{n-1})/L(V_{n-2}) \geqslant 0\} \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'interprétation géométrique suivante : a_n est le plus grand entier relatif tel que les vecteurs V_{n-2} et $a_n V_{n-1} + V_{n-2}$ appartiennent au même demi-plan fermé delimité par la droite d'équation $y = \theta x$.

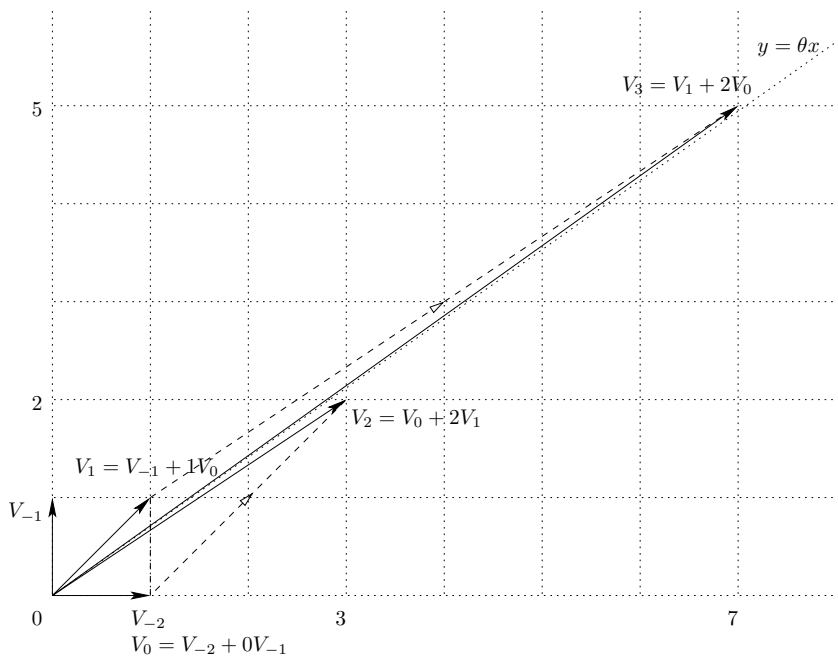

FIGURE 1 – Premières réduites et réduites secondaires lorsque $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 2$. Les flèches noires indiquent les réduites, les flèches blanches indiquent les réduites secondaires.

Venons-en à l'interprétation des réduites et des réduites secondaires.

Théorème 1 *Notons C_- et C_+ l'enveloppe convexe de*

$$E_- = \{(q,p) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} : p < q\theta\} \text{ et } E_+ = \{(q,p) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} : p > q\theta\}.$$

Posons $V'_{-2} = (0,-1)$. Soient f_- et f_+ les fonctions continues et affines par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ dont les graphes sont les lignes polygonales infinies $V'_{-2}V_0V_2V_4\ldots$ et $V_{-1}V_1V_3V_5\ldots$. Alors

1. *f_- est concave et f_+ est convexe ;*
2. *$C_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : y \leqslant f_-(x)\}$ est l'hypographe de f_- et $C_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : y \geqslant f_+(x)\}$ est l'épigraphe de f_+ ;*
3. *Les points extrémaux de C_- sont $V'_{-2}, V_0, V_2, V_4\ldots$, sauf éventuellement V_0, et les points extrémaux de C_+ sont $V_{-1}, V_1, V_3, V_5\ldots$;*
4. *Exceptés V'_{-2} et V_{-1}, les points entiers sur l'union des graphes de f_- et f_+ sont exactement les couples (q,p) tels que p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ.*

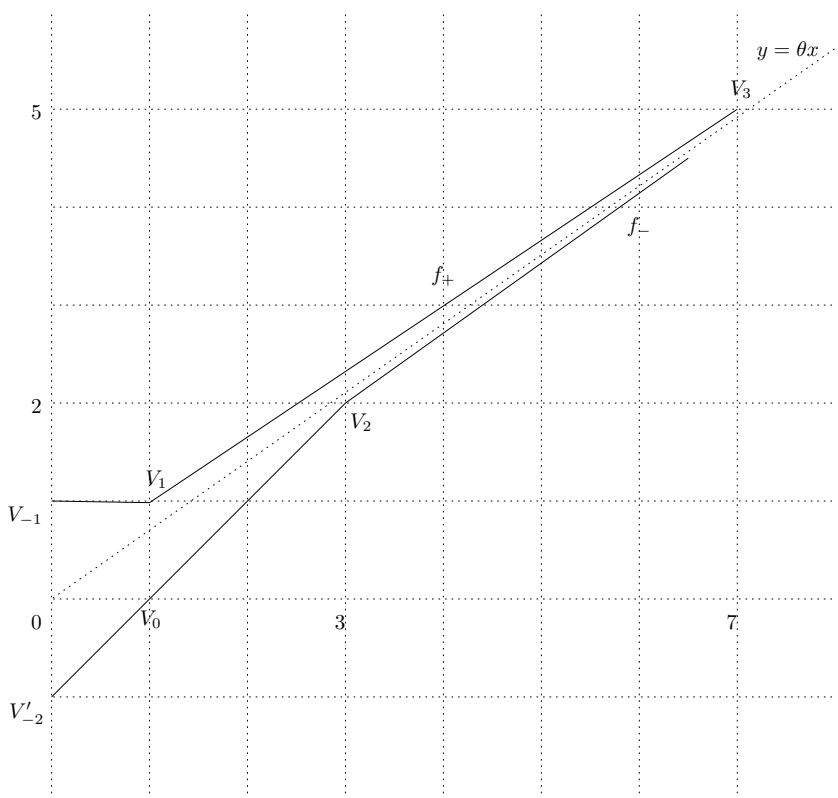

FIGURE 2 – Graphes de f_- et f_+ lorsque $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 2$.

Démonstration. Nous prouvons les résultats pour C_- seulement, puisque les résultats concernant C_+ reposent sur les mêmes arguments en dehors de ceux relatifs au segment $[V'_{-2}V_0]$.

1. Comme $V_{2n} - V_{2n-2} = a_{2n}V_{2n-1}$ pour tout $n \geqslant 0$, les pentes successives de la ligne polygonale $V'_{-2}V_0V_2V_4\ldots$ sont

$$\frac{a_0+1}{1} \geqslant \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \ldots,$$

la première inégalité provenant de $(a_0+1)q_1 = (a_0+1)a_1 \geqslant a_1a_0+1 = p_1$. On en déduit la concavité de f_-.

2. l'assertion 1 montre que l'hypographe de f_- est convexe. Pour montrer qu'il contient C_-, it suffit de vérifier qu'il contient E_-.
Soit $V = (p, q)$ in E_-. Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\frac{p}{q} < \theta < \lfloor\theta\rfloor + 1 = a_0 + 1 \text{ et } \quad \frac{p}{q} < \theta < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Les entiers $p - (a_0 + 1)q$ et $q_{2n+1}p - p_{2n+1}q$ sont strictement negatifs, donc $p-(a_0+1)q \leqslant -1$ et $q_{2n+1}p-p_{2n+1}q \leqslant -1$. Le vecteur V est donc en dessous (au sens large) des droites $(V'_{-2}V_0)$ et $(V_{2n}V_{2n+2})$. Ainsi V appartient à l'hypographe de f, ce qui montre l'inclusion voulue.

Pour montrer l'inclusion réciproque, fixons $M = (x, y)$ dans l'hypographe de f.

Si $x \in [0, 1]$, fixons un entier m tel que $-m-1 \leqslant y-(a_0+1)x \leqslant -1$. Le point M appartient au parallélogramme de sommets $(0, -1)$, $(0, -1-m)$, $(1, a_0)$, $(1, a_0 - m)$, donc à C_-.

Sinon, $x \in [q_{2n}, q_{2n+2}]$ pour un certain $n \geqslant 0$. Fixons un entier m tel que $-m - 1 \leqslant q_{2n+1}y - p_{2n+1}x \leqslant -1$. Le point M appartient au parallélogramme de sommets (q_{2n}, p_{2n}), $(q_{2n}, p_{2n} - m)$, (q_{2n+2}, p_{2n+2}), $(q_{2n+2}, p_{2n+2} - m)$, donc à C_-.

3. On vérifie que tout point extrémal de C_- appartient nécessairement au graphe de f_- et même à l'ensemble $\{V'_{-2}, V_0, V_2, V_4, \ldots\}$: en effet, tout autre point de C_- peut s'écrire comme milieu de deux points distincts de C_-.

Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on peut choisir un réel s compris strictlement entre p_{2n-1}/q_{2n-1} et p_{2n+1}/q_{2n+1}, si bien que la fonction $x \mapsto f_-(x) - sx$ admet un unique maximum M sur $[0, +\infty[$, atteint en q_{2n}. Ainsi, pour tout $(x, y) \in C_-$,

$$y - sx \leqslant f_-(x) - sx \leqslant M,$$

avec égalité si et seulement si $(x, y) = V_{2n}$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $g(x, y) = y - sx$. Si V_{2n} est le milieu d'un segment $[A, B] \subset C_-$, on a alors $g(A) + g(B) = 2g(V_{2n}) = 2M$, $g(A) \leqslant M$ et $g(B) \leqslant M$. Ainsi $g(A) = g(B) = M$ d'où $A = B = V_{2n}$, ce qui montre l'extremalité de V_{2n}.

On prouve de même l'extrémalité de V'_{-2}, en choisissant $s > a_0 + 1$.

Si $a_0+1 > p_1/q_1$, on prouve de même l'extrémalité de V_0, en choisissant s entre a_0+1 et p_1/q_1. Sinon, V_0 est une combinaison convexe non-triviale de V'_{-2} et V_2, donc V_0 n'est pas extrémal dans C_-.

4. Les premières coordonnées de V'_{-2} et V_0 sont 0 et 1, donc ces points sont les seuls points entiers sur le segment $[V'_{-2}, V_0]$.

   Pour tout $n \geqslant 1$, $V_{2n} - V_{2n-2} = a_{2n}V_{2n-1}$. Comme les deux coordonnées de V_{2n-1} sont premières entre elles, les seuls points entiers sur le segment $[V_{2n-2}, V_{2n}]$ sont les points $V_{2n-2} + bV_{2n-1}$ avec $b \in [\![0, a_{2n}]\!]$.

Ceci achève la preuve. □

3 Caractérisation par des inégalités

Le principal résultat que nous prouvons ici et le suivant.

Théorème 2 *Soient θ un nombre réel, p et $q \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. Notons u l'inverse de p modulo q, choisi dans l'intervalle d'entiers $[\![1, q-1]\!]$, et v l'unique entier tel que $up - vq = 1$. lors*

1. *On a*
$$\frac{v}{u} < \frac{p+v}{q+u} < \frac{p}{q} < \frac{2p-v}{2q-u} < \frac{p-v}{q-u} \tag{1}$$

2. *La fraction p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ si et seulement si*
$$\frac{-1}{u} < q\theta - p < \frac{1}{q-u}, \quad \textit{i.e.}\ \frac{v}{u} < \theta < \frac{p-v}{q-u}. \tag{2}$$

3. *La fraction p/q est une réduite de θ si et seulement si*
$$\frac{-1}{q+u} < q\theta - p < \frac{1}{2q-u}, \quad \textit{i.e.}\ \frac{p+v}{q+u} < \theta < \frac{2p-v}{2q-u}. \tag{3}$$

Remarque 2 *La condition 3 reste valable lorsque $q = 1$ à condition de faire la convention $u = 1$ et $v = p - 1$; elle dit alors que $p = [p] = [p-1, 1]$ est une réduite de θ si et seulement si $p - 1/2 < \theta < p + 1$.*

Exemple 1 *Si $p = 7$ et $q = 10$, alors $u = 3$ et $v = 2$. On obtient que $7/10$ est une réduite ou une réduite secondaire de θ si et seulement si $2/3 < \theta < 5/7$, et que $7/10$ est une réduite de θ si et seulement si $9/13 < \theta < 12/17$.*

Comme $1 \leqslant u \leqslant q-1$, le théorème 2 entraîne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1 *Soient p et $q \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. Alors*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q(2q-1)} \Longrightarrow p/q \textit{ est une réduite de } \theta \Longrightarrow \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q(q+1)}.$$

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q(q-1)} \Longrightarrow p/q \textit{ est une réduite ou une réduite secondaire de } \theta.$$

Ces conditions améliorent légèrement les implications classiques

$$\begin{aligned}
|\theta - p/q| < 1/(2q^2) \quad &\Longrightarrow \quad p/q \text{ est une réduite de } \theta \\
&\Longrightarrow \quad |\theta - p/q| < 1/q^2 \\
&\Longrightarrow \quad p/q \text{ est une réduite ou une réduite secondaire de } \theta.
\end{aligned}$$

Le théorème 2 a une autre conséquence remarquable.

Corollaire 2 *Gardons les hypothèses et les notations du théorème 2 et supposons que p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ.*

1. *Les fractions v/u et $(p-v)/(q-u)$ sont aussi des réduites ou des réduites secondaires de θ.*
2. *Si $u \leqslant q-u$, alors v/u est une réduite de θ.*
3. *Si $u > q-u$, alors $(p-v)/(q-u)$ est une réduite de θ.*

Démonstration du théorème 2.

À l'aide de la relation $up - vq = 1$, on vérifie directement les inégalités 1 en calculant les différences et on vérifie que les deux formulations données pour chacune des conditions 2 et 3 sont équivalentes. Notons

$$\frac{p}{q} := [b_0; b_1, \ldots, b_n] = [b_0; b_1, \ldots, b_n - 1, 1],$$

et $P_k/Q_k := [b_0; b_1, \ldots, b_k]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, d'où $(P_n, Q_n) = (p, q)$. L'égalité

$$Q_{n-1}p - P_{n-1}q = Q_{n-1}P_n - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$$

montre que (u, v) est égal à $(Q_n - Q_{n-1}, P_n - P_{n-1})$ si n est pair, (Q_{n-1}, P_{n-1}) si n est impair. Notons par ailleurs que

$$\frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}} = [b_0; b_1, \ldots, b_n - 1].$$

et

$$\frac{2P_n - P_{n-1}}{2Q_n - Q_{n-1}} = \frac{2(P_n - P_{n-1}) + P_{n-1}}{2(Q_n - Q_{n-1}) + Q_{n-1}} = [b_0; b_1, \ldots, b_n - 1, 2].$$

En utilisant les propriétés (continuité, monotonie, limite en $+\infty$) des fonctions $x \mapsto [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, x]$ et $x \mapsto [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, x]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&p/q \text{ est une réduite ou une réduite secondaire de } \theta \\
\Longleftrightarrow \quad &\text{le développement de } \theta \text{ commence par } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, a, \ldots] \text{ avec } a \geqslant b_n \\
&\qquad\qquad \text{ou par } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, \ldots] \\
\Longleftrightarrow \quad &\theta \text{ est compris entre } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n] \text{ inclus et } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}] \\
&\quad \text{ou entre } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 1] \text{ inclus et } [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1] \\
\Longleftrightarrow \quad &\theta \text{ est compris entre } \frac{P_n}{Q_n} \text{ inclus et } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ ou } \frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad &\theta \text{ est compris entre } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \text{ et } \frac{P_n - P_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{v}{u} < \theta < \frac{p-v}{q-u}.
\end{aligned}$$

De même,

p/q est une réduite de θ

$\iff$ le développement de θ commence par $[b_0; b_1, \ldots, b_n, \ldots]$

ou par $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 1, \ldots]$

$\iff$ θ est compris entre $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n]$ inclus et $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + 1]$

ou entre $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 1]$ inclus et $[b_0; b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 2]$

$\iff$ θ est compris entre $\dfrac{P_n}{Q_n}$ inclus et $\dfrac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$ ou $\dfrac{2P_n - P_{n-1}}{2Q_n - Q_{n-1}}$

$\iff$ θ est compris entre $\dfrac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + P_{n-1}}$ et $\dfrac{2P_n - P_{n-1}}{2Q_n - Q_{n-1}}$

$\iff$ $\dfrac{p+v}{q+u} < \theta < \dfrac{2p-v}{2q-u}$.

Ceci achève la preuve du théorème 2. $\square$

Démonstration du corollaire 2.

Supposons maintenant que assume p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ. D'après le théorème 2, on a

$$\frac{v}{u} < \theta < \frac{p-v}{q-u}. \tag{4}$$

Cas où $u = q - u$. La relation $up - vq = 1$ montre que $u = 1$ et $p = 2$, d'où $p = 2v + 1$ et $v < \theta < v + 1$. Ainsi $v/u = v$ est une réduite de θ tandis que $(p - v)/(q - u) = v + 1$ est une réduite une une réduite secondaire.

Cas où $u < q - u$. Comme $u \in [\![1, q-u-1]\!]$ et $u(p-v) - v(q-u) = 1$, on peut appliquer le théorème 2 à $(p_1, q_1, u_1, v_1) := (p - v, q - u, u, v)$: les inégalités

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v}{u} < \theta < \frac{p-v}{q-u} = \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1 - v_1}{q_1 - u_1}$$

montrent que $(p - v)/(q - u)$ est une réduite ou une réduite secondaire.

If $u = 1$, l'inégalité 4 donne $v < \theta < v + 1/(q - 1)$ puisque $p - v = up - v = v(q-1)+1$, si bien que $v/u = \lfloor \theta \rfloor$ est une réduite. Sinon, u ne peut pas diviser q et la division euclidienne de q par u donne $q = ku+q'$ avec $k \geqslant 2$ et $q' \in [\![1, u-1]\!]$. Posons $p = kv+p'$. Comme $(u-q')v-(v-p')u = 1$ et $u-q' \in [\![1, u-1]\!]$, on peut appliquer le théorème 2 à $(p_2, q_2, u_2, v_2) := (v, u, u - q', v - p')$: les inégalités

$$\frac{p_2 + u_2}{q_2 + v_2} < \frac{p_2}{q_2} = \frac{v}{u} < \theta < \frac{p-v}{q-u} = \frac{(k-1)v + p'}{(k-1)u + q'} \leqslant \frac{v + p'}{u + q'} = \frac{2p_2 - u_2}{2q_2 - v_2}$$

montent que v/u est une réduite.

Cas où $u > q - u$. Comme $0 < 2u - q < u$ et $(2u - q)v - (2v - p)u = 1$, on peut appliquer le théorème 2 à $(p_3, q_3, u_3, v_3) := (v, u, 2u - q, 2v - p)$: les inégalités

$$\frac{v_3}{u_3} < \frac{p_3}{q_3} = \frac{v}{u} < \theta < \frac{p - v}{q - u} = \frac{p_3 - v_3}{q_3 - u_3}$$

montent que v/u est une réduite ou une réduite secondaire.

Si $q - u = 1$, l'inégalité 4 donne $p - v - 1/2 \leqslant p - v - 1/u = v/u < \theta < p - v$ puisque $u(p-v)-1 = up-vq+v-1 = v$, si bien que $(p-v)/(q-u) = p-v$ est une réduite. Sinon, $q-u$ ne peut pas diviser q et la division euclidienne de q par $q-u$ donne $q = k(q-u)+q''$ avec $k \geqslant 2$ et $q'' \in [\![1, q-u-1]\!]$. Posons $p = k(p-v)+p''$. Comme $q''(p - v) - p''(q - u) = q(p - v) - p(q - u) = 1$ et $q'' \in [\![1, q - u - 1]\!]$, on peut appliquer le théorème 2 à $(p_4, q_4, u_4, v_4) := (p - v, q - u, q'', p'')$: les inégalités

$$\frac{p_4 + v_4}{q_4 + u_4} = \frac{p - v + p''}{q - u + q''} \leqslant \frac{(k - 1)(p - v) + p''}{(k - 1)(q - u) + q''} = \frac{v}{u} < \theta < \frac{p - v}{q - u} = \frac{p_4}{q_4} < \frac{2p_4 - u_4}{2q_4 - v_4}$$

montrent que $(p - v)/(q - u)$ est une réduite.

Ceci achève la preuve du corollaire 2. □

4 Lien avec l'arbre de Stern-Brocot

L'arbre de Stern-Brocot, introduit indépendamment par Stern [6] et Brocot [1], est un arbre binaire dont les sommets sont les nombres rationnels strictement positifs (ou de façon équivalente, par les couples d'entiers strictement positifs premiers entre eux). Les fractions v/u et $(p-v)/(q-u)$ qui apparaissent dans le théorème 2 sont les deux fractions qui "engendrent" p/q dans l'arbre de Stern-Brocot, tandis que $(p + v)/(q + u)$ et $(2p - v)/(2q - u)$ sont les deux enfants de p/q.

Pour construire cet arbre associé, on définit une suite croissante de subdivisions de l'intervalle $[0/1, 1/0] = [0, +\infty]$ comme suit. La subdivision $\mathcal{S}_0$ est la paire $\{0/1, 1/0\}$. Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$, la subdivision $\mathcal{S}_n$ a exactement $2^n + 1$ points délimitant 2^n intervalles, et que chaque intervalle est de la forme $[A/B, C/D]$, où A, B, C, D sont des entiers positifs tels que $AD - BC = -1$. On obtient $\mathcal{S}_{n+1}$ à partir de $\mathcal{S}_n$ en coupant chaque intervalle $[A/B, C/D]$ au point $(A + C)/(B + D)$, si bien que $\mathcal{S}_{n+1}$ a exactement $2^{n+1} + 1$ points délimitant 2^{n+1} intervalles, chaque intervalle étant de la forme $[A'/B', C'/D']$, où A', B', C', D' sont des entiers positifs tels que $A'D' - B'C' = -1$.

Remarquons que si A/B et C/D sont deux fractions sous forme irréductible telles que $AD - BC = -1$, alors la fraction $(A + B)/(C + D)$ est celle ayant le plus petit dénominateur dans l'intervalle ouvert $]A/B, C/D[$. En effet, si E et $F \geqslant 1$ sont des entiers tels que E/F appartient à $]A/B, C/D[$, alors $F \geqslant B + D$ puisque

$$\frac{1}{BD} = \frac{C}{D} - \frac{A}{B} = \Big(\frac{C}{D} - \frac{E}{F}\Big) + \Big(\frac{E}{F} - \frac{A}{B}\Big) = \frac{FC - ED}{FD} + \frac{BE - AF}{BF} \geqslant \frac{1}{FD} + \frac{1}{BF}.$$

L'arbre de Stern-Brocot est l'arbre binaire infini dans lequel les 2^n sommets au niveau n sont les fractions de $\mathcal{S}_{n+1} \setminus \mathcal{S}_n$ rangées par ordre croissant de gauche à droite. La racine est $(0+1)/(1+0) = 1/1$, ses deux enfants sont $(0+1)/(1+1) = 1/2$ et $(1+1)/(1+0) = 2/1$, et ainsi de suite.

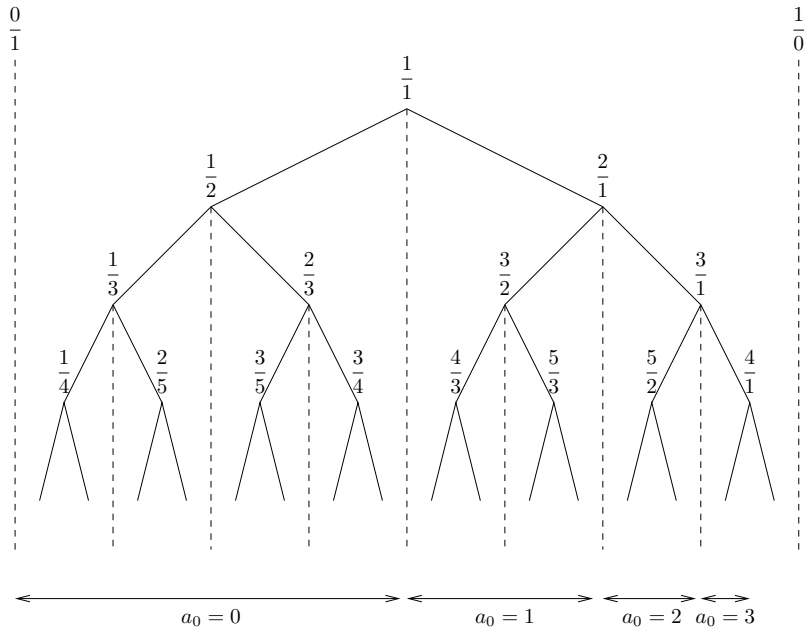

FIGURE 3 – Premières étapes de la construction de l'arbre de Stern-Brocot.

Toute fraction strictement positive p/q apparaît une fois et une seule dans l'arbre et sa position peut être décrite de façon récursive : si $q = 1$, alors p/q est sur la branche la plus à droite ; si $q \geqslant 2$, notons u l'inverse de p modulo q, choisi dans l'intervalle $[\![1, q-1]\!]$, et v l'unique entier tel $up - vq = 1$. Comme $v(q-u) - u(p-v) = -1$, la fraction $p/q = (v + (p-v))/(u + (q-u))$ est la fraction inserée dans l'intervalle $[v/u, (p-v)/(q-u)]$. Ainsi, le sommet p/q est l'enfant de droite du sommet v/u si $u > q-u$, et l'enfant de gauche du sommet $(p-v)/(q-u)$ si $u \leqslant q-u$. Remarquons que si $u = q-u$, alors $u = q-u = 1$, $q = 2$ et $v = (p-1)/2$ puisque u et q sont premiers entre eux.

Nous pouvons préciser la localisation dans l'arbre de Stern-Brocot de toute fraction strictement positive en fonction de son développement en fraction continue.

Théorème 3 *Soit p/q une fraction strictement positive et $[a_0; a_1 \ldots, a_n]$ son développement standard en fraction continue (donc $a_n \geqslant 2$ si $n \geqslant 1$).*

1. *Pour trouver p/q dans l'arbre de Stern-Brocot en descendant de la racine, il suffit d'effectuer a_0 pas vers la droite, a_1 pas vers la gauche,..., a_{n-1} pas vers la gauche si n est pair (vers la droite si n est impair), et $a_n - 1$ pas vers la droite si n est pair (vers la gauche si n est impair).*
2. *En dehors des entiers compris entre 1 et $\lfloor p/q \rfloor - 1$, les sommets visités sont exactement les réduites et les réduites secondaires de p/q. De plus les réduites sont exactement les sommets qui précèdent un changement de direction.*

Démonstration

Notons $(p_k/q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ les réduites de p/q, $(p_{-2}, q_{-2}) = (0, 1)$ et $(p_{-1}, q_{-1}) = (1, 0)$. La racine est la fraction $1/1$, qui a été insérée dans l'intervalle $[0/1, 1/0] = [p_{-2}/q_{-2}, p_{-1}/q_{-1}]$ lors de la construction de l'arbre.

Les a_0 premiers pas à droite nous mènent successivement à

$$\frac{2}{1}, \ldots, \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \text{ et } \frac{a_0 + 1}{1} = \frac{p_{-1} + p_0}{q_{-1} + q_0}.$$

Cette dernière fraction a été insérée dans l'intervalle $[a_0/1, 1/0] = [p_0/q_0, p_{-1}/q_{-1}]$.

Les a_1 pas suivants vers la gauche nous mènent successivement à

$$\frac{p_{-1} + 2p_0}{q_{-1} + 2q_0}, \ldots, \frac{p_{-1} + a_1 p_0}{q_{-1} + a_1 q_0} = \frac{p_1}{q_1} \text{ et } \frac{p_{-1} + (a_1 + 1)p_0}{q_{-1} + (a_1 + 1)q_0} = \frac{p_0 + p_1}{q_0 + q_1}.$$

Cette dernière fraction est celle qui a été insérée dans l'intervalle $[p_0/q_0, p_1/q_1]$.

On continue ainsi jusqu'aux a_{n-1} pas vers la gauche si n est pair, vers la droite si n est impair, qui nous mnent $(p_{n-2} + p_{n-1})/(q_{n-2} + q_{n-1})$, qui est la fraction insérée entre p_{n-2}/q_{n-2} et p_{n-1}/q_{n-1}. Les $a_n - 1$ derniers pas nous mènent successivement à

$$\frac{p_{n-2} + 2p_{n-1}}{q_{n-2} + 2q_{n-1}}, \ldots, \frac{p_{n-2} + a_n p_{n-1}}{q_{n-2} + a_n q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

On en déduit les affirmations du théorème 3.

En utilisant la croissance des fractions en allant de gauche à droite dans l'arbre et le fait que tout irrationnel strictement positif est un sommet de l'arbre, on peut adapter le résultat précédent aux branches infinies.

Remarque 3 *Le long de toute branche infinie de l'arbre de Stern-Brocot, la suite de fractions possède une limite dans $[0, +\infty]$. Un algorithme similaire celui du théorème 3 permet de suivre la branche infinie qui converge vers un irrationnel positif donné, et on a les mêmes caractérisations pour les réduites et les réduites secondaires.*

5 Meilleures approximations

Nous nous intéressons maitenant aux fractions p/q qui approchent le mieux un réel θ donné lorsqu'on fixe une borne pour le dénominateur. Deux définitions naturelles sont possibles, suivant qu'on choisit de regarder $|p/q - \theta|$ ou $|p - q\theta|$.

Définition 2 *Soient p et $q \geqslant 1$ deux entiers premiers entre eux.*

La fraction p/q est une meilleure approximation de Huygens de θ si pour tous entiers p' et q' tels que $1 \leqslant q' \leqslant q$, on a $|p'/q' - \theta| \geqslant |p/q - \theta|$, avec égalité seulement si $(p', q') = (p, q)$.

La fraction p/q est une meilleure approximation de Lagrange de θ si pour tous entiers p' et q' tels que $1 \leqslant q' \leqslant q$, on a $|p' - q'\theta| \geqslant |p - q\theta|$, avec égalité seulement si $(p', q') = (p, q)$.

Toute meilleure approximation de Lagrange est nécessairement une meilleure approximation de Huygens (pour le voir, il suffit de multiplier membre à membre les inégalités $|p' - q'\theta| \geqslant |p - q\theta|$ et $1/q' \geqslant 1/q$), mais la réciproque est fausse : voir exemple ci-dessous.

Théorème 4 *Soit $\theta \in \mathbb{R}$.*

1. *Toute meilleure approximation de Huygens est une réduite ou une réduite secondaire de θ.*
2. *Toute meilleure approximation de Lagrange est une réduite de θ.*
3. *Toute réduite de θ est une meilleure approximation de Lagrange de θ, hormis $\lfloor \theta \rfloor$ si $\theta - \lfloor \theta \rfloor \geqslant 1/2$.*

En revanche, les réduites secondaires ne sont pas toujours des meilleures approximations de Huygens, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2 *Les premières réduites de $\sqrt{6} = [2; 2, 4, \ldots]$ sont*

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{1 + 2 \times 2}{0 + 2 \times 1} = \frac{5}{2}, \quad \frac{2 + 4 \times 5}{1 + 4 \times 2} = \frac{22}{9}.$$

Les fractions

$$\frac{2 + 5}{1 + 2} = \frac{7}{3}, \quad \frac{2 + 2 \times 5}{1 + 2 \times 2} = \frac{12}{5}$$

sont des réduites secondaires.

Comme $\sqrt{6} - 7/3 > 5/2 - \sqrt{6} > 0$, la fraction $7/3$ n'est pas une meilleure approximation de Huygens de $\sqrt{6}$. On vérifie que $12/5$ est une meilleure approximation de Huygens de $\sqrt{6}$, mais cette fraction ne peut être une meilleure approximation de Lagrange, d'après le théorème 4.

Démonstration du théorème 4.

Soit $[a_0; a_1, \ldots]$ le développement de θ en fraction et $(p_n/q_n)_{n \geqslant 0}$ les réduites. Soient p et $q \geqslant 1$ deux entiers premiers entre eux.

Si $q = 1$, p/q est une meilleure approximation de Huygens de θ (ou de Lagrange, ce qui est équivalent dans ce cas) si et seulemet si p est le seul entier minimisant la distance à θ. Cet entier est $a_0 = p_0/q_0$ si $\theta - a_0 < 1/2$, $a_0 + 1 = p_1/q_1$ si $\theta - a_0 > 1/2$, et n'est pas unique si $\theta - a_0 = 1/2$.

Concentrons-nous maintenant sur le cas où $q \geqslant 2$, et reprenons les notations du théorème 2. Rappelons que u et $q - u$ sont dans $[\![1, q-1]\!]$ et que

$$\frac{v}{u} < \frac{p+v}{q+u} < \frac{p}{q} < \frac{2p-v}{2q-u} < \frac{p-v}{q-u}.$$

Si p/q est une meilleure approximation de Huygens de θ, alors

$$\left|\frac{p}{q} - \theta\right| < \left|\frac{v}{u} - \theta\right| \text{ et } \left|\frac{p}{q} - \theta\right| < \left|\frac{p-v}{q-u} - \theta\right|,$$

donc

$$\frac{v}{u} < \frac{1}{2}\Big(\frac{v}{u} + \frac{p}{q}\Big) < \theta < \frac{1}{2}\Big(\frac{p}{q} + \frac{2p-v}{2q-u}\Big) < \frac{p-v}{q-u}.$$

Donc p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ d'après le théorème 2.

Si p/q est une meilleure approximation de Lagrange de θ, alors

$$|q\theta - p| < |u\theta - v| \text{ et } |q\theta - p| < |(q-u)\theta - (p-v)|.$$

Mais p/q est aussi une meilleure approximation de Huygens de θ, donc on vient de voir que $v/u < \theta < (p-v)/(q-u)$, d'où $u\theta - v > 0 > (q-u)\theta - (p-v)$. Ainsi,

$$p - q\theta \leqslant |q\theta - p| < u\theta - v \text{ et } q\theta - p \leqslant |q\theta - p| < (p-v) - (q-u)\theta,$$

donc $p + v < (q+u)\theta$ et $(2q-u)\theta < 2p - v$, si bien que p/q est une réduite de θ d'après le théorème 2.

Montrons enfin que si $q_n \geqslant 2$, la réduite p_n/q_n est une meilleure approximation de Lagrange de θ. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1, q_n]\!]$ deux entiers minimisant $|q\theta - p|$. S'il n'y a pas unicité, prenons q aussi petit que possible ; il n'y aura pas de choix pour p puisque

$$|q\theta - p| \leqslant |q_n\theta - p_n| < \frac{1}{q_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Alors p et q sont premiers entre eux et p/q est une meilleure approximation de Lagrange de θ. Donc $(p, q) = (p_k, q_k)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $|q\theta - p| \leqslant |q_n\theta - p_n|$, on a nécessairement $k = n$.

Ceci achève la preuve. □

6 Caractérisation à l'aide de la suite des $(n\theta) \bmod 1$

Fixons $\theta \in \mathbb{R}$, et regardons la suite de réels $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$x_n = (n\theta) \bmod 1 = n\theta - \lfloor n\theta \rfloor.$$

Pour chaque $n \geqslant 1$, les réels $x_0, \ldots, x_{n-1}$ partagent l'intervalle $[0,1[$ en n sous-intervalles (éventuellement vides). Le théorème des trois longueurs affirme que ces intervalles ont au plus trois longueurs différentes ; de plus s'il y a effectivement trois longueurs différentes, la plus grande est la somme des deux autres. On trouve de nombreuses preuves différentes de ce résultat, voir par exemple [5, 7, 8, 4]. Nous en donnons une nouvelle avec l'aide du théorème 2. Nous démontrons le résultat plus précis suivant.

Théorème 5 *Soit $n \geqslant 2$. Supposons que θ est soit irrationnel, soit une fraction irréductible de dénominateur strictement plus grand que n. Soit p/q la première réduite ou réduite secondaire de θ telle que $q \geqslant n$. Notons $u \in [\![1, q-1]\!]$ l'inverse de p modulo q et v l'entier tel que $up - vq = 1$. Posons $\ell = u\theta - v$ et $\ell' = (u-q)\theta - (v-p)$.*

1. *La subdivision $(x_k)_{k \in [\![0,q-1]\!]}$ partage $[0,1[$ en $q-u$ intervalles de longueur ℓ et u intervalles de longueur ℓ'. De plus, $\ell = \ell'$ si et seulement si $\theta = p/q$.*
2. *La subdivision $(x_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ partage $[0,1[$ en $n-u$ intervalles de longueur ℓ, $n-q+u$ intervalles de longueur ℓ' et $q-n$ intervalles de longueur $\ell + \ell'$.*

L'hypothèse que nous avons faite (θ ne peut pas s'écrire comme quotient d'un entier par un entier de $[\![1, n]\!]$) sert à écarter le cas trivial ci-dessous.

Remarque 4 *Si $\theta = A/B$ où A et $B \geqslant 1$ sont des entiers premiers entre eux, alors pour tout $n \geqslant B$, la subdivision $(x_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ partage $[0,1[$ en B intervalles de longueur $1/B$ et $n-B$ intervalles vides.*

Démonstration du théorème 5.

D'après le théorème 2, on a $v/u < \theta < (p-v)/(q-u)$. Donc les réels ℓ et ℓ' sont strictement positifs. Remarquons que

$$(q-u)\ell + u\ell' = (q-u)(-v) - u(v-p) = 1.$$

Soit σ la permutation sur $[\![0, q-1]\!]$ définie par $\sigma(k) = (kp) \bmod q$. Son inverse est donné par $\sigma^{-1}(k) = (ku) \bmod q$. L'assertion 1 découlera immédiatement des égalités

$$\begin{aligned}
x_{\sigma^{-1}(k+1)} - x_{\sigma^{-1}(k)} &= \ell \quad \text{si } 0 \leqslant \sigma^{-1}(k) \leqslant q-1-u, && (5)\\
1 - x_{\sigma^{-1}(k)} &= \ell' \quad \text{si } \sigma^{-1}(k) = q-u, \text{ i.e. } k = q-1, && (6)\\
x_{\sigma^{-1}(k+1)} - x_{\sigma^{-1}(k)} &= \ell' \quad \text{si } q-u+1 \leqslant \sigma^{-1}(k) \leqslant q-2. && (7)
\end{aligned}$$

Pour montrer ces égalités, introduisons des réels $(x'_k)_{k \in [\![0,q-1]\!]}$ définis par $x'_0 = 0$, $x'_{k+1} - x'_k = \ell$ si $\sigma^{-1}(k) \leqslant q-1-u$ et $x'_{k+1} - x'_k = \ell'$ si $\sigma^{-1}(k) \geqslant q-u$. Comme

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}(k+1) - \sigma^{-1}(k) &= u \quad \text{si } \sigma^{-1}(k) \leqslant q-1-u,\\
\sigma^{-1}(k+1) - \sigma^{-1}(k) &= u-q \quad \text{si } \sigma^{-1}(k) \geqslant q-u,
\end{aligned}$$

les congruences ci-dessous sont vraies dans tous les cas :

$$x_{\sigma^{-1}(k+1)} - x_{\sigma^{-1}(k)} \equiv \big(\sigma^{-1}(k+1) - \sigma^{-1}(k)\big)\theta \equiv x'_{k+1} - x'_k \text{ modulo } 1.$$

Une récurrence sur k montre que $x'_k \equiv x_{\sigma^{-1}(k)}$ modulo 1, il reste donc seulement à vérifier que $x'_k \in [0,1[$. Par construction, la suite $(x'_k)_{k\in[\![0,q-1]\!]}$ est croissante, $x'_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} x'_{q-1} = \sum_{k=0}^{q-2}(x'_{k+1} - x'_k) &= \sum_{k=0}^{q-2}\Big(\ell \not\vee_{[\sigma^{-1}(k)\leqslant q-1-u]} + \ell' \not\vee_{[\sigma^{-1}(k)\geqslant q-u]}\Big) \\ &= (q-u)\ell + (u-1)\ell' = 1 - \ell', \end{aligned}$$

car $\sigma^{-1}(q-1) = (q-u)$. On en déduit les égalités 5, 6, 7 et l'assertion 1.

Maintenant, regardons la subdivision plus grossière $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ obtenue à partir de la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,q-1]\!]}$ en enlevant les $q-n$ derniers points points, à savoir les points $(x_k)_{k\in[\![n,q-1]\!]}$. Notons que $u < n$ et $q-u < n$ par définition de p/q et grâce au corollaire 2.

Soit $k \in [\![n, q-1]\!]$. Alors $k > u$ et $k > q-u$. Si l'on range les points $(x_k)_{k\in[\![0,q-1]\!]}$ par ordre croissant, les deux points précédant et suivant immédiatement x_k sont donc $x_{\sigma^{-1}(\sigma(k)-1)} = x_{k-u}$ et $x_{\sigma^{-1}(\sigma(k)+1)} = x_{k-(q-u)}$. Comme $k-u \leqslant q-1-u \leqslant n-1$ et $k-(q-u) \leqslant u-1 \leqslant n-1$, ces deux points appartiennent encore à la subdivision plus grossière $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$. Ainsi, l'effet de la suppression du point x_k est de fusionner les intervalles $[x_{k-u}, x_k[$ et $[x_k, x_{k+u}[$, dont les longueurs sont ℓ et ℓ'. Cela montre l'assertion 2 et achève la preuve $\square$.

Remarque 5 *Le principe de Dirichlet assure l'existence d'une infinité de fractions p/q telles que $|q\theta - p| < 1/p$ et se démontre simplement sans faire appel aux fractions continues. Il est donc possible de reformuler et de démontrer le théorème 5 sans recourir aux fractions continues, en définissant la fraction p/q comme la fraction ayant le plus petit dénominateur au moins égal à n telle que $-1/u < q\theta - p < 1/(q-u)$, où $u \in [\![1, q-1]\!]$ est l'inverse de p modulo q.*

Le théorème 5 fournit une nouvelle caractérisation des réduites et réduites secondaires d'un nombre irrationnel.

Corollaire 3 *Supposons que θ est irrationnel. Soit $n \geqslant 3$. Alors les sous-intervalles de $[0,1[$ fournis par la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ ont seulement deux longeurs différentes si et seulement si n est le dénominateur d'une réduite ou d'une réduite secondaire de θ.*

Le corollaire 3 découle directement du théorème 5, le sens « si »venant de l'assertion 1 et le sens « si »venant de l'assertion 2. Voici cependant une preuve alternative directe pour le sens « seulement si ».

Supposons que la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ partage $[0,1[$ ayant seulement deux longeurs différentes. Comme θ est irrationnel, les réels $(x_k)_{k\in[\![0,q-1]\!]}$ sont distincts. Posons

$$x_u = \min_{1\leqslant k\leqslant q-1} x_k, \quad x_{u'} = \max_{1\leqslant k\leqslant q-1} x_k, \quad v = \lfloor u\theta \rfloor, \quad v' = \lfloor u'\theta \rfloor + 1,$$

si bien que $x_u = u\theta - v$ et $x_{u'} = u'\theta - v' + 1$. Comme $x_0 = 0$, les sous-intervalles le plus à gauche et le plus à droite sont $[0, x_u[$ et $[x_{u'}, 1[$. Leurs longeurs $\ell = u\theta - v$ et $\ell' = -u'\theta + v'$ sont différentes puisque θ est irrationnel. Soient n et n' le nombre de sous-intervalles de longeur ℓ et ℓ'. alors $n + n' = q$ et $n\ell + n'\ell' = 1$. Comme 1 et θ sont linéairement indépendents sur $\mathbb{Q}$, la dernière égalité entraîne $nu - n'u' = 0$ et $-nv + n'v' = 1$, d'où

$$n = \frac{u'}{uv' - u'v} \text{ et } n' = \frac{u}{uv' - u'v}.$$

Comme $n + n' = q$, on obtient $u + u' = (uv' - u'v)q$. Mais u et u' sont dans $[\![1, q-1]\!]$, la seule possibilité est donc $u + u' = q$ et $uv' - u'v = 1$. Posons $p = v + v'$. Alors $up - vq = u(v + v') - v(u + u') = 1$ et

$$\frac{v}{u} < \theta < \frac{v'}{u'} = \frac{p - v}{q - u}.$$

ce qui montre que p/q est une réduite ou une réduite secondaire de θ, d'après le théorème 2. $\square$

La figure 4 montre l'évolution des longueurs lorsqu'on ajoute les points un à un. Notons $(p_n/q_n)_{n \geqslant 0}$ les réduites de θ. L'ajout du point x_{q_n} fait apparaître la longueur $\ell_n = |q_n\theta - p_n|$, qui est plus courte que les longueurs déjà vues. Cette suite $(\ell_n)_{n \geqslant 0}$ est simplement la suite des longeurs obtenue en appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres θ et 1.

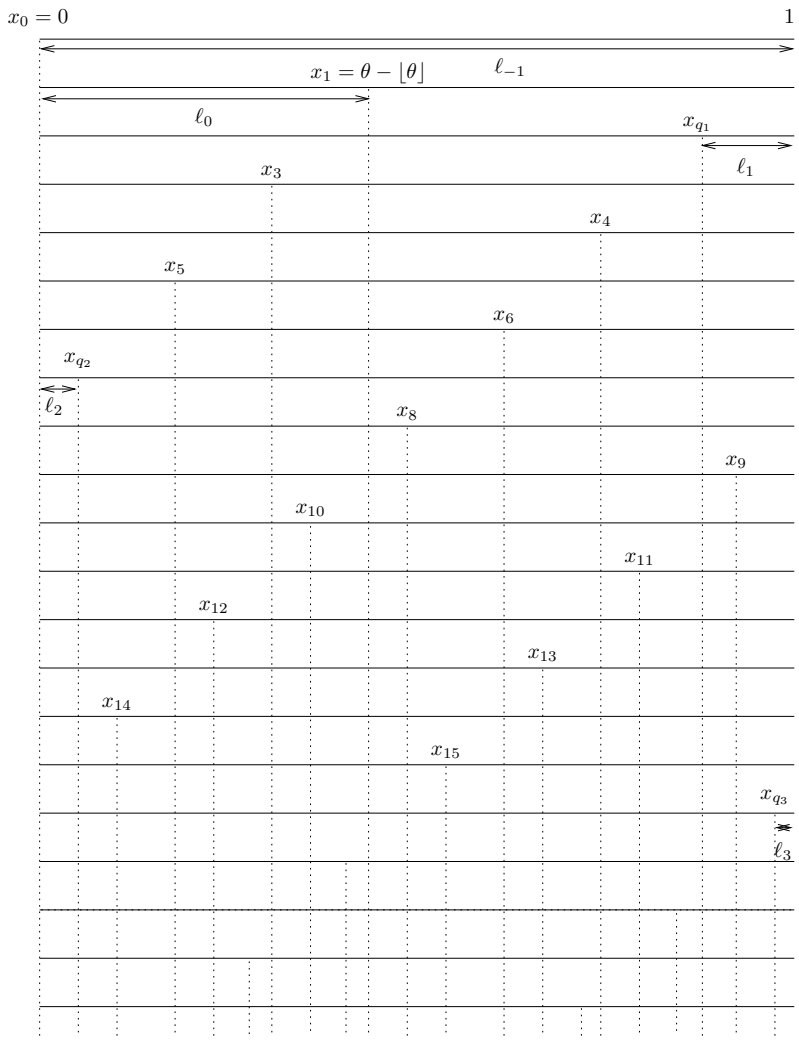

FIGURE 4 – Premières partitions de l'intervalle $[0, 1[$ obtenues en ajoutant un à un les points de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Références

[1] Brocot, A. *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode*, Revue Chonométrique 3, 186–194, (1861).

[2] Duverney D., Théorie des nombres : cours et exercices corrigés 2e édition, Dunod, (2007).

[3] A. Khinchin, *Continued fractions*. Translated by Peter Wynn.(English) Groningen, The Netherlands : P. Noordhoff, Ltd. 101 pp. (1963).

[4] J. Marklof, A. Strömbergsson, (2017), *The three gap theorem and the space of lattices*, American Mathematical Monthly **124**-8, 741–745 (2017).

[5] Sós, V. T., *On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1 : 127–134 (1958).

[6] Stern, M. A., *Über eine zahlentheoretische Funktion*, J. reine angew. Math. 55, 193–220, (1858).

[7] Surányi, J., *Über die Anordnung der Vielfachen einer reelen Zahl mod 1*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., 1 : 107–111 (1958).

[8] Świerczkowski, S., *On successive settings of an arc on the circumference of a circle*, Fundamenta Mathematicae, 46 (2) : 187–189, (1959).